



ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Fünfundsechzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1880.

Inhalts-Verzeichniss

des fünfundsechzigsten Teils.

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

Integralrechnung.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Trigonometrie.

Mechanik.

Optik.

Astronomie, mathematische Geographie und Meteorologie.

Litterarische Berichte.

Druckfehler.

Seite	Zeile		statt	setze
Seite 14	Zeile 10	v. u.	statt Congruenz	setze Congruenzsätze
„ 161	„ 8	„	„ F	„ E
				Ebenen und Flächen sollen überall durch grosse stehende Buchstaben bezeichnet werden.
Seite 161	Zeile 3 u. 6	v. unt.	statt $\breve{\mathrm{H}}$	setze $\breve{\mathrm{K}}$
„ 162	„ 6	v. ob.	statt „	„ „
„ 162	„ 19	„	„ einem Kreise	„ einem grössten Kreise.
„ 166	„ 11	„	„ $v_{1\infty}$	„ $\overline{v_{1\infty}}\,\overline{u'_{\infty}}$
„ 166	„ 14	„	„ $v_1(x'y'u'\infty\ldots)$	„ $v_1(x'y'u'\infty\, u\ldots)$
„ 167	„ 16	„	„ wenn	„ nennen.



I.

Ueber Newton's Methode zur Beschreibung eines Kegelschnitts, welcher durch vier gegebene Punkte geht und eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Von

Johann August Grunert.

In dem unsterblichen Werke, in welchem Newton uns die Grundlagen des Weltsystems aufgedeckt hat, ist von demselben auch der Beschreibung von Kegelschnitten, welche durch gegebene Punkte gehen und der Lage nach gegebene gerade Linien berühren, besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden, und ich beabsichtige, in einer Reihe von Abhandlungen die Leser dieser Zeitschrift mit den von Newton zur Lösung der betreffenden Aufgaben gegebenen schönen Constructionen, welchen, wie es mir scheint, bisher bei Weitem nicht Beachtung genug geschenkt worden ist, näher bekannt zu machen.

Zuerst wird sich die vorliegende Abhandlung mit der Beschreibung eines Kegelschnitts beschäftigen, welcher durch vier gegebene Punkte gehen und eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren soll.

In seiner Bearbeitung der Salmon'schen Analytischen Geometrie der Kegelschnitte. (Leipzig. 1860.). S. 588. sagt Herr W. Fiedler von dieser Aufgabe: „Vier Punkte und eine Tangente. Wir haben eine Methode zur Auflösung dieser Aufgabe bereits im Art. 416 bezeichnet und erinnern, dass der Berührungspunkt der gegebenen Tangente, dessen Bestimmung die Auf-

gabe lösen würde*), Brennpunkt einer Involution ist, welche von den Gegenseitenpaaren des gegebenen Vierecks in ihr bestimmt wird. Die Aufgabe hat zwei Auflösungen, **eine Construction durch lineare Operationen allein ist nicht zu erwarten.**" **) Ich gestehe, dass mir diese letztere Bemerkung nicht recht verständlich ist und etwas voreilig oder unüberlegt zu sein scheint. Verstehe ich aber dieselbe recht, so muss ich — jede Aufklärung übrigens gern acceptirend — annehmen, dass Herr Fiedler von Newton's berühmtem und wahrhaft unsterblichem Werke, als er obige Bemerkung niederschrieb, gar keine nähere Kenntniss gehabt hat. Denn die von Newton gegebene Construction nimmt in der Tat nur lineare Operationen in Anspruch, wenigstens solche, von denen bei Lösungen von Aufgaben über die Beschreibung von gewissen Bedingungen entsprechenden Kegelschnitten, die keine organischen sind, überhaupt nur die Rede sein kann.

Ob ferner, wenn Herr Fiedler am obigen Orte sagt: „Die Aufgabe hat zwei Auflösungen", damit gesagt sein soll, dass die Aufgabe immer wirklich zwei Auflösungen zulasse, muss ich dahin gestellt sein lassen, glaube aber — indem ich auf meine vorhergehende Abhandlung verweise — dass wenigstens eine vorsichtigere Ausdrucksweise wohl anzuraten gewesen sein möchte.

---

§. 1.

Ich will in diesem Paragraphen zuerst einen übrigens schon bekannten allgemeinen Satz von den Kegelschnitten analytisch in völliger Allgemeinheit beweisen, der zwar zu der Aufgabe, mit der wir uns hier beschäftigen wollen, nicht in unmittelbarer Beziehung steht, der aber von den Commentatoren des berühmten Newton'schen Werks bei dem Beweise eines anderen merkwürdigen Satzes von den Kegelschnitten, auf dem die Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe vorzüglich beruhet, in Anwendung gebracht worden ist, in einer Weise jedoch, die mir weitläufig und selbst nicht allgemein genug zu sein scheint, weshalb ich auch im Folgenden von dieser Beweisführung keinen Gebrauch gemacht habe.

---

*) natürlich.

**) In der zweiten Ausgabe (Leipzig. 1866. S. 574.) des genannten Werks lauten diese letzteren, hier durch grössere Schrift ausgezeichneten Worte, auf die es hier allein ankommt, in wenig anderer Fassung wie folgt: „Weil zwei Auflösungen dem Problem entsprechen, so kann eine lineare Construction für dasselbe nicht erwartet werden."

Die Gleichung eines Kegelschnitts in rechtwinkligen Coordinaten sei:

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0.$$

Ein beliebiger Punkt sei (fg). Setzt man:

$$x=f+(x-f),\quad y=g+(y-g);$$

so wird die Gleichung des Kegelschnitts:

$$A\{f+(x-f)\}^2+B\{g+(y-g)\}^2+2C\{f+(x-f)\}\{g+(y-g)\}$$
$$+2D\{f+(x-f)\}+2E\{g+(y-g)\}+F=0,$$

und folglich, wenn man der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}&=A,\\ \mathfrak{B}&=B,\\ \mathfrak{C}&=C,\\ \mathfrak{D}&=Af+D,\\ \mathfrak{E}&=Bg+E,\\ \mathfrak{F}&=Af^2+Bg^2+2Cfg+2Df+2Eg+F\end{aligned}$$

setzt:

$$\mathfrak{A}(x-f)^2+\mathfrak{B}(y-g)^2+2\mathfrak{C}(x-f)(y-g)+2\mathfrak{D}(x-f)+2\mathfrak{E}(y-g)+\mathfrak{F}=0.$$

Durch den Punkt (fg) lege man eine beliebige Gerade [1], deren Gleichung

$$y-g=G(x-f)$$

sein mag, und bezeichne deren Durchschnittspunkte*) mit dem Kegelschnitte durch (XY), so hat man zur Bestimmung der Coordinaten X, Y die Gleichungen:

$$Y-g=G(X-f),$$

$$\mathfrak{A}(X-f)^2+\mathfrak{B}(Y-g)^2+2\mathfrak{C}(X-f)(Y-g)$$
$$+2\mathfrak{D}(X-f)+2\mathfrak{E}(Y-g)+\mathfrak{F}=0,$$

woraus sich die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}+2\mathfrak{C}G+\mathfrak{B}G^2)(X-f)^2+2(\mathfrak{D}+\mathfrak{E}G)(X-f)+\mathfrak{F}=0,$$

also offenbar, wenn man der Kürze wegen

$$M=-\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{E}G}{\mathfrak{A}+2\mathfrak{C}G+\mathfrak{B}G^2},\qquad N=\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}+2\mathfrak{C}G+\mathfrak{B}G^2}$$

setzt:

---

*) Es wird angenommen, dass die Gerade den Kegelschnitt schneide, was hier auch in Bezug auf Einiges im Folgenden bemerkt wird.

$$X-f = \quad M \pm \sqrt{M^2-N},$$
$$Y-g = G(M \pm \sqrt{M^2-N})$$

ergiebt.

Durch einen zweiten Punkt $(f'g')$ lege man eine zweite der ersten Geraden [1] parallele Gerade [2], deren Gleichung

$$y-g' = G(x-f')$$

sein mag, und bezeichne deren Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte durch $(X'Y')$, so ist ganz wie vorher, wenn man

$$\mathfrak{A}' = A,$$
$$\mathfrak{B}' = B,$$
$$\mathfrak{C}' = C,$$
$$\mathfrak{D}' = Af'+D,$$
$$\mathfrak{E}' = Bg'+E,$$
$$\mathfrak{F}' = Af'^2+Bg'^2+2Cf'g'+2Df'+2Eg'+F$$

und

$$M' = -\frac{\mathfrak{D}'+\mathfrak{E}'G}{\mathfrak{A}'+2\mathfrak{C}'G+\mathfrak{B}'G^2}, \quad N' = \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{A}'+2\mathfrak{C}'G+\mathfrak{B}'G^2}$$

setzt:

$$X'-f' = \quad M' \pm \sqrt{M'^2+N'},$$
$$Y'-g' = G(M' \pm \sqrt{M'^2+N'}).$$

Nun lege man durch die Punkte (fg) und $(f'g')$ eine dritte Gerade [3], deren Gleichung, wenn wir

$$G_1 = \frac{g-g'}{f-f'}$$

setzen:

$$y-g = G_1(x-f) \quad \text{oder} \quad y-g' = G_1(x-f')$$

ist. Bezeichnet man die Durchschnittspunkte dieser dritten Geraden [3] mit dem Kegelschnitte durch $(X_1 Y_1)$, so ist, wenn wir

$$M_1 = -\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{E}G_1}{\mathfrak{A}+2\mathfrak{C}G_1+\mathfrak{B}G_1^2}, \quad N_1 = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}+2\mathfrak{C}G_1+\mathfrak{B}G_1^2}$$

und

$$M_1' = -\frac{\mathfrak{D}'+\mathfrak{E}'G_1}{\mathfrak{A}'+2\mathfrak{C}'G_1+\mathfrak{B}'G_1^2}, \quad N_1' = \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{A}'+2\mathfrak{C}'G_1+\mathfrak{B}'G_1^2}$$

setzen, ganz wie vorher:

$$X_1-f = \quad M_1 \pm \sqrt{M_1^2-N_1},$$
$$Y_1-g = G_1(M_1 \pm \sqrt{M_1^2-N_1})$$

und

$$X_1 - f' = \quad M_1' \pm \sqrt{M_1'^2 - N_1'},$$
$$Y_1 - g' = G_1(M_1' \pm \sqrt{M_1'^2 - N_1'}).$$

Bezeichnen wir nun die Entfernungen des Punktes (fg) von den Durchschnittspunkten der durch diesen Punkt gelegten Geraden [1] mit dem Kegelschnitte durch P, Q; ferner die Entfernungen des Punktes $(f'g')$ von den Durchschnittspunkten der durch diesen Punkt parallel mit der Geraden [1] gelegten Geraden [2] mit dem Kegelschnitte durch P', Q'; so ist nach dem Obigen offenbar:

$$P^2Q^2 = (1+G^2)^2N^2, \quad P'^2Q'^2 = (1+G^2)^2N'^2.$$

Bezeichnen wir ferner die Entfernungen des Punktes (fg) von den Durchschnittspunkten der Geraden [3] mit dem Kegelschnitte durch P_1, Q_1; die Entfernungen des Punktes $(f'g')$ von denselben Durchschnittspunkten durch P_1', Q_1'; so ist nach dem Obigen offenbar:

$$P_1{}^2Q_1{}^2 = (1+G_1{}^2)^2N_1{}^2, \quad P_1'^2Q_1'^2 = (1+G_1{}^2)^2N_1'^2.$$

Hiernach ist also:

$$\frac{P^2Q^2}{P'^2Q'^2} = \frac{N^2}{N'^2}, \quad \frac{P_1{}^2Q_1{}^2}{P_1'^2Q_1'^2} = \frac{N_1{}^2}{N_1'^2}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen, weil

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = A,$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = B,$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}' = C;$$

also:

$$\mathfrak{A} + 2\mathfrak{C}G + \mathfrak{B}G^2 = \mathfrak{A}' + 2\mathfrak{C}'G + \mathfrak{B}'G^2$$

ist:

$$\frac{N}{N'} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}'} \quad \text{und} \quad \frac{N_1}{N_1'} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}'},$$

folglich:

$$\frac{N^2}{N'^2} = \frac{N_1{}^2}{N_1'^2} = \frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{F}'^2},$$

und daher nach dem Obigen:

$$\frac{P^2Q^2}{P'^2Q'^2} = \frac{P_1{}^2Q_1{}^2}{P_1'^2Q_1'^2} = \frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{F}'^2},$$

also:

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{P_1Q_1}{P_1'Q_1'} = \text{val. abs. } \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}'},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{P_1Q_1}{P_1'Q_1'} = \text{val. abs. } \frac{Af^2 + Bg^2 + 2Cfg + 2Df + 2Eg + F}{Af'^2 + Bg'^2 + 2Cf'g' + 2Df' + 2Eg' + F}.$$

Also ist stets:

$$PQ : P'Q' = P_1Q_1 : P_1'Q_1',$$

was auf den folgenden, übrigens längst bekannten Satz führt:

Wenn zwei parallele Sehnen eines Kegelschnitts von einer dritten Sehne desselben geschnitten werden, so sind die Producte der Entfernungen der Durchschnittspunkte dieser dritten Sehne mit den beiden ersten einander parallelen Sehnen von den entsprechenden Durchschnittspunkten der letzteren mit dem Kegelschnitte proportional den Producten der entsprechenden Entfernungen der Durchschnittspunkte der beiden parallelen Sehnen mit der dritten dieselben schneidenden Sehne von den Durchschnittspunkten der letzteren mit dem Kegelschnitte.

In Fig. I., wo die Gerade MN den Kegelschnitt in den Punkten A und A' schneidet, ist also:

$$AB.A'B : AC.A'C = BB'.BB'' : CC'.CC''.$$

Lässt man nun, wie in Fig. II., die in Fig. I. den Kegelschnitt in den Punkten A und A' schneidende Gerade MN in eine denselben Berührende übergehen, so fallen die Punkte A und A' zusammen, und die obige Proportion geht in die Proportion

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BB'.BB'' : CC'.CC''$$

über.

Aus diesen Sätzen haben, wie schon oben bemerkt, die Commentatoren der Newton'schen Principien einen anderen Satz abgeleitet, auf den es bei der Beschreibung eines Kegelschnitts, der durch vier gegebene Punkte geht und eine der Lage nach gegebene Gerade berührt, eigentlich ankommt. Da mir aber diese Ableitung, wie gleichfalls schon erinnert, etwas weitläufig und nicht allgemein genug zu sein scheint, so habe ich es vorgezogen, im folgenden Paragraphen für den in Rede stehenden Satz einen selbstständigen analytischen Beweis zu geben.

§. 2.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts zwischen rechtwinkligen Coordinaten sei:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Ist nun $(\xi\eta)$ ein beliebiger Punkt dieses Kegelschnitts, so ist bekanntlich die Gleichung der Berührenden desselben in diesem Punkte:

$$(A\xi + C\eta + D)x + (B\eta + C\xi + E)y + D\xi + E\eta + F = 0.$$

Denken wir uns nun aber diese Berührende als Axe der x angenommen, so ist ihre Gleichung

$$y = 0,$$

folglich:

$$A\xi + C\eta + D = 0, \quad D\xi + E\eta + F = 0;$$

und nehmen wir nun den Punkt $(\xi\eta)$ als Anfang der Coordinaten an, so ist $\xi = 0$, $\eta = 0$; also:

$$D = 0, \quad F = 0;$$

folglich die Gleichung des Kegelschnitts:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Ey = 0.$$

Zwei Punkte in der Berührenden, welche jetzt die Axe der x ist mit dem Berührungspunkte als Anfangspunkt der Coordinaten, seien $(f0)$ und $(f'0)$; durch diese Punkte seien zwei Gerade gezogen, deren Gleichungen beziehungsweise

$$y = K(x-f) \quad \text{und} \quad y = K'(x-f')$$

sein mögen.

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden durch (XY), so hat man zur Bestimmung der Coordinaten X, Y desselben die Gleichungen:

$$Y = K(X-f), \quad Y = K'(X-f');$$

worans sich leicht:

$$X = \frac{Kf - K'f'}{K-K'},$$

also:

$$X-f = \frac{K'(f-f')}{K-K'}, \quad X-f' = \frac{K(f-f')}{K-K'};$$

folglich:

$$Y = \frac{KK'(f-f')}{K-K'}$$

ergiebt; und setzen wir also der Kürze wegen jetzt

$$F = \frac{Kf - K'f'}{K-K'}, \qquad G = \frac{KK'(f-f')}{K-K'};$$

so ist:

$$X = F, \quad Y = G;$$

und der Durchschnittspunkt unserer beiden Geraden kann also im Folgenden durch (FG) bezeichnet werden.

Bezeichnen wir die Durchschnittspunkte der durch den Punkt $(f0)$ gelegten Geraden mit dem Kegelschnitte durch $(X_1 Y_1)$, so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten X_1, Y_1 die Gleichungen:

$$Y_1 = K(X_1 - f),$$
$$AX_1^2 + BY_1^2 + 2CX_1Y_1 + 2EY_1 = 0.$$

Setzen wir

$$X_1 = f + (X_1 - f),$$

so wird die zweite Gleichung, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{A} = Af, \quad \mathfrak{B} = Cf + E, \quad \mathfrak{C} = Af^2$$

gesetzt wird:

$$A(X_1 - f)^2 + BY_1^2 + 2C(X_1 - f)Y_1 + 2\mathfrak{A}(X_1 - f) + 2\mathfrak{B}Y_1 + \mathfrak{C} = 0,$$

und man erhält also, wenn man in dieser Gleichung

$$Y_1 = K(X_1 - f)$$

setzt, zur Bestimmung von $X_1 - f$ die Gleichung

$$(A + 2CK + BK^2)(X_1 - f)^2 + 2(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}K)(X_1 - f) + \mathfrak{C} = 0,$$

mittelst welcher sich, wenn der Kürze wegen

$$M = -\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}K}{A + 2CK + BK^2}, \qquad N = \frac{\mathfrak{C}}{A + 2CK + BK^2}$$

gesetzt wird:

$$X_1 - f = \quad M \pm \sqrt{M^2 - N},$$
$$Y_1 = K(M \pm \sqrt{M^2 - N})$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die Durchschnittspunkte der durch den Punkt $(f'0)$ gelegten Geraden mit dem Kegelschnitte durch $(X_1' Y_1')$, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{A}' = Af', \quad \mathfrak{B}' = Cf' + E, \quad \mathfrak{C}' = Af'^2$$

und

$$M' = -\frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'K'}{A + 2CK' + BK'^2}, \qquad N' = \frac{\mathfrak{C}'}{A + 2CK' + BK'^2}$$

gesetzt wird, auf ganz ähnliche Art wie vorher:

$$X_1' - f' = \quad M' \pm \sqrt{M'^2 - N'},$$
$$Y_1' = K'(M' \pm \sqrt{M'^2 - N'}).$$

Hiernach ist:

$$(X_1 - f)^2 + Y_1^2 = (1 + K^2)(M \pm \sqrt{M^2 - N})^2,$$
$$(X_1' - f')^2 + Y_1'^2 = (1 + K'^2)(M' \pm \sqrt{M'^2 - N'})^2;$$

und bezeichnen wir also die Entfernungen des Punktes $(f0)$ von den beiden Durchschnittspunkten der durch ihn gelegten Geraden $y = K(x-f)$ mit dem Kegelschnitte durch P, Q; die Entfernungen des Punktes $(f'0)$ von den beiden Durchschnittspunkten der durch ihn gelegten Geraden $y = K'(x-f')$ mit dem Kegelschnitte durch P', Q'; so ist nach den vorstehenden Formeln offenbar:

$$P^2 Q^2 = (1+K^2)^2 (M+\sqrt{M^2-N})^2 (M-\sqrt{M^2-N})^2,$$
$$P'^2 Q'^2 = (1+K'^2)^2 (M'+\sqrt{M'^2-N'})^2 (M'-\sqrt{M'^2-N'})^2;$$

also:

$$P^2Q^2 = (1+K^2)^2 N^2, \quad P'^2Q'^2 = (1+K'^2)^2 N'^2.$$

Die Gleichung der durch den Punkt $(f0)$ gelegten Geraden $y = K(x-f)$ lässt sich offenbar auch auf folgende Art ausdrücken:

$$y - G = K(x-F),$$

und bezeichnen wir nun die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte durch $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die Gleichungen:

$$\mathfrak{Y} - G = K(\mathfrak{X} - F),$$
$$A\mathfrak{X}^2 + B\mathfrak{Y}^2 + 2C\mathfrak{X}\mathfrak{Y} + 2E\mathfrak{Y} = 0.$$

Setzt man:

$$\mathfrak{X} = F + (\mathfrak{X} - F), \quad \mathfrak{Y} = G + (\mathfrak{Y} - G);$$

so wird die zweite Gleichung:

$$A(\mathfrak{X}-F)^2 + B(\mathfrak{Y}-G)^2 + 2C(\mathfrak{X}-F)(\mathfrak{Y}-G)$$
$$+2(AF+CG)(\mathfrak{X}-F) + 2(BG+CF+E)(\mathfrak{Y}-G)$$
$$+AF^2 + BG^2 + 2CFG + 2EG = 0,$$

also, wenn man

$$\mathfrak{Y} - G = K(\mathfrak{X} - F)$$

und der Kürze wegen

$$\mathfrak{A}_1 = AF + CG,$$
$$\mathfrak{B}_1 = BG + CF + E,$$
$$\mathfrak{C}_1 = AF^2 + BG^2 + 2CFG + 2EG$$

setzt:

$$(A + 2CK + BK^2)(\mathfrak{X}-F)^2 + 2(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 K)(\mathfrak{X}-F) + \mathfrak{C}_1 = 0,$$

woraus sich, wenn

$$M_1 = -\frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 K}{A + 2CK + BK^2}, \quad N_1 = \frac{\mathfrak{C}_1}{A + 2CK + BK^2}$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{X}-F=M_1\pm\sqrt{M_1^2-N_1},$$
$$\mathfrak{Y}-G=K(M_1\pm\sqrt{M_1^2-N_1})$$

ergiebt.

Die Gleichung der durch den Punkt $(f'0)$ gelegten Geraden $y=K'(x-f')$ lässt sich auch auf folgende Art ausdrücken:

$$y-G=K'(x-F),$$

und wenn man nun die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte durch $(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}')$ bezeichnet, und der Kürze wegen

$$\mathfrak{A}_1'=AF+CG,$$
$$\mathfrak{B}_1'=BG+CF+E,$$
$$\mathfrak{C}_1'=AF^2+BG^2+2CFG+2EG$$

und

$$M_1'=-\frac{\mathfrak{A}_1'+\mathfrak{B}_1'K'}{A+2CK'+BK'^2},\quad N_1'=\frac{\mathfrak{C}_1'}{A+2CK'+BK'^2}$$

setzt, so erhält man auf ganz ähnliche Art wie vorher!

$$\mathfrak{X}'-F=M_1'\pm\sqrt{M_1'^2-N_1'},$$
$$\mathfrak{Y}'-G=K'(M_1'\pm\sqrt{M_1'^2-N_1'}).$$

Hiernach ist:

$$(\mathfrak{X}-F)^2+(\mathfrak{Y}-G)^2=(1+K^2)(M_1\pm\sqrt{M_1^2-N_1})^2,$$
$$(\mathfrak{X}'-F)^2+(\mathfrak{Y}'-G)^2=)1+K'^2)(M_1'\pm\sqrt{M_1'^2-N_1'})^2;$$

und bezeichnen wir nun die Entfernungen des Punktes (FG) von den Durchschnittspunkten der durch den Punkt $(f0)$ gelegten Geraden $y=K(x-f)$ mit dem Kegelschnitte durch P_1, Q_1; die Entfernungen des Punktes (FG) von den Durchschnittspunkten der durch den Punkt $(f'0)$ gelegten Geraden $y=K'(x-f')$ mit dem Kegelschnitte durch P_1', Q_1'; so ist offenbar nach dem Obigen:

$$P_1^2Q_1^2=(1+K^2)^2(M_1+\sqrt{M_1^2-N_1})^2(M_1-\sqrt{M_1^2-N_1})^2,$$
$$P_1'^2Q_1'^2=(1+K'^2)^2(M_1'+\sqrt{M_1'^2-N_1'})^2(M_1'-\sqrt{M_1'^2-N_1'})^2;$$
$$P_1^2Q_1^2=(1+K^2)^2N_1^2,\quad P_1'^2Q_1'^2=(1+K'^2)^2N_1'^2.$$

Nach allem Vorhergehenden ist nun:

$$\frac{P^2Q^{2\prime}}{P'^2Q'^2}=\frac{(1+K^2)^2}{(1+K'^2)^2}\cdot\frac{N^2}{N'^2},\quad\frac{P_1^2Q_1^2}{P_1'^2Q_1'^2}=\frac{(1+K^2)^2}{(1+K'^2)^2}\cdot\frac{N_1^2}{N_1'^2};$$

also:

$$\frac{P^2Q^2}{P'^2Q'^2}:\frac{P_1^2Q_1^2}{P_1'^2Q_1'^2}=\frac{N^2}{N'^2}:\frac{N_1^2}{N_1'^2}.$$

Nach dem Obigen ist aber:

$$\frac{N}{N'} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}'} \cdot \frac{A + 2CK' + BK'^2}{A + 2CK + BK^2},$$

$$\frac{N_1}{N_1'} = \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1'} \cdot \frac{A + 2CK' + BK'^2}{A + 2CK + BK^2};$$

folglich:

$$\frac{N^2}{N'^2} : \frac{N_1^2}{N_1'^2} = \left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}'}\right)^2 : \left(\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1'}\right)^2;$$

also:

$$\frac{P^2\,Q^2}{P'^2Q'^2} : \frac{P_1^2\,Q_1^2}{P_1'^2Q_1'^2} = \left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}'}\right)^2 : \left(\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1'}\right)^2.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}'} = \frac{Af^2}{Af'^2} = \frac{f^2}{f'^2}, \quad \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1'} = 1;$$

also:

$$\frac{P^2\,Q^2}{P'^2Q'^2} : \frac{P_1^2\,Q_1^2}{P_1'^2Q_1'^2} = \frac{f^4}{f'^4} : 1 = f^4 : f'^4;$$

folglich:

$$f^2 : f'^2 = \frac{P\,Q}{P'Q'} : \frac{P_1\,Q_1}{P_1'Q_1'}$$

oder

$$f^2 : f'^2 = PQ \,.\, P_1'Q_1' : P'Q' \,.\, P_1Q_1,$$

und wenn man die absoluten Werte von f, f' durch (f), (f') bezeichnet:

$$(f) : (f') = \sqrt{PQ \,.\, P_1'Q_1'} : \sqrt{P'Q' \,.\, P_1Q_1},$$

oder

$$(f) : (f') = \sqrt{PQ} \,.\, \sqrt{P_1'Q_1'} : \sqrt{P'Q'} \,.\, \sqrt{P_1\,Q_1}.$$

Bezeichnet man die mittleren Proportionallinien

$$\sqrt{PQ}, \quad \sqrt{P'Q'}, \quad \sqrt{P_1Q_1}, \quad \sqrt{P_1'Q_1'}$$

zwischen

$$P,\ Q; \quad P',\ Q'; \quad P_1,\ Q_1; \quad P_1',\ Q_1'$$

beziehungsweise durch

$$\Pi, \quad \Pi', \quad \Pi_1, \quad \Pi_1';$$

so ist:

$$(f) : (f') = \Pi\,\Pi_1' : \Pi'\,\Pi_1,$$

wo $\Pi\Pi_1'$ und $\Pi'\Pi_1$ zwei durch die mittleren Proportionallinien Π, Π_1' und Π', Π_1 bestimmte Rechtecke sind.

Um überhaupt das Verhältniss zweier Rechtecke

$$R = ab, \quad R' = a'b'$$

durch Linien darzustellen, nehme man eine Linie λ von beliebiger Länge an, und suche die vierte Proportionallinie x' zu a, a', λ und die vierte Proportionallinie x zu b', b, λ; so ist:

$$a : a' = \lambda : x',$$

$$b' : b = \lambda : x;$$

also:

$$\frac{a}{b'} : \frac{a'}{b} = 1 : \frac{x'}{x},$$

folglich:

$$ab : a'b' = x : x'.$$

Will man also das Verhältniss der Rechtecke $\Pi\Pi_1$, $\Pi'\Pi_1$ durch Linien darstellen, so nimmt man eine Linie λ von beliebiger Länge an, und sucht die vierten Proportionallinien L' und L zu Π, Π', λ und Π_1, Π_1', λ; dann ist:

$$\Pi\Pi_1' : \Pi'\Pi_1 = L : L',$$

sogleich nach dem Obigen:

$$(f) : (f') : L : L'.$$

Wenn die durch den Punkt $(f0)$ gelegte Gerade den Kegelschnitt berührt, die durch den Punkt $(f'0)$ gelegte Gerade ihn schneidet, so ist $P = Q$, $P_1 = Q_1$; also:

$$f^2 : f'^2 = P^2 . P_1'Q_1' : P_1^2 . P'Q' = \frac{P^2}{P_1^2} : \frac{P'\,Q'}{P_1'\,Q_1'},$$

oder:

$$(f) : (f') = \frac{P}{P_1} : \frac{\sqrt{P'\,Q'}}{\sqrt{P_1'\,Q_1'}}.$$

Wenn die beiden durch die Punkte $(f0)$ und $(f'0)$ gelegten Geraden den Kegelschnitt berühren, so ist $P = Q$, $P_1 = Q_1$ und $P' = Q'$, $P_1' = Q_1'$; also:

$$f^2 : f'^2 = P^2 P_1'^2 : P'^2 P_1^2 = \frac{P^2}{P'^2} : \frac{P_1^2}{P_1'^2} = \frac{P^2}{P_1^2} : \frac{P'^2}{P_1'^2},$$

oder:

$$(f) : (f') = PP_1' : P'P_1 = \frac{P}{P'} : \frac{P_1}{P_1'} = \frac{P}{P_1} : \frac{P'}{P_1'}.$$

Wenn drei in den Punkten A, B, C sich schneidende gerade Linien AB, BC, CA (Fig. III.) einen Kegelschnitt beziehungsweise in den Punkten C', A', B' berühren, so ist:

$$A'B : A'C = \frac{C'B}{B'C} : \frac{C'A}{B'A},$$

$$B'C : B'A = \frac{A'C}{C'A} : \frac{A'B}{C'B},$$

$$C'A : C'B = \frac{B'A}{A'B} : \frac{B'C}{A'C};$$

also durch Multiplication oder Zusammensetzung dieser Proportionen:

$$A'B . B'C . C'A : A'C . B'A . C'B$$
$$= \frac{A'C . B'A . C'B}{A'B . B'C . C'A} : \frac{A'B . B'C . C'A}{A'C . B'A . C'B},$$

und hieraus:

$$\frac{\overline{A'B}^2 \cdot \overline{B'C}^2 \cdot \overline{C'A}^2}{A'C . B'A . C'B} = \frac{\overline{A'C}^2 \cdot \overline{B'A}^2 \cdot \overline{C'B}^2}{A'B . B'C . C'A},$$

folglich:

$$\overline{A'B}^3 \cdot \overline{B'C}^3 \cdot \overline{C'A}^3 = \overline{A'C}^3 \cdot \overline{B'A}^3 \cdot \overline{C'B}^3,$$

also:

$$A'B . B'C . C'A = A'C . B'A . C'B$$

oder:

$$AB' . BC' . CA' = AC' . BA' . CB'.$$

§. 3.

Indem wir uns zu der Aufgabe, um die es sich in dieser Abhandlung handelt, wenden, so bemerken wir, dass Newton (Lib. I. Propositio XXIII. Problema XV.) zuerst den Fall betrachtet, wenn (Fig. IV.) drei Punkte A^3, A^4, A^5 und in der ihrer Lage nach gegebenen Geraden MN der Punkt A^2 gegeben sind, und ein Kegelschnitt beschrieben werden soll, welcher durch die drei gegebenen Punkte A^3, A^4, A^5 gehen und die ihrer Lage nach gegebene Gerade MN in dem in derselben gegebenen Punkte A^2 berühren soll.

Wenn wir in der Figur Fig. I. den Punkt A^1 unendlich nahe bei dem Punkte A^2 annehmen und durch die Punkte A^1, A^2, A^3, A^4, A^5 uns den durch diese Punkte gehenden Kegelschnitt beschrieben denken, so wird die Gerade A^1A^2 eine unendlich kleine Sehne desselben, welche in dem Grenzfalle, wenn nämlich der Punkt A^1 mit dem Punkte A^2 vollständig zusammenfällt, in die den Kegelschnitt in dem Punkte A^2 Berührende übergeht, wodurch man nach der Abhandlung Nr. XXVIII. i. vor. T. unmittelbar zu der folgenden Beschreibung des durch die drei gegebenen Punkte A^3, A^4, A^5 gehenden und die ihrer Lage nach gegebene Gerade MN in dem in derselben gegebenen Punkte A^2 berührenden Kegelschnitts geführt wird, wobei ich mich, so weit es angeht, ganz derselben Bezeichnungen wie in der genannten Abhandlung bedienen werde.

Durch den gegebenen Punkt A^4 lege man mit der gegebenen Geraden MN die Parallele $A_1^1A_1^2$, und mit der gegebenen Geraden A^2A^3 die Parallele $A_1^2A_1^3$. Die Gerade $A_1^1A_1^2$ werde von der Geraden A^2A^5 in B^1, die Gerade $A_1^2A_1^3$ werde von der Geraden A^3A^5 in B^3 geschnitten. Zieht man nun eine beliebige der Geraden B^1B^3 parallele Gerade, welche die Gerade $A_1^1A_1^2$ in B_1^1, die Gerade $A_1^2A_1^3$ in B_1^3 schneidet, und zieht endlich die Geraden $A^2B_1^1$ und $A^3B_1^3$, welche sich in dem Punkte A^6 schneiden, so ist der Punkt A^6 ein Punkt des zu beschreibenden Kegelschnitts, für welchen sich auf diese Weise beliebig viele Punkte bestimmen lassen, und dadurch also der Kegelschnitt beschrieben werden kann.

§. 4.

Ferner wollen wir nun annehmen*), dass vier Punkte A, B, A', B' und der Lage nach eine beliebige Gerade MN gegeben seien, und ein Kegelschnitt beschrieben werden solle, welcher durch die vier Punkte A, B, A', B' geht und die Gerade MN berührt.

Unter der Voraussetzung, dass es einen dieser Aufgabe genügenden Kegelschnitt giebt, worüber nach dem in der vorhergehenden Abhandlung bewiesenen Kriterium aus der blossen Anschauung der vorliegenden Figur immer leicht ein bestimmtes Urteil gefällt werden kann, denke man sich diesen Kegelschnitt wirklich beschrieben, und bezeichne seine Berührungspunkte mit der gegebenen Geraden MN im Allgemeinen durch C.

Ziehen wir nun die beiden Geraden AB, $A'B'$ und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit G, ihre Durchschnittspunkte mit der Geraden MN aber beziehungsweise durch K, K'; so ist nach dem in §. 2. bewiesenen Satze:

$$CK : CK' = \sqrt{AK.BK} \,.\, \sqrt{A'G.B'G} : \sqrt{A'K'.B'K'} \,.\, \sqrt{AG.BG}$$

oder:

$$CK : CK' = \sqrt{AK.BK} \,.\, \sqrt{A'G.B'G} : \sqrt{AG.BG} \,.\, \sqrt{A'K'.B'K'}.$$

Für die Punkte C in der Geraden MN ist also das Verhältniss der Entfernungen CK und CK' von den beiden gegebenen Punkten K und K' in der Linie MN ein bekanntes oder gegebenes, nämlich das Verhältniss

$$\sqrt{AK.BK} \,.\, \sqrt{A'G.B'G} : \sqrt{AG.BG} \,.\, \sqrt{A'K'.B'K'},$$

---

*) Fig. V. dient zur Erläuterung.

welches Verhältniss durch elementare Constructionen immer durch ein Verhältniss zweier Geraden dargestellt werden kann, wie schon im §. 2. ausführlich gezeigt worden ist.

Bezeichnen wir diese beiden Geraden beziehungsweise durch a, a', so dass also

$$a : a' = \sqrt{AK.BK}\,.\,\sqrt{A'G.B'G} : \sqrt{AG.BG} : \sqrt{A'K'.B'K'}$$

ist, so ist C in MN so zu bestimmen, dass

$$CK : CK' = a : a'$$

ist.

Rücksichtlich der Lage von C in MN gegen die beiden Punkte K und K' in derselben Geraden sind die drei in Fig. VI. (I). (II). (III). dargestellten Fälle möglich.

In dem Falle (I). ist:

$$CK : CK' = a : a';$$

$$CK : KK' - CK = a : a',$$
$$KK' - CK' : CK' = a : a';$$

$$a.(KK' - CK) = a'.CK,$$
$$a'.(KK' - CK') = a.CK';$$

woraus sogleich

$$CK = \frac{a}{a+a'}.KK', \quad CK' = \frac{a'}{a+a'}.KK'$$

folgt und erhellet, dass der Punkt C zwischen K und K' immer so bestimmt werden kann, dass

$$CK : CK' = a : a'$$

ist.

In dem Falle (II). ist:

$$CK : CK' = a : a';$$

$$CK : CK + KK' = a : a',$$
$$CK' - KK' : CK' = a : a';$$

$$a.(CK + KK') = a'.CK',$$
$$a'.(CK' - KK') = a.CK';$$

woraus sogleich

$$CK = \frac{a}{a'-a}.KK', \quad CK' = \frac{a'}{a'-a}.KK'$$

folgt, und erhellet, dass der Punkt C in der Verlängerung von KK' über K hinaus nur dann so bestimmt werden kann, dass

$$CK : CK' = a : a'$$

ist, wenn $a < a'$, also, wie es hier erforderlich ist, $a' - a$ positiv ist.

In dem Falle (III). ist:

$$CK : CK' = a : a';$$

$$CK : CK - KK' = a : a',$$
$$CK' + KK' : CK' = a : a';$$

$$a.(CK - KK') = a'.CK,$$
$$a'.(CK' + KK') = a.CK';$$

woraus sogleich

$$CK = \frac{a}{a - a'}.KK', \quad CK' = \frac{a'}{a - a'}.KK'$$

folgt, und erhellet, dass der Punkt C in der Verlängerung von KK' über K' hinaus nur dann so bestimmt werden kann, dass

$$CK : CK' = a : a'$$

ist, wenn $a > a'$, also, wie es hier erforderlich ist, $a - a'$ positiv ist.

Da nun von den Fällen (II). und (III). immer nur der eine eintreten kann, aber auch immer der eine eintreten muss, so erhellet aus dem Vorhergehenden, dass sich in der Geraden MN immer zwei, aber auch immer nur zwei Punkte C so bestimmen lassen, dass

$$CK : CK' = a : a'$$

ist, und diese beiden Punkte müssen also mit den zwei Berührungspunkten der durch die vier Punkte A, B, A', B' gehenden und die Gerade MN berührenden Kegelschnitte mit dieser Geraden, wenn es überhaupt solche Kegelschnitte giebt, notwendig zusammenfallen.

Man wird also die zu bestimmenden Kegelschnitte erhalten, wenn man durch die vier gegebenen Punkte A, B, A', B' und je einen der durch das Vorhergehende in der Geraden MN bestimmten beiden Punkte C einen Kegelschnitt beschreibt, wozu u. A. die Abhandlung Nr. XXVIII. i. vor. T. eine sehr bemerkenswerte Methode liefert.

Man kann aber auch nach §. 3. Kegelschnitte beschreiben, welche durch drei der vier gegebene Punkte A, B, A', B' gehen und die Gerade MN in je einem der zwei Punkte C berühren.

Man sieht aber, dass die vorhergehende Beweisführung offenbar nur dann ihre Gültigkeit behält, wenn die Beschreibung durch die vier gegebenen Punkte gehender und die gegebene Gerade berührender Kegelschnitte möglich, wenn man von der wirklichen Existenz oder Realität solcher Kegelschnitte versichert ist*), worüber nach den Principien der vorhergehenden Abhandlung entschieden werden kann und entschieden werden muss**).

Wie sind nun mit den vorhergehenden schönen Constructionen des grossen Newton Aussprüche wie „Eine Construction durch lineare Operationen allein ist nicht zu erwarten“ und „Die Aufgabe hat zwei Auflösungen“ zusammenzureimen?

Freilich sagt Newton selbst a. a. O.: „Capi autem potest punctum A vel inter puncta H et J***), vel extra; et perinde trajectoria dupliciter describi.“

Bei der in seinem unsterblichen Werke überall herrschenden ungemein grosse Kürze, durch welche er — wie man sagt — neben der absichtlich von ihm gewählten durchweg synthetischen Darstellung, nachdem er seine grossartigen Resultate analytisch gefunden — den Mathematikern seiner Zeit imponiren und dieselben nötigen wollte, sich über seinen Untersuchungen die Köpfe zu zerbrechen, um dann

---

*) Die Bestimmung der Punkte C in der Linie MN nach den oben angegebenen geometrischen Bedingungen ist immer möglich; um aber behaupten zu können, dass der durch die fünf Punkte A, B, A', B', C beschriebene Kegelschnitt die Gerade MN in C wirklich berührt, muss man vorher versichert sein, dass sich durch die vier Punkte A, B, A', B' ein die Gerade MN berührender Kegelschnitt wirklich beschreiben lässt, man muss von der Existenz oder Realität eines solchen Kegelschnitts versichert sein.

**) Wie ungemein oft, namentlich auch in elementaren Schriften, gegen das bei mathematischen Untersuchungen überall zur Geltung kommende Princip, dass von Allem, was zur Untersuchung kommt oder wovon Anwendungen gemacht werden, immer vorzugsweise auch die Möglichkeit oder Realität bestimmt und streng nachgewiesen werden muss, arg gesündigt wird, liesse sich an vielen Beispielen leicht nachweisen, gehört indes jetzt nicht hierher; jedenfalls dürfte aber den Autoren solcher Schriften dringend zu raten sein, sich recht sorgfältig mit den Schriften der griechischen Geometer, dem in denselben herrschenden Geiste und der darin überall zur Anwendung gebrachten Methode bekannt zu machen, wenigstens den Elementen des Euklides das eingehendste Studium zu widmen.

***) Im Obigen beziehungsweise C und K und K'.

seine Grösse desto mehr anzustaunen, liess sich in der Tat hier, wie an so vielen andern Stellen, nicht mehr als eine solche ganz kurze Andeutung erwarten.

Ich wünsche, dass meine in dieser Abhandlung und in den beiden vorhergehenden angestellten Untersuchungen das Ihrige zu der richtigen Würdigung der schönen Newton'schen Constructionen beitragen mögen, und hoffe bald auf weitere ähnliche Untersuchen zurückzukommen.

II.

Ueber äquipotentiale Massenverteilungen.

Von

Husmann, Dr. phil.

Unter Zugrundelegung von Kräften, die nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze wirken, besitzt eine kugelförmige Masse, deren Dichte eine Function des Radius allein ist, in Bezug auf einen äusseren afficirten Punkt dasselbe Potential, wie ihr Mittelpunkt, wenn darin die ganze wirkende Masse concentrirt gedacht wird.

Es lässt sich also die eine Massenverteilung in ihrer Einwirkung auf Punkte, die ausserhalb der Kugel liegen, durch die andere ersetzen; man würde beide daher kurz als äquipotential in Bezug auf solche Punkte bezeichnen können. Dieser Umstand macht es möglich, irgend einen Körper in seiner Einwirkung auf äussere Punkte durch beliebig viele andere Massenverteilungen zu ersetzen. Man hat denselben nur in unendlich kleine Elemente zu zerlegen, um irgend welche derselben Kugeln von beliebigem Radius zu beschreiben und die Masse jedes einzelnen Elementes durch die zugehörige Kugel so zu verteilen, dass die Dichte in der letzteren eine Function des Radius ist. Dabei können in dieselben Raumelemente Massen von verschiedenen Kugeln fallen; hier werden sich die Dichten μ addiren. So wird ein jedes Raumelement eine um so grössere Dichte M haben, je grösser die Summe der Dichten der darin vorhandenen und der hineinfallenden Massen ist:

$$M = \Sigma\mu$$

Aus dieser Massenverteilung kann man umgekehrt durch Concentration wieder die erstere herleiten. Man würde eine solche Umlagerung passend als „äquipotentiale Massentransposition" bezeichnen können.

Im Folgenden sollen die einfachsten äquipotentialen Massentranspositionen untersucht werden. Da die Umlagerung der Masse des anziehenden Körpers mittels Kugeln nur dann vorgenommen werden

darf, wenn der afficirte Punkt ausserhalb der Transpositionskugel liegt, so werden wir uns auf die Fälle beschränken müssen, wo der afficirte Punkt ausserhalb der zu transponirenden Massen liegt, also auf die Potentiale für äussere Punkte. Es wird sich daher im Verlaufe der Untersuchung zunächst nur darum handeln, an die Stelle bestimmter Massenverteilungen andere zu setzen, die auf Punkte im ursprünglichen Aussenraume dasselbe Potential haben. Daran wird sich dann noch die Frage schliessen: Welches ist das Potential dieser Massen auf innere Punkte?

Wir wollen im Folgenden für die Dichten die nachstehenden Bezeichnungen gebrauchen:

ε für lineare,
μ für Flächen-,
δ oder Δ für räumliche Dichte.

§ 1.

Isolirte Massenpunkte.

Der Elementarkörper, aus dem man sämmtliche Körper aufbauen, worin man jeden zerlegen kann, ist das Massenelement. Sein Potential auf einen in der Entfernung r befindlichen Einheitspunkt ist:

$$P = C \cdot \frac{m}{r},$$

wo m seine Masse, C eine eigentümliche Anziehungsconstante bedeutet. Wird diese aus dem Potentialwerte der Erde bestimmt, so ergiebt sich:

$$C = -\frac{R^2}{M} \cdot g,$$

wo R den Radius, M die Masse der Erde, und g die Beschleunigung an der Erdoberfläche darstellt. Das Potential eines solchen Punktes P ist durch das eines anderen P_1 nicht weiter ersetzbar. Denn wählen wir den ersten Punkt zum Anfangspunkte eines orthogonalen Coordinatensystems, so ist sein Potential auf einen Punkt (xyz):

$$P = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

das Potential P_1 des zweiten Punktes (α, β, γ) auf denselben Punkt aber ist:

$$P_1 = \frac{k_1}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}};$$

in diesen Ausdrücken bedeuten k und k_1 zwei den zugehörigen Massen eigentümliche Constanten. Ist nun für jeden Punkt $(xyz): P = P_1$, so ergiebt sich durch Division und Quadrirung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \left(\frac{k}{k_1}\right)^2 . [(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] = 0$$

Diese Gleichung gilt nur dann für jedes xyz, wenn die Coefficienten der gleichen Potenzen dieser drei Variabeln übereinstimmen:

$$k^2 = k_1{}^2,$$

und:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0;$$

d. h.: wenn der zweite Punkt mit dem ersten zusammenfällt und dieselbe Constante hat.

Das Potential zweier Massenpunkte m_1 und m_2 auf den Punkt (xyz), von dem erstere die bezüglichen Entfernungen r_1 und r_2 haben, ist:

$$C . \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right).$$

Es fragt sich, ob sich dieses durch das Potential eines einzigen Punktes ersetzen lässt.

Wäre dies der Fall, so müsste selbiges die Form: $C . \frac{m}{r}$ haben und die Gleichung:

$$\frac{m}{r} = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$$

müsste für jeden beliebigen afficirten Punkt gelten, wo unter m die Masse und unter r die Entfernung des neuen Punktes von (xyz) verstanden ist. Für alle Punkte einer um m beschriebenen Kugelfläche vom Radius r' wäre:

$$\frac{m}{r'} = \text{const} = \left(\frac{m_1}{r_1{}'} + \frac{m_2}{r_2{}'}\right).$$

So würden für die Punkte 1 und 2 der Kugelfläche die Gleichungen bestehen:

$$\frac{m_1}{r_1{}^1} + \frac{m_2}{r_2{}^1} = \text{const}$$

und:

$$\frac{m_1}{r_1{}^2} + \frac{m_2}{r_2{}^2} = \text{const}$$

Subtrahiren wir jede dieser Gleichungen von der obigen, so ergiebt sich:

$$\text{A} \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} m_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1{}^1}\right)+m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2{}^1}\right)=0 \\ m_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1{}^2}\right)+m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2{}^2}\right)=0 \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen können, da m_1 und m_2 beliebig von Null verschieden angenommen werden können, nur dann bestehen, wenn ihre Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1{}^1}, & \frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2{}^1} \\ \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1{}^2}, & \frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2{}^2} \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{r_2{}^1}-\frac{1}{r_2{}^2}\right)+\frac{1}{r_2}\cdot\left(\frac{1}{r_1{}^2}-\frac{1}{r_1{}^1}\right)+\frac{1}{r_1{}^1 r_2{}^2}-\frac{1}{r_1{}^2 r_2{}^1}=0$$

oder:

$$\left(\frac{1}{r_2{}^1}-\frac{1}{r_2{}^2}\right)\cdot r_2+\left(\frac{1}{r_1{}^2}-\frac{1}{r_1{}^1}\right)\cdot r_1+\left(\frac{1}{r_1{}^1 r_2{}^2}-\frac{1}{r_1{}^2 r_2{}^1}\right)\cdot r_1 r_2=0$$

Setzt man nun ein:

$$r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

$$r_2=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2},$$

so wird die dadurch entstehende Gleichung von einem höheren als dem 2. Grade werden, kann also keine Kugelfläche darstellen. Auf der ihr entsprechenden Fläche und nur auf ihr sind die Bedingungen A erfüllt; sie finden daher nicht überall auf der Kugelfläche (r'), sondern nur auf der Schnittcurve beider Flächen ihre Befriedigung. Die beiden Potentiale sind daher nicht für alle Punkte des Raumes identisch und können daher im allgemeinen nicht durch einander ersetzt werden.

Auch das Potential von drei und mehreren isolirten Punkten kann nicht durch das eines einzigen Punktes ersetzt werden.

Seien n solcher Punkte mit den Massen:

$$m_1 \, m_2 \, \ldots \, m_n$$

gegeben, so muss, wenn diese durch einen Punkt von der Masse m ersetzt werden können, für Punkte einer um diesen letzteren beschriebenen Kugelfläche die Gleichung stattfinden:

$$\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\ldots+\frac{m_n}{r_n}=\text{const}$$

In Verbindung mit den Gleichungen, die sich daraus für die Punkte

$$1\ 2\ 3\ \ldots\ n$$

der Kugelfläche ergeben,

$$\frac{m_1}{r_1{}^1}+\frac{m_2}{r_2{}^1}+\ldots+\frac{m_n}{r_n{}^1}=\text{const}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{m_1}{r_1{}^n}+\frac{m_2}{r_2{}^n}+\ldots+\frac{m_n}{r_n{}^n}=\text{const}$$

lassen sich daraus die Gleichungen ableiten:

$$\text{B}\ \ldots \left\{\begin{array}{l} m_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1{}^1}\right)+m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2{}^1}\right)+\ldots+m_n\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n{}^1}\right)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1{}^n}\right)+m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2{}^n}\right)+\ldots+m_n\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n{}^n}\right)=0 \end{array}\right.$$

Sollen diese erfüllt werden, so muss ihre Determinante verschwinden:

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1{}^1}, & \frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2{}^1}, & \ldots & \frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n{}^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1{}^n}, & \frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2{}^n}, & \ldots & \frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n{}^n} \end{array}\right|=0$$

Bei Entwickelung dieser Gleichung und Einführung der Raumcoordinaten xyz ergiebt sich für letztere eine Gleichung von höherem als dem 2. Grade. Den Bedingungen B wird also auf einer Kugelfläche nicht genügt, und es kann mithin das Potential von n Massenpunkten im allgemeinen nicht durch das eines einzigen Massenpunktes ersetzt werden.

Es lässt sich daher der Satz aussprechen:

Eine endliche Zahl isolirter Massenpunkte ist niemals einem einzigen Massenpunkte äquipotential.

Man kann dies auch leicht folgendermassen beweisen.

Für sehr hohe Potentialwerte fallen die zugehörigen Niveauflächen in lauter einzelne um die Punkte

$$m_1\ m_2\ \ldots\ m_n$$

sich hinziehende Kugeln auseinander, die für kleiner werdende Potentialwerte allmählich verschmelzen und zu einer das ganze System umfassenden Fläche werden, welche sich in sehr grosser Entfernung mehr und mehr der Kugelgestalt nähert. Haben zwei Systeme von Punkten dasselbe Potential, so müssen auch ihre Niveauflächen identisch sein; sind diese verschieden, so sind auch die Potentiale nicht identisch. Ein Massenpunkt hat aber Kugelflächen zu Niveauflächen; daher kann er dem System von n Massenpunkten äquipotential nicht sein.

§ 2.

Mit Masse belegte Curven.

Eine endliche Zahl von Massenpunkten kann nicht durch einen Punkt ersetzt werden, anders ist es aber bei unendlich vielen, wie es das Beispiel von der homogenen Kugelfläche, die ihrem Mittelpunkte äquipotential ist, zeigt.

Diese Punkte können sich gruppiren zu Curven, Flächen oder Körpern.

Die einfachste Curve ist die Gerade. Für unendlich grosse Werte des Potentiales schrumpft die Niveaufläche derselben in die Gerade selbst zusammen, für nahe daran liegende wird sie zu einem die Gerade umhüllenden Cylinder. Im Endlichen stimmt diese Niveaufläche daher nicht mit der eines Punktes überein; es kann eine Gerade also nicht äquipotential einem Punkte sein.

Gleiches gilt für eine mit Masse belegte Kreislinie und ebenso für alle Curven; es folgt dies auch schon daraus, dass das Potential einer Curve in dieser logarithmisch, das eines Punktes aber unendlich wird wie $\frac{1}{r}$ für $\lim r = 0$.

Eine Curve kann auch einer andern niemals äquipotential sein, denn dann würde der Potentialausdruck in letzterer logarithmisch unendlich, bliebe in ersterer aber endlich, während er sich gerade umgekehrt verhalten muss.

§ 3.

Flächenförmige Massenverteilung.

Unter den Flächen ist die am einfachsten zu behandelnde die gleichmässig mit Masse belegte Kugelfläche, deren Potential sich durch das einer gleichen im Mittelpunkte concentrirten Masse ersetzen lässt. Alle Flächen, die dieser letzteren Masse äquipotential sind, werden

sich rückwärts durch äquivalente Massentransposition von diesem Punkte aus erhalten lassen. Solche sind zunächst wieder homogene Kugelflächen von beliebigem Radius, aber gleicher Masse. Andere Verteilungen ergeben sich daraus, indem man die in den Punkten der Oberfläche befindlichen Massen auf darin centrische Kugelflächen gleichmässig verteilt. Nimmt man diese Verteilung nur mit einer endlichen Anzahl von Punkten vor, so kann man die transponirten Massen gegen die übrigen vernachlässigen und behält die Verteilung längs der Kugelfläche; unterwirft man ihr aber sämmtliche Punkte, so werden die Transpositionskugelflächen einander unendlich nahe liegen, und die ganze Masse wird nicht mehr eine Fläche, sondern einen Körper bilden, dessen äussere und innere Oberfläche die einhüllenden Flächen der Kugeln sind, also eine Kugelschale, deren Dichte, wie leicht ersichtlich, eine Function des Radius ist.

Es lässt sich daher durch äquivalente Massentransposition nur eine Fläche construiren, die einem Punkte äquipotential ist, und umgekehrt nur eine Fläche durch einen Punkt ersetzen, nämlich die homogene Kugelfläche, resp. mehrere concentrische homogene Kugelflächen.

§ 4.

Körperliche Massenverteilungen.

Um zu einem Körper eine äquipotentiale Massenverteilung zu finden, bedient man sich am einfachsten homogener Kugeln, mittels deren man entweder ein Massenelement des Körpers am Mittelpunkte der Kugel auf den ganzen Kugelraum verteilt oder umgekehrt. So lässt sich die Masse eines Körpers entweder in einen Punkt, eine Curve, eine Fläche, oder in einen andern Körper umlagern.

Körper, welche sich auf diese Weise in einen Punkt P concentriren lassen, sind die in concentrischen Schichten gleich dichte Kugel, sowie die daraus abgeleiteten Körper.

In diesen letzteren, die beliebig nahe an den afficirten Punkt heranrücken, aber ihn nicht einschliessen dürfen, ist die Dichte ebenso unbestimmt, wie die Form; man kann sie in jedem Punkte durch äquivalente Massentransposition beliebig ändern; sie stehn indessen unter dem Gesetz, dass sich ihre sämmtliche Masse äquipotential in den Punkt P zurückwerfen lässt.

Um die drei anderen Arten von Körpern zu finden, geht man am besten den synthetischen Weg, indem man sich dieselben aus den Curven, Flächen, oder Körpern, durch welche sie ersetzt werden sollen, construirt.

Um einen Körper zu erhalten, dessen Potential gleichwertig dem einer Curve ist, denke man sich um jedes Element der Curve eine Kugel construirt und die Masse jedes einzelnen Curvenelementes in concentrischen Schichten der zugehörigen Kugel gleichmässig verteilt. Dabei werden an den meisten Punkten derselben viele transponirte Massen in einander fallen, da sämmtliche Kugeln mehr oder weniger in einander geschachtelt liegen. Indem man nun jedes Raumelement mit der Summe der hineinfallenden Massen behaftet denkt, erhält man statt der curvenförmigen eine körperliche Massenverteilung. Letztere ist dann der Verteilung längs der Curve äquipotential, da sie aus lauter in concentrischen Schichten gleich dichten Kugeln zusammengesetzt ist, die weil ihre Mittelpunkte in der Curve liegen, den entsprechenden Curvenelementen äquipotential sind, und da das Gesammtpotential einer Masse gleich der Summe der Potentiale ihrer einzelnen Elemente ist.

Der Körper, den wir so erhalten, wird die Umhüllungsfläche der erzeugenden Kugeln, d. h. eine Canalfläche als Mantel haben und von zwei Hemisphären begrenzt sein.

Analog ergeben sich Körper, die einer mit gleicher Masse belegten Fläche äquipotential sind, dadurch, dass man die Fläche in unendlich kleine Elemente zerschneidet, um jedes derselben eine Kugel construirt und die Masse jedes einzelnen in der zugehörigen Kugel nach der oben angegebenen Weise verteilt. Dann bilden die Massen in der zweiten Verteilung einen Körper, dessen Potential für äussere Punkte durch das der Fläche vertreten werden kann.

Diese Körper sind aber nicht die einzigen, welche die letztere Eigenschaft besitzen, sondern man kann durch weitere äquipotentiale Transposition beliebig viele andere gleichwertige Massenverteilungen dazu erhalten.

Um diese Classe von Körpern, welche sich aus unendlich vielen Kugeln zusammensetzen, kurz zu bezeichnen, wollen wir sie „Sphaerogene“ = „Kugelerzeugte“ nennen.

Bei der äquipotentialen Massentransposition kann man die Kugeln entweder gleich oder verschieden gross, entweder homogen oder nur in concentrischen Schichten gleich dicht nehmen. Es lässt sich aber jede Kugel, deren Dichte eine Function des Radius ist, aus homogenen Kugeln zusammensetzen, indem man von einer gleich grossen homogenen Kugel ausgeht, deren Dichte gleich dem Werte der gegebenen Dichtigkeitsfunction an der Oberfläche ist. Man denkt sich diese sowie die gegebene in lauter concentrische, so dünne Kugelschalen zerlegt, dass man deren Dichte als constant auffassen kann,

lagert concentrisch in die erstere eine homogene Kugel von der Oberfläche der ersten Kugelschale und einer Dichte, welche mit der vorhandenen die Dichte der ersten Kugelschalenfläche ausmacht; darauf eine homogene Kugel von der Oberfläche der zweiten Kugelschale etc. etc. — So kann man durch successive Hinzufügung resp. Hinwegnahme von homogenen Kugeln die gegebene Kugel construiren.

Ebenso kann man Kugeln von verschiedenen Radien in gleich grosse nebst entsprechenden Kugelschalen zerlegen.

Es wird daher vor allem darauf ankommen, diejenigen Körper zu untersuchen, die durch Ineinanderlagerung von gleich grossen homogenen Kugeln entstehen. Da man solche bei verschiedener Dichte stets in je zwei Kugeln zerlegen kann, von denen die eine bei sämmtlichen völlig übereinstimmt, so bleibt als einfachster Fall die Construction sphärogener Körper mittels homogener Kugeln von gleicher Grösse und Dichte.

§ 5.

Körper und äquipotentiale Curven.
Die Gerade.

Um eine Massenverteilung zu erhalten, welche einer Curve äquipotential ist, zerschneiden wir letztere in unendlich kleine Elemente und transponiren jedes derselben durch homogene Kugeln von gleicher Grösse. Wenn die Curve eine Gerade ist, wird die einhüllende Fläche der erzeugenden Kugeln ein Cylindermantel und der erzeugte Körper ein cylindrischer sein. — Nehmen wir zunächst an, die Gerade sei unbegrenzt, mit homogener Masse belegt, und die Kugelmittelpunkte (O, O_1, ...) seien auf ihr um das Stück: $OO_1 = ds$ von einander entfernt.

Legen wir dann parallel der Achse OO_1 einen Cylinder, der aus der zur Achse senkrechten XZ-Ebene das Element $dxdz$ ausschneidet, so zerlegen die Kugelflächen jede Seite dieses Cylinders in Elemente PP_1 etc., die sämmtlich gleich $OO_1 = ds$ sind.

Denn verbindet man z. B. P und P_1 mit den zugehörigen Mittelpunkten O und O_1, so sind im Viereck OO_1P_1P (Fig. 1.) zwei Seiten gleich: $OP = O_1P_1$, und die zwei anderen unendlich kleinen parallel: $OO_1 \parallel PP_1$; daher ist auch $OO_1 = PP_1$. Die sämmtlichen kleinen Parallelepipeda, in welche der Cylinder durch die Kugelflächen zerlegt wird, sind daher gleich: $dxdz.\overline{PP_1}$ und unter einander gleich.

Zerschneiden wir den ganzen sphärogenen Körper durch Cylinder von der Grundfläche $dxdz$ in unendlich viele solcher gleichen Paral-

lelepipeda, so können wir in folgender Weise leicht die Dichte an jedem Punkte bestimmen.

Die homogene Kugel kann den Körper auch dadurch erzeugen, dass sie sprungweise um das Element ds fortschreitet und an jedem Ruhepunkte ihre ganze Masse ablagert. Dabei fallen successiv auf den Punkt P die Punkte P_1, P_2 etc. und in das Element 1 die Elemente 2, 3, 4 etc. und zwar so viele Elemente, als in dem innerhalb der Kugel befindlichen Stücke des Cylinders $(dxdz)$ enthalten sind; es werden daher so viele Massenelemente in dem ersten zusammenfallen, als Längenelemente: $ds = PP_1 =$ etc. auf dem innerhalb der Kugel liegenden Stücke der Cylinderseite sich finden. Diese sind aber für jeden Punkt um so mehr vorhanden, je länger das Sehnenstück der Cylinderseite ist.

Da die sämmtlichen Elemente einander gleich sind, so ist die Dichte in jedem proportional seiner Masse. Daher ist die Dichte in jedem Punkte des sphärogenen Cylinders proportional der Länge der zugehörigen der Achse parallelen Kugelsehne.

Bezeichnet R den Radius der erzeugenden Kugel und r den Abstand des Punktes P von der Achse, so ist die Dichte

$$\delta = C.\sqrt{R^2 - r^2},$$

wo C eine näher zu bestimmende Constante.

Für die Oberfläche des sphärogenen Körpers $(r = R)$ ergiebt sich die Dichte: $\delta = 0$, während sie nach innen zu wächst und in der Achse $(r = 0)$ endlich:

$$\delta_0 = C.\sqrt{R^2}$$

wird. Daraus ergiebt sich durch Division die Gleichung:

$$\delta = \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2}}.\delta_0.$$

Ein jeder Cylinder, dessen Dichte δ in der durch diese Formel ausgedrückten Beziehung zur Achsendichte δ_0 steht, ist seiner mit der sämmtlichen Masse belegten Achse äquipotential.

Welches ist die lineare Dichte einer solchen Achse?

Da die Achse an allen Punkten gleichmässig mit Masse belegt und die Masse des sphärogenen Körpers gleichmässig um sie herum verteilt ist, so können wir uns in jedes Achsenelement ds die ganze zwischen den zugehörigen zur Achse senkrechten Ebenen liegende Masse concentrirt denken; alsdann haben wir die sämmtliche Körpermasse gleichmässig längs der Achse verteilt.

Die Masse, welche dabei auf ein Achsenelement fällt, ist leicht zu berechnen. Legen wir senkrecht zur Lamelle $[ds]$ zwei mit der Körperoberfläche coachsiale Cylinderflächen von den Radien r und $r + dr$, so ist die Masse des dadurch aus der Lamelle ausgeschnittenen cylindrischen Ringes:

$$ds \,.\, dr \,.\, 2\pi r \,.\, \delta =$$
$$ds \,.\, dr \,.\, 2\pi r \,.\, \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2}} \,.\, \delta_0;$$

daher die Masse der ganzen Lamelle:

$$dm = ds \,.\, \pi \,.\, \delta_0 \int_{r=0}^{r=R} d(r^2) \,.\, \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2}}$$
$$= \frac{ds \,.\, \pi \,.\, \delta_0}{R} \int_{r=R}^{r=0} \sqrt{R^2 - r^2} \,.\, d(R^2 - r^2)$$
$$= ds \,.\, \frac{\pi \,.\, \delta_0}{R} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[\sqrt{(R^2 - r^2)^3}\right]_{r=R}^{r=0}$$
$$= ds \,.\, \frac{2\pi R^2}{3} \,.\, \delta_0.$$

Bezeichnen wir die lineare Dichte mit ε, so ist:

$$\varepsilon = \frac{dm}{ds},$$

daher:

$$\varepsilon = \frac{2\pi R^2}{3} \,.\, \delta_0.$$

Das Potential V einer unendlichen Graden von der constanten Dichte ε ist aber bekanntlich:

$$V = 2 \,.\, \varepsilon \log \frac{1}{t} \text{ *)},$$

wo t die Entfernung des afficirten Einheits-Massenpunktes von der Graden darstellt.

Die obige Formel für ε lehrt aus der Dichte des sphärogenen Cylinders die äquipotentiale lineare Massenverteilung finden. Soll umgekehrt zu einer linearen gleichmässig mit Masse belegten Achse der äquipotentiale Cylinder construirt werden, so müssen die Dichten in den Beziehungen:

---

*) Riemann-Hattendorf: Schwere, Elektricität und Magnetismus. pag. 60.

$$\delta_0 = \frac{3}{2\pi R^2} \cdot \varepsilon$$

und

$$\delta = \frac{3}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^6}} \cdot \varepsilon$$

stehen.

Es ist also die lineare Dichte ε direct proportional dem Quadrate des Radius des sphärogenen Cylinders oder einfach proportional seinem Querschnitte.

Construiren wir zu zwei mit linearen Dichten ε und ε_1 belegten Achsen sphärogene Cylinder, in denen sich die Quadrate der Radien verhalten wie die linearen Dichten ε resp. ε_1, so haben diese gleiche Dichten δ_0 längs der Achse, da

$$\frac{\varepsilon}{R^2} = \frac{\varepsilon_1}{{R_1}^2};$$

da aber auch für correspondirende Punkte P und P_1:

$$\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2}} = \sqrt{\frac{{R_1}^2 - r^2}{{R_1}^2}},$$

so sind an den entsprechenden Punkten dieser beiden Cylinder die Dichten einander gleich.

Bei sphärogenen Cylindern, deren Querschnitt proportional der Dichte der äquipotentialen linearen Massenverteilung, sind die Dichten in ähnlich gelegenen Punkten einander gleich.

Denkt man sich die Achse eines sphärogenen Cylinders in einem Punkte durchschnitten und die Masse desselben so in zwei Teile zerlegt, dass die sämmtlichen erzeugenden Kugeln sich zu dem Teile summiren, in dem ihr Mittelpunkt liegt, so erhält man Cylinder, die nach der einen Seite ins Unendliche gehen, nach der andern aber von Hemisphären begrenzt werden.

Es leuchtet ein, dass sie äquipotential sind dem Stücke ihrer linearen Achse, das vom Mittelpunkte der Hemisphäre nach dem Unendlichen geht; die Dichte der linearen Massenverteilung wird dieselbe sein, wie beim unendlichen Cylinder, da grade wie bei einem solchen, auch hier auf ein Längenelement ds die Masse einer Kugel concentrirt wird. In der Endkugel dieses Cylinders nimmt die Dichte um so mehr ab, je mehr wir auf einer Parallelen zur Achse von der inneren Fläche der Endkugel nach aussen schreiten, da um so weniger erzeugende Kugeln ihre Massen abgelagert haben; die Zahl derselben an jedem Punkte P ist proportional dem Stücke σ, um das

man auf der durch P gehenden Parallelen von der äusseren Fläche fortschreiten muss, um zu ihm zu gelangen.

Bezeichnet Σ (Fig. 2.) die zu P gehörige ganze Sehne, so ist die Dichte in diesem Punkte:

$$\delta . \frac{\sigma}{\Sigma},$$

wo:

$$\Sigma = 2 . \sqrt{R^2 - r^2},$$

oder:

$$\frac{\sigma}{2R} . \delta_0 .$$

Daraus geht hervor, dass auf der Calotte ($\sigma =$ const) einer jeden erzeugenden Kugel, die in das Innere der Endkugel fällt, gleiche Dichte vorhanden ist.

Indem wir den Cylinder in der obigen Weise an zwei verschiedenen Punkten auseinander trennen, erhalten wir einen sphärogenen Cylinder, der von zwei Hemisphären begrenzt wird. Für ihn gelten die eben gefundenen Resultate.

Innerhalb der Endkugeln ist die Dichte längs der darin liegenden Calotten der erzeugenden Kugeln, im übrigen aber in gleicher Entfernung von der Achse constant. Diesem Körper äquipotential ist die mit der ganzen Masse gleichmässig belegte Centrale der beiden Endkugeln.

Ein sphärogener Cylinder setzt sich daher aus lauter coachsialen Cylinderschalen zusammen, die von den zugehörigen Calotten einer und derselben Kugel (R) abgeschlossen werden und mit diesen gleiche Dichte haben; die äusserste Schale ist die von Halbkugeln begrenzte; die Dichte in den einzelnen Schichten richtet sich nach dem Radius r der Cylindermäntel:

$$\delta = \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2}} . \delta_0 .$$

Um das Potential P einer gleichmässig mit Masse belegten Graden von der Dichte ε und Länge $2b$ aufzustellen, wählen wir die Mitte derselben zum Anfangspunkt O eines orthogonalen Coordinatensystems, die Grade selbst zur Y-Achse.

Dann ist:

$$P = \varepsilon . \int_{-b}^{+b} \frac{d\beta}{E},$$

wo E die Entfernung des afficirten Punktes von einem Element $d\beta$

der Graden darstellt. Wenn aber ϱ die Entfernung des Punktes von der Graden bedeutet, so ist:

$$E = \sqrt{(y-\beta)^2 + \varrho^2},$$

und

$$P = \varepsilon . \int_{-b}^{+b} \frac{d\beta}{\sqrt{(y-\beta)^2 + \varrho^2}}$$

$$= \varepsilon . \log \frac{-b + y + \sqrt{(y-b)^2 + \varrho^2}}{b + y + \sqrt{(y-b)^2 + \varrho^2}}.$$

§ 6.

Der Kreis.

Teilen wir einen Kreis (M) in unendlich viele gleiche Stücke ds_0 und lassen eine Kugel, deren Mittelpunkt sich sprungweise von einem Teilpunkte zum andern bewegt, in jeder Ruhelage ihre ganze Masse ablagern, so entsteht ein sphärogener Kreisring.

Um die Dichte desselben in jedem Punkte P (Fig. 3.) zu bestimmen, legen wir durch den Leitkreis eine Ebene, welche die Symmetrie-Achse Z im Punkte M trifft und verbinden M mit dem Mittelpunkte O einer erzeugenden Kugel. Nehmen wir dann OM als X-Achse an und schneiden aus dem sphärogenen Ringe einen zur Z-Achse symmetrischen Kreisring heraus, dessen Hauptschnitt das Element $dxdz$ ist, so wird dieser von den erzeugenden Kugeln in unendlich kleine congruente Cylinder zerschnitten. Fassen wir einen solchen ins Auge, so wird in ihm bei der sprungweisen Bewegung der Kugel ein Massenelement derselben nach dem andern abgelagert.

Je mehr Elemente sich in dem Teile befinden, welchen die Kugel aus dem Ringe ausschneidet, um so grösser wird die in dem Elemente angehäufte Masse werden.

Vernachlässigen wir die Massenstückchen des Ringteils, welche nicht mehr ein ganzes Massenelement bilden, als unendlich klein gegen die Summe der übrigen, so ist die in jedem Volumelemente angehäufte Masse proportional dem Bogenstücke, das von einer bestimmten Seite des unendlich schmalen Cylinders durch die Kugel ausgeschnitten wird. Die Grösse dieser Volumelemente ist aber nicht dieselbe bei allen Kreisringen $(dxdz)$, sondern nimmt mit der Entfernung vom Mittelpunkte M zu.

Zerlegen wir den Kreisring $(dxdz)$ durch Ebenen, welche durch die Z-Achse und die Teilungspunkte des Leitkreises gehen, so erhalten wir ebenso viele congruente kleine Cylinder, als vorher Volumelemente;

diese werden daher den ersteren gleich sein; da aber der Querschnitt beider $dx.dz$ ist, so werden auch ihre entsprechenden Seiten dieselbe Länge haben.

Nennen wir das Stück, welches durch zwei solcher Ebenen von einem zur Z-Achse symmetrischen Kreise abgeschnitten wird, ds, die Entfernung desselben von der Z-Achse $a+\xi$, wo ξ die X-Coordinate von P in Bezug auf O als Anfangspunkt ist, so verhält sich:

$$ds : ds_0 = a+\xi : a.$$

Da die Cylinder $(dx\,dz)$ denselben unendlich kleinen Querschnitt $dx.dz$ haben, so verhalten sich die Volumina v und v_0 zweier Elemente wie ds zu ds_0 oder wie ihre Entfernungen von der Z-Achse:

$$v : v_0 = a+\xi : a,$$

$$v = \frac{a+\xi}{a}.v_0.$$

Nun ist aber die Dichte: $\delta = \frac{m}{v}$. Die in einem Elemente des sphärogenen Körpers abgelagerte Masse ist proportional dem Bogen $2s$; daher:

$$\delta = C.s.\frac{a}{a+\xi}.$$

Es bleibt noch der von der Kugel ausgeschnittene Bogen $2s$ zu berechnen.

Möge derselbe in der Höhe z über dem Leitkreise liegen und 2α als zugehörigen Centriwinkel haben, so ist:

$$s = (a+\xi).\alpha.$$

Ferner ist:

$$\cos\alpha = \frac{a^2+(a+\xi)^2-\varrho^2}{2a(a+\xi)},$$

wo:

$$\varrho^2 = R^2-z^2;$$

daher

$$\alpha = \arccos\left[\frac{a^2+(a+\xi)^2-\varrho^2}{2a(a+\xi)}\right].$$

Mithin ergiebt sich:

$$\delta = C.s.\frac{a}{a+\xi} = C.a.\alpha$$

$$= C.a.\arccos\left[\frac{a^2+(a+\xi)^2-\varrho^2}{2a(a+\xi)}\right].$$

Hieraus folgt: $\delta = 0$, wenn:

$$a^2+(a+\xi)^2-\varrho^2 = 2a(a+\xi)$$

$$(a+\xi-a)^2-\varrho^2=0$$
$$\xi^2=\varrho^2,$$

d. h. für alle Punkte der Oberfläche des Kreisringes.

Um die Constante C zu bestimmen, suchen wir die Dichte δ_0 für die Achse ($z=0$, $\xi=0$) des Kreisringes; dort ist:

$$\delta_0=C.a.\arccos\left[\frac{2a^2-R^2}{2a^2}\right];$$

daher:

$$\text{C} \quad \ldots . \left\{ \delta=\frac{\arccos\left[\frac{a^2+(a+\xi)^2-R^2+z^2}{2a(a+\xi)}\right]}{\arccos\left[\frac{2a^2-R^2}{2a^2}\right]}.\delta_0. \right.$$

Da auf dem äquipotentialen linearen Ringe die ganze Masse M des sphärogenen Ringes sich gleichmässig verteilt, so ist die Dichte ε des linearen Ringes durch die Gleichuug bestimmt:

$$2\pi a.\varepsilon=M.$$

Es ist aber:

$$M=\int\delta.d\tau,$$

wo $d\tau$ das Massenelement bezeichnet und die Integration über die ganze Masse des sphärogenen Ringes zu erstrecken ist.

Integriren wir längs eines Elementarringes, so ergiebt sich, da an allen Punkten desselben die Dichte δ dieselbe ist:

$$M=\iint\delta.d\xi.dz.2\pi(a+\xi),$$

oder, wenn wir für δ den oben gefundenen Wert setzen:

$$M=C.J,$$

wo:

$$C=\frac{\pi}{\arccos\left[\frac{2a^2-R^2}{2a^2}\right]}.\delta_0,$$

und:

$$J=2\iint(a+\xi).\arccos\left[\frac{a^2+(a+\xi)^2-\varrho^2}{2a(a+\xi)}\right]d\xi\,dz.$$

Es ist aber:

$$2(a+\xi).\arccos\left[\frac{a^2+(a+\xi)^2-\varrho^2}{2a(a+\xi)}\right]=2s,$$

d. h. gleich dem auf dem Elementarringe durch die Kugel abgeschnittenen Bogen; daher ist durch

$$2s\,.\,d\xi\,.\,dz$$

das Volumen des innerhalb der Kugel liegenden Stückes vom Elementarringe ausgedrückt; die Summirung der innerhalb der Kugel liegenden Stücke sämmtlicher Elementarringe ergiebt das Volumen der Kugel selbst:

$$J = \iint 2s\,.\,d\xi\,.\,dz = \tfrac{4}{3}R^3\,.\,\pi.$$

Daher:

$$M = \frac{\pi}{\arccos\left[\frac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]}\,.\,\tfrac{4}{3}R^3\pi\,.\,\delta_0$$

und:

$$\text{D} \quad \ldots\ldots \left\{ \quad \varepsilon = \frac{M}{2\pi a} = \tfrac{2}{3}\,\frac{\pi}{\arccos\left[\frac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]}\,\frac{R^3}{a}\,\delta_0. \right.$$

Diese Formel bestimmt die Dichte ε eines linearen Ringes durch die Achsendichte δ_0 des äquipotentialen sphärogenen Ringes; die Berechnung des Potentiales bei solcher Massenverteilung ist folgende.

Bezeichnet E die Entfernung des afficierten Punktes P von einem Ringpunkte (Fig. 4.), so ist das Potential:

$$V = 2\int_0^\pi \frac{\varepsilon\,.\,a\,.\,d\varphi}{E}$$

$$= 2\int_0^\pi \frac{\varepsilon\,.\,a\,.\,d\varphi}{\sqrt{r^2 + a^2\sin^2\varphi}};$$

oder da:

$$r^2 = r_0{}^2 + a^2\cos^2\varphi - 2r_0 a\cos\varphi\sin\vartheta,$$

wenn $r_0 = \overline{MP}$, und ϑ der Winkel ist, den $\overline{MP}$ mit der Z-Achse bildet, so ist auch:

$$V = 2\int_0^\pi \frac{\varepsilon\,.\,a\,.\,d\varphi}{\sqrt{r_0{}^2 + a^2 - 2r_0 a\cos\varphi\sin\vartheta}}$$

$$= 2a\varepsilon\,.\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(r_0{}^2 + a^2 - 2ar_0\sin\vartheta + 4ar_0\sin\vartheta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}}.$$

Es ist:

$$r_0{}^2 + a^2 - 2ar_0\sin\vartheta > 0;$$

richten wir ferner die Z-Achse stets nach der Seite des Ringes, an welcher der Punkt P liegt, so ist stets:

$$\vartheta < \pi,$$

daher:

$$4r_0 a \sin\vartheta > 0;$$

wir können daher setzen:

$$E_1^2 = r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \sin\vartheta$$
$$E_0^2 = 4r_0 a \operatorname{sind}\vartheta$$

und:

$$E_2^2 = r_0^2 + a^2 + 2r_0 a \sin\vartheta = E_1^2 + E_0^2,$$

wo dann E_1 und E_2 die Entfernungen des Punktes P vom nächsten und entferntesten Ringpunkte sind.

Alsdann ist:

$$V = 2a.\varepsilon . \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{E_1^2 + E_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

oder wenn:

$$\psi = \frac{\varphi}{2}; \quad d\varphi = 2 . d\psi,$$

$$V = 4a\varepsilon . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{E_1^2 + E_0^2 \sin^2\psi}}$$

$$= 4a\varepsilon . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{E_1^2 + E_0^2 (1 - \cos^2\varphi)}}$$

$$= \frac{4a\varepsilon}{E_2} . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E_2^2} . \cos^2\psi}}.$$

Es ist aber allgemein, wenn $F(x)$ eine analytische Function von x bezeichnet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\cos^2\varphi) . d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin^2\varphi) . d\varphi,$$

da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\cos^2\varphi) . d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(\cos^2\varphi) . d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right).d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin^2\varphi).d\varphi;$$

mithin ist auch:

$$V = \frac{4a\varepsilon}{E_2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E_2}\right)^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{4a\varepsilon}{E_2}.F\left(\frac{E_0}{E_2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Setzen wir: $\frac{E_0^2}{E_2^2} = k'^2$, so ist nach der Landen'schen Transformation:

$$F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = (1+k_1).F\left(k_1, \frac{\pi}{2}\right),$$

wo:

$$k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k'^2}}{1+\sqrt{1-k'^2}} = \frac{E_2-E_1}{E_2+E_1}.$$

Es ist ferner:

$$1+k_1 = 2.\frac{E_2}{E_2+E_1} = 2.\frac{1}{1+\frac{E_1}{E_2}},$$

$$= 2.\frac{1}{1+Q},$$

wenn:

$$Q = \frac{E_1}{E_2}.$$

Daher ist:

$$V = \frac{4a\varepsilon}{E_2} \cdot \frac{2}{1+Q}.F\left(\frac{1-Q}{1+Q}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{E_2} \cdot \frac{4a\varepsilon\pi}{1+Q} \cdot \left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1-Q}{1+Q}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1-Q}{1+Q}\right)^4 + \dots\right\}.$$

Zerschneiden wir die ringförmige Achse des Kreisringes an zwei beliebigen Punkten und lassen in jedem Teilungspunkte der beiden Stücke die erzeugende Kugel ihre gesammte Masse ablagern, so erhalten wir zwei Ringstücke, die durch eine teilweise Ineinanderlagerung, bei der die Stücke der Achse einen vollen Kreis ausmachen, sich zu dem sphärogenen Ringe ergänzen.

Die Dichte an jedem Punkte dieser von Hemisphären begrenzten Ringstücke ist mit Ausnahme der beiden Endkugeln durch die Gleichung C bestimmt.

Innerhalb der letzteren aber erhält man auf jedem zur Z-Achse symmetrischen Bogen vom Radius r eine um so grössere Dichte, je mehr man sich darauf von der Begrenzungs-Halbkugel entfernt, weil man in um so mehrere der erzeugenden Kugeln eindringt.

Bezeichen wir mit σ das durchwanderte Bogenstück, so ist die Dichte δ_k an dem erreichten Punkte:

$$\delta_k = \frac{\sigma}{2s} \cdot \delta,$$

wo:

$$s = \arccos\left[\frac{a^2 + (a + r_a)^2 - \varrho^2}{2(a + r_a)a}\right] \cdot (a + r_a).$$

Daher ist die Verbindung mit der Gleichung C:

$$\delta_k = \frac{\sigma}{2(a + r_a) \cdot \arccos\left[\frac{2a^2 - R_2}{2a^2}\right]} \cdot \delta_0;$$

für

$$\sigma = 2s$$

ergiebt sich:

$$\delta_k = \delta; \quad \text{für} \quad \sigma = 0, \quad \text{d. h.}$$

für die äussere Hemisphäre:

$$\delta_k = 0.$$

Ein solches sphärogenes Ringstück ist äquipotential dem zugehörigen Stücke der Achse, belegt mit derselben Dichte s wie bei dem vollen Ringe.

§. 7.

Flächenartige Massen und äquipotentiale Körper.
Die unbegrenzte Ebene.

Lassen wir eine homogene Kugel sich sprungweise längs einer Fläche bewegen und an jedem Ruhepunkte ihre ganze Masse ablagern, so entsteht ein sphärogener Körper, dessen Potential durch das dieser Fläche ersetzt werden kann, wenn wir in dem Mittelpunkte jeder Ruhelage die sämmtliche Masse der Kugel concentrirt denken. Der dadurch entstehende Körper wird, wenn die Fläche unendlich und die Kugel sich stetig von Punkt zu Punkt bewegt, überall eine gleiche Dicke besitzen, welche dem Durchmesser der Kugel gleich sein

wird; die Oberfläche dieses Körpers aber ist die Enveloppe der sämmtlichen Ruhelagen der erzeugenden Kugel.

Die Leitfläche sei eine unbegrenzte Ebene.

Wir markiren die Ruhepunkte für den Mittelpunkt der Kugel durch die Schnittpunkte zweier Systeme orthogonaler Geraden, welche in gleicher, unendlich kleiner Entfernung parallel laufen, wählen ein Paar derselben zur X- und Y-Achse und bezeichnen ihre Entfernungen mit:

$$dx = dy.$$

Lassen wir dann die Kugel zunächst längs der X-Achse sich fortbewegen, so erhalten wir nach Ablagerung der Kugelmassen einen sphärogenen Cylinder (s. Fig. 5.).

Um den gesuchten Körper zu erhalten, denken wir den gefundenen Cylinder sprungweise so fortbewegt, dass seine Achse successiv die Lagen der Parallelen $y = \text{const}$ der zweiten Schar annimmt, und in diesen Ruhelagen seine ganze Masse abgelagert. Es ist einleuchtend, dass auf diese Weise derselbe Körper entsteht, der durch Ablagerung der Masse jeder Kugel in ihrer Ruhelage sich bildet; denn am Ende unserer Construction haben wir an jedem Eckpunkte des Netzes eine Kugel abgelagert.

Welches ist die Dichte dieses Körpers?

Die Masse, welche sich in einem Elemente $dx.dy.dz$ in der Höhe z über der XY-Ebene ansammelt, erhalten wir, wenn wir parallel der Y-Achse ein Parallelepiped vom Querschnitte $dx.dz$ durch den Cylinder hindurch legen. Dieses wird durch die Mäntel der auf einanderfolgenden sphärogenen Cylinder in lauter unendlich kleine congruente Parallelepipeda zerschnitten. So viele derselben innerhalb eines Cylinders liegen, lagern sich bei der sprungweisen Fortbewegung desselben in das vorderste Element; der noch übrige Teil der im Cylinder liegenden Masse des Parallelepipeds $(dx dz)$, der ein volles Element nicht mehr bildet, kann gegen die Summe der übrigen vernachlässigt werden. Alsdann ist die im ersten Elemente angesammelte Masse:

$$dm = 2.\int_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-z^2}} \delta . d\tau$$

$$= 2.dx.dz.\int_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}}.\delta_0.dy$$

$$= 2dx.dz.\delta_0.\int_0^{y=\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{\frac{R^2-z^2-y^2}{R^2}}.dy$$

$$= \frac{2dx.dz.(R^2-z^2)}{R}.\delta_0 \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2-z^2}}.d\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-z^2}}\right)$$

Setzen wir:

$$\frac{y}{\sqrt{R^2-z^2}} = \sin\varphi,$$

so ergiebt sich:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2-z^2}}.d\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-z^2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi.d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\varphi+\cos^2\varphi).d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Daher:

$$dm = \delta_0.\frac{R^2-z^2}{R}.\frac{\pi}{4}.dx\,dz.$$

Da jeder Cylinder durch die aufeinander folgenden Oberflächenlagen des erzeugenden Cylinders in gleiche Volumenelemente zerlegt wird, so verhalten sich die Dichten der einzelnen Elemente wie die darin befindlichen Massen; es ist also die Dichte $\varDelta$ in jedem Punkte:

$$\varDelta = \text{Const.}\frac{R^2-z^2}{R}.$$

Für die Leitebene ist:

$$z = 0;$$

mithin die dortige Dichte:

$$\varDelta_0 = C.R,$$

woraus folgt:

$$\text{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left\{\varDelta = \frac{R^2-z^2}{R^2}.\varDelta_0.\right.$$

Vergleichen wir mit dieser Formel die für die Dichte eines sphärogenen Cylinders:

$$\delta = \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}}.\delta_0,$$

so erkennen wir leicht, dass bei gleicher Entfernung von der Leitcurve, resp. Fläche der beiden sphärogenen Körper die Dichte in der körperlichen Tafel in quadratischem Verhältnisse gegen die Dichte des Cylinders abnimmt.

Da die Masse der körperlichen Tafel gleichmässig zu beiden Seiten der Leitebene verteilt ist, so wird man die Masse, womit letztere belegt werden muss, um der ersteren äquipotential zu werden, einfach dadurch finden, dass man über einem Elemente $dxdy$ parallel der Z-Achse ein Parallelepiped construirt und die durch dieses aus dem Körper ausgeschnittene Masse berechnet.

In der Höhe z über der XY-Ebene ist die Dichte:

$$\varDelta = \frac{R^2 - z^2}{R^2} \cdot \varDelta_0;$$

daher die Masse des ausgeschnittenen Parallelepipeds:

$$\begin{aligned} dm &= 2 \cdot \int_{z=0}^{z=R} \varDelta \cdot d\tau \\ &= 2 \cdot dx \cdot dy \cdot \varDelta_0 \cdot \int_0^R \frac{R^2 - z^2}{R^2} \cdot dz \\ &= 2\varDelta_0 \cdot \left[\frac{R^2 - \frac{1}{3}z^2}{R^2} \cdot z\right]_0^R \cdot dx \cdot dy \\ &= \tfrac{4}{3} \cdot \varDelta_0 \cdot R \cdot dx \cdot dy. \end{aligned}$$

Ist aber μ die Flächendichte der Ebene, so findet die Gleichung statt:

$$dm = \mu \cdot dx \cdot dy;$$

daher:

$$\mu = \frac{dm}{dx \cdot dy} =$$

F . . . . $\{ \mu = \tfrac{4}{3} \cdot R \cdot \varDelta_0,$

woraus weiter folgt:

$$\varDelta_0 = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{1}{R} \cdot \mu,$$

und

$$\varDelta = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{R^2 - z^2}{R^3} \cdot \mu.$$

Haben wir als Leitfläche die unbegrenzte Ebene benutzt, so ist das Potential des zugehörigen sphärogenen Körpers unendlich, wie das einer unbegrenzten Ebene von der Dichte μ selbst.

Dies lässt sich leicht auf folgende Weise dartun.

Fällen wir von dem betrachteten Punkte auf die Ebene ein Lot, wählen dies zur Z-Achse und den Fusspunkt desselben zum Nullpunkt eines Polarcoordinatensystems (r, φ), so ist die Z-Componente

der Kraft, mit der ein Massenelement der Ebene: $\mu . r . dr . d\varphi$ den Einheitspunkt P anzieht, gleich:

$$-\frac{\mu . r . dr . d\varphi}{\varrho^2} . \frac{z}{\varrho},$$

wenn ϱ seine Entfernung vom Punkte P darstellt.

Die Kraft, mit der die ganze ebene Masse von der constanten Dichte μ den Punkt P anzieht, ist daher:

$$\begin{aligned} Z &= -z\mu . \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r . dr}{\varrho^3} . d\varphi \\ &= -\pi\mu z . \int_0^\infty \frac{d(r^2)}{\sqrt{(z^2+r^2)^3}} \\ &= 2\pi\mu z . \left[\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]_0^\infty \\ &= -2\pi\mu. \end{aligned}$$

Die Kraft, mit der eine Ebene von constanter Flächendichte einen ausserhalb liegenden Punkt P anzieht, ist unabhängig von der Entfernung desselben von der Ebene.

Dasselbe ergiebt sich auch folgendermassen.

Denken wir uns eine zur XY-Ebene parallele Ebene $X_1 Y_1$ mit der Dichte μ belegt in der Entfernung z_1 vom Punkte P und construiren von P aus durch die Systeme der $X = \text{const}$ und $Y = \text{const}$ Ebenen, welche von der Parallelebene die Elemente $dx_1 dy_1$ ausschneiden, so verhält sich:

$$dx_1 . dy_1 : r_1{}^2 = dx . dy : r^2,$$

wenn r und r_1 die Entfernungen des Punktes P von den zwei mit P in einer Graden liegenden Elementen $dxdy$ resp. $dx_1 dy_1$ darstellen.

Es ist aber:

$$\frac{dx_1 dy_1}{r_1{}^2} = \frac{dxdy}{r^2}$$

proportional der Kraft, mit welcher der Punkt P von den entsprechenden Elementen beider Ebenen angezogen wird.

Zu jedem Elemente der einen Ebene existirt mithin stets ein Element der anderen, welches den Punkt P mit derselben Kraft anzieht.

Daraus folgt, dass der Punkt P von der ganzen Ebene XY mit derselben Kraft angezogen wird, wie von der Ebene $X_1 Y_1$.

Wie weit wir daher auch die Ebene $X_1 Y_1$ vom Punkte P, oder den Punkt P von ihr entfernen, die anziehende Kraft bleibt stets constant.

Für unendlich nahe Punkte ist:

$$\frac{\partial P}{\partial n} - \frac{\partial P}{\partial n'} = -4\pi\mu,$$

wo $\frac{\partial P}{\partial n}$ und $-\frac{\partial P}{\partial n'}$ die normalen Kraftcomponenten und n die Richtung der wachsenden Normale bezeichnet.

Da in unserem Falle offenbar

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\partial P}{\partial n'},$$

so ist:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial z} = -2\pi\mu$$

die constante Kraft, mit der die Ebene in jeglicher Entfernung den Einheits-Massenpunkt anzieht.

Daher ist:

$$P = [-2\pi\mu . z]_{z=+\infty}^{z=z} = \infty .$$

Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir die Ebene als Oberfläche einer Kugel von unendlich grossen Radius r betrachten. Das Potential derselben ist dann:

$$P = \lim \left[\frac{4\pi r^2}{(r+z)}\right]_{r=\infty} . \mu = \infty .$$

§ 8.

Mit homogener Masse belegte Rechtecke.

Wenn sich der sphärogene Cylinder nicht längs der ganzen Y-Achse von $-\infty$ bis $+\infty$, sondern nur längs eines beschränkten Stückes derselben, von $y = 0$ bis $y =$ const fortbewegt, so entsteht ein flächenartiger Körper von unendlicher Länge, aber endlicher Breite. In allen Teilen dieses Körpers, die nicht innerhalb des Anfangs- und End-Cylinders liegen, ist die Dichte ganz dieselbe wie im vorigen Falle, da die Lagerung der Kugeln hier genau dieselbe ist; anders innerhalb der ersten und letzten Cylinderfläche.

Denken wir uns von der Oberfläche des ersten Cylinders aus

parallel der Y-Achse ein Parallelepiped mit der Grundfläche $dx.dz$ hindurchgelegt, so wird dasselbe durch die auf einander folgenden Lagen des erzeugenden Cylinders in lauter unendlich kleine congruente Elemente zerschnitten; in das erste derselben wird nur vom ersten, in das zweite vom ersten und zweiten Cylinder etc. Masse abgelagert, so dass die Dichte in diesem Parallelepiped stetig wächst, je mehr wir uns darin von der Oberfläche des Cylinders entfernen. Die Masse in jedem Elemente ist gleich der Summe der Massen der durchschrittenen Elemente des ersten Cylinders:

$$dm = \int \delta . d\tau$$

$$= \delta_0 . dx . dz . \int\limits_{y=-\sqrt{R^2-z^2}}^{y} \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}} . dy$$

$$= \delta_0 . dx . dz . \left[\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}} . dy + \int\limits_0^{y} \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}} . dy \right].$$

Es ist aber nach Obigem:

$$\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}} . dy = \frac{R^2-z^2}{R} . \frac{\pi}{4};$$

ferner:

$$\int\limits_0^{y} \sqrt{\frac{R^2-z^2-y^2}{R^2}} . dy = \frac{R^2-z^2}{R} . \int\limits_0^{y} \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2-z^2}} . d\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-z^2}}\right).$$

Setzen wir:

$$\frac{y}{\sqrt{R^2-z^2}} = \sin\varphi,$$

so ist:

$$\int\limits_0^{y} \sqrt{1-\frac{y^2}{R^2-z^2}} . d\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-z^2}}\right) = \int\limits_0^{\varphi} \cos^2\varphi . d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\varphi} \cos\varphi . d(\sin\varphi) = \cos\varphi . \sin\varphi + \int\limits_0^{\varphi} \sin^2\varphi . d\varphi =$$

$$= \cos\varphi . \sin\varphi + \varphi - \int\limits_0^{\varphi} \cos^2\varphi . d\varphi.$$

Daher:

$$2.\int_0^\varphi \cos^2\varphi . d\varphi = \varphi + \sin\varphi . \cos\varphi$$

und

$$\int_0^y \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2 - z^2}} . d\left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}}\right) = \tfrac{1}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} + \tfrac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} . \sqrt{\frac{R^2 - z^2 - y^2}{R^2 - z^2}};$$

mithin:

$$dm = \delta_0 . dx . dz . \frac{R^2 - z^2}{2R} . \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} \\ + \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} . \sqrt{\frac{R^2 - z^2 - y^2}{R^2 - z^2}} \end{matrix} \right\}.$$

Es ist $\varDelta_{(E)}$ die Dichte im Endcylinder:

$$\varDelta_{(E)} = C . \frac{dm}{d\tau},$$

daher:

$$\varDelta_{(E)} = C . \frac{R^2 - z^2}{R} . \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} + \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} . \sqrt{\frac{R^2 - z^2 - y^2}{R^2 - z^2}} \right\};$$

für

$$z = z, \quad y = \sqrt{R^2 - z^2}$$

ist:

$$\varDelta_{(E)} = C . \frac{R^2 - z^2}{R} . \{\pi\} = \varDelta = \frac{R^2 - z^2}{R^2} . \varDelta_0,$$

daher:

$$C = \frac{1}{R\pi} . \varDelta_0;$$

mithin:

$$\text{F} \ldots \left\{ \varDelta_{(E)} = \frac{R^2 - z^2}{R^2} . \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} + \frac{y\sqrt{R^2 - z^2 - y^2}}{R^2 - z^2}}{\pi} \right\} \varDelta_0. \right.$$

Diese Formel geht für den Wert:

$$y = \sqrt{R^2 - z^2},$$

mit dem wir aus dem End-Cylinder heraustreten, in die bereits bekannte Gleichung E:

$$\varDelta = \frac{R^2 - z^2}{R^2} . \varDelta_0$$

über, die für alle Punkte ausserhalb der End-Cylinder gilt.

Genau denselben Körper, den wir so eben bei beschränkter Bewegung des unendlich langen sphärogenen Cylinders erhalten haben, können wir auch durch unendliche Bewegung eines endlichen sphärogenen Cylinders herstellen.

Es möge sich ein endlicher sphärogener Cylinder, dessen Achse von $y = 0$ bis $y = \text{const}$ reicht, sich selbst parallel längs der X-Achse bewegen von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$. Alsdann wird die Achse des Cylinders ganz denselben unendlichen Ebenenstreifen beschrieben haben, wie die des unendlich langen Cylinders im vorigen Falle.

Denken wir uns in beiden Fällen die Ruhelagen der Cylinderachsen ebensoweit von einander entfernt, wie die der erzeugenden Kugeln, so werden die Ruhelagen der Achsen, sowie die Bewegungslinien der Kugeln beide Male genau dieselben Systeme von orthogonalen Graden bilden, deren Durchschnittspunkte die Ruhelagen für die Centra der erzeugenden Kugeln sind. Es werden sich daher beide Körper aus denselben Kugeln zusammensetzen, mithin identisch sein; ihre Dichte wird an gleichen Punkten dieselbe und durch obige Formeln ausgedrückt sein.

Danach ist es nicht schwer, die Dichte in allen Punkten eines endlichen flächenartigen Körpers zu bestimmen, der bei endlicher Parallel-Bewegung eines endlichen sphärogenen Cylinders entsteht.

Während für das Innere die Formel E gilt, so ist nach den vorhergehenden Ueberlegungen die Dichte in den Endcylindern nach allen vier Seiten hin durch Formel F bestimmt, jedoch mit Ausnahme der vier Eckkugeln.

Um die Dichte im Punkte P derselben zu bestimmen (Fig. 6.), machen wir zwei Seiten des von den Mittelpunkten der erzeugenden Kugeln ausgefüllten Rechtecks zur X- und Y-Achse, wählen die Z-Achse so, dass das Coordinatensystem positiv wird und legen vom Punkte P aus ein Parallelepiped von der Grundfläche $dx.dz$ durch den Körper. Dieses wird durch die auf einander folgenden Oberflächen der erzeugenden sphärogenen Cylinder in lauter kleine Parallelepipeda zerschnitten. In jedem finden sich nach Ablagerung der Massen der sphärogenen Cylinder die sämmtlichen Massen der vorhergehenden Elemente angehäuft, so dass, wenn wir die Dichte desselben mit δ bezeichnen, ein Massenelement in der Y-Entfernung $HP = \sigma$ von der Oberfläche die Masse enthält:

$$dm = dx.dz.\int \delta . dy.$$

Legen wir durch P eine Parallelebene $(X'Y')$ zur XY-Ebene, welche die Z-Achse in O' schneidet und bezeichnen wir mit σ' die

Stücke der neuen Y'-Coordinaten, welche von der Eckkugel und der Graden HP begrenzt werden, so ist:

$$\delta = C.\sigma',$$

wo

$$C = \frac{\delta_0}{2R},$$

daher:

$$dm = C.dx.dz.\int_0^{y=\sigma} \sigma'.dy$$

$$= C.dx.dz.\int_0^{\sigma} \sigma'.d\sigma.$$

Dies Integral stellt das Stück der von der $X'Y'$-Ebene aus der Eckkugel ausgeschnittenen Kreisfläche (ϱ) dar, welches von den beiden Längen σ und σ'_P abgetrennt wird.

Daraus folgt, dass in den Punkten (z, σ, σ') und (z, σ', σ) dieselbe Dichte vorhanden ist.

Schneidet die zu P gehörige X'-Coordinate die Kreisperipherie in N, die Y'-Achse in A, so ist das von der Kreisfläche abgeschnittene Stück gleich der Differenz:

$$OANH - OAPH =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varrho^2}{2}\left(\arccos\left(\frac{-x}{\varrho}\right) + \arcsin\frac{y}{\varrho}\right) \\ + \frac{y}{2}\sqrt{\varrho^2 - y^2} + \frac{x}{2}\sqrt{\varrho^2 - x^2} + xy \end{array} \right\} = S$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x}{\varrho} + \arcsin\frac{y}{\varrho}\right) \\ + \frac{y}{2}\sqrt{\varrho^2 - y^2} + \frac{x}{2}\sqrt{\varrho^2 - x^2} + xy \end{array} \right\}$$

welche Formel sich im Punkte $\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y = x \end{array} \right\}$ nicht ändert.

Mithin ist die Dichte im Punkte (xyz) der Eckkugel:

$$\varDelta_K = \text{Const}.S,$$

wobei zu setzen ist:

$$\varrho^2 = R^2 - z^2.$$

Für Punkte der inneren Oberfläche der Eckkugel muss diese Formel in die Gleichung F übergehen; für solche Punkte ist:

$$\begin{cases} \varrho^2 = x^2 + y^2, \text{ und} \\ \arcsin \frac{x}{\varrho} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{\varrho}, \end{cases}$$

daher die Dichte $\varDelta_{(K,E)}$ in solchen Punkten:

$$\varDelta_{(K,E)} = \text{Const.}\, \varrho^2. \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{\varrho} + \frac{y\sqrt{\varrho^2 - y^2}}{\varrho^2} \right\}.$$

Es ist aber nach Gleichung F:

$$\varDelta_{(E)} = \frac{\varrho^2}{R^2} \cdot \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} + y \cdot \frac{\sqrt{R^2 - z^2 - y^2}}{R^2 - z^2}}{\pi} \right\} \varDelta_0,$$

daher:

$$\text{Const} = \frac{\varDelta_0}{R^2 . \pi},$$

und

$$\varDelta_K = \frac{1}{R^2 . \pi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 - z^2}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{R^2 - z^2}} + \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} \right] \\ + \frac{y}{2}\sqrt{\varrho^2 - y^2} + \frac{x}{2}\sqrt{\varrho^2 - x^2} + xy \end{array} \right\} \varDelta_0.$$

Die Flächen gleicher Dichte: $\varDelta = \text{const}$ sind, soweit sie innerhalb der Eckkugeln und der Endcylinder liegen, transcendent; im übrigen Raume aber Parallelebenen: $z = \text{const}$.

Gehen die beiden Endcylinder in einander über, so vervollständigt man den sphärogenen Körper durch Ansetzung eines anderen zu einem solchen, in dem die Endcylinder sich nicht schneiden, und hat dann die Dichte an jedem Punkte gleich der Differenz der dortigen Dichten des neuen Körpers und des angesetzten Hilfskörpers.

§ 9.

Die Kreisfläche mit homogener Massenbelegung.

Um einen der homogenen Kreisfläche äquipotentialen Körper zu erhalten, zerschneiden wir den Radius $O\Omega = a$ derselben in unendlich viele gleiche Teile, legen durch die Teilungspunkte concentrische Kreise, denken die Masse zwischen je zweien solcher Kreise auf den inneren Kreis concentrirt und construiren zu jedem linearen Kreisring den äquipotentialen körperlichen Kreisring vom constanten Radius R.

Diese sämmtlichen Kreisringe setzen sich zu einem scheibenartigen Körper zusammen von der Dicke $2R$, dessen Potential durch das der homogenen Kreisfläche ersetzt werden kann.

Untersuchen wir die Dichte dieses sphärogenen Körpers.

Bei der Concentration der Masse der Kreisplatte in lineare Kreisringe werden die auf jedem Ringe lagernden Massen mit der Entfernung vom Mittelpunkte immer grösser, in demselben Verhältnisse wächst aber auch der Umfang des Kreisringes; mithin ist die Dichte auf allen diesen Ringen gleich. — Statt aus diesen Ringen mittels äquivalenter Massentransposition den resultierenden Körper herzustellen, können wir auch die Kreisplatte durch zwei orthogonale unendlich nahe Liniensysteme in gleiche quadratische Elemente zerlegen und jedes derselben von seinem Mittelpunkte aus durch eine homogene Kugel transponieren; denn je näher wir uns in beiden Fällen die Liniensysteme an einander gerückt denken, um so mehr nähern sich die beiden Massenverteilungen der homogenen Belegung und können der letzteren über jede beliebige Grenze der Genauigkeit hinaus nahe geführt werden.

Für die letztere Verteilung kennen wir bereits die Dichte; sie ist:

$$\Delta = \frac{R^2 - z^2}{R^2} . \Delta_0 .$$

Diese Formel gilt aber nur für solche Punkte, in denen von allen Seiten gleichmässig Masse abgelagert wird; sie gilt daher hier nicht für Punkte des äussersten Kreisringes.

Um für diese die Dichte zu finden (Fig. 7.), construieren wir von O aus ein orthogonales Coordinatensystem, dessen Z-Achse senkrecht zur Kreisfläche, und schneiden durch

1) die Ebenen $z = \text{const}$ und $z + dz = \text{const}'$,
2) die Cylinder im Abstande $(a + \xi^0)$ und $(a + \xi^0 + da)$ von der Z-Achse,
3) die durch die Z-Achse gelegten Ebenen $\varphi = \text{Const}$ und $\varphi + d\varphi = \text{Const}'$

ein Element

$$(a + \xi^0) . d\varphi . dz . da$$

aus dem äussersten Kreisringe heraus und berechnen die Summe dm der hineinfallenden Massen.

Ist $\delta a_{(\xi^0, z)}$ die Dichte des Endringes im Punkte (ξ^0, z) und $\delta(a - \sigma)_{(\xi^0, z)}$ die entsprechende Dichte des Ringes mit der Achse $a - \sigma$, so ist:

$$dm = \int_{\xi=\xi_0}^{\xi=\varrho} (a+\xi^0) \,.\, d\varphi \,.\, dz \,.\, d\xi \,.\, \delta(a-\varrho+\xi)_{(\xi^0 z)}$$

$$= (a+\xi^0) \,.\, d\varphi \,.\, dz \,.\, \int_{\xi=\xi_0}^{\xi=\varrho} \delta(a-\varrho+\xi)_{(\xi^0 z)} \,.\, d\xi,$$

wo ξ die X-Coordinaten der Ringpunkte in Bezug auf Ω, den Mittelpunkt der äussersten Kreisfläche, darstellt. Es lässt sich aber auf folgende Weise die Dichte $\delta(a-\varrho+\xi)_{(\xi^0 z)}$ durch die Dichte im Endringe $\delta a_{(\xi^0 z)}$ ausdrücken.

Es ist nach Formel D bei gleichem ε:

$$\frac{\delta a_0}{a \,.\, \arccos\left[\dfrac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]} = \frac{\delta a'_0}{a' \,.\, \arccos\left[\dfrac{2a'^2 - R^2}{2a'^2}\right]},$$

ferner nach C:

$$\delta_{a'} = \frac{\arccos\left[\dfrac{a'^2 + (a'+\xi^0_{a'})^2 - \varrho^2}{2a' \,.\, (a'+\xi^0_{a'})}\right]}{\arccos\left[\dfrac{2a'^2 - R^2}{2a'^2}\right]} \,.\, \delta_{a'_0}$$

$$= \frac{a'}{a} \cdot \frac{\arccos\left[\dfrac{a'^2 + (a'+\xi^0_{a'})^2 - \varrho^2}{2a'(a'+\xi^0_{a'})}\right]}{\arccos\left[\dfrac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]} \,.\, \delta_{a^0}$$

Es ist aber:

$$\xi^0_{a'} = \xi^0_a + a - a';$$

setzen wir daher

$$a' = (a - \varrho + \xi),$$

so ist:

$$\xi^0_{a'} = \xi^0_a + \varrho - \xi$$

und:

$$a' + \xi^0_{a'} = a + \xi^0_a = (a+\xi^0);$$

daher:

$$\delta(a-\varrho+\xi)_{(\xi^0 z)} = \frac{a-\varrho+\xi}{a} \cdot \frac{\arccos\left[\dfrac{(a-\varrho+\xi)^2 + (a+\xi^0 - \varrho^2)}{2(a-\varrho+\xi)\,(a+\xi^0)}\right]}{\arccos\left[\dfrac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]} \, \delta a_0$$

und:

$$dm = \text{Const}\,(a+\xi^0) \,.\, \int_{\xi=\xi^0}^{\xi=\varrho} (a-\varrho+\xi) . \arccos\left[\frac{(a-\varrho+\xi)^2 + (a+\xi^0)^2 + \varrho^2}{2(a-\varrho+\xi)(a+\xi^0)}\right] d\xi$$

Durch Division mit dem Volumelement: $(a+\xi^0) \,.\, d\varphi \,.\, dz \,.\, d\xi$ erhalten wir die Dichte Δ_E im Punkte $(\xi^0 z)$ gleich

$$\varDelta_E = \text{Const} \int_{\xi^0}^{\varrho} 2(a - \varrho + \xi) \,.\, \arccos \left[\frac{(a - \varrho + \xi)^2 + (a + \xi^0)^2 - \varrho^2}{2(a - \varrho + \xi)(a + \xi^0)} \right] . d\xi$$

$$= \text{Const} \int_{\xi^0}^{\varrho} 2(a - \varrho + \xi) \,.\, \varphi \,.\, d\xi,$$

wo φ den der Seite ϱ des Dreiecks (ϱ, $a + \xi^0$, $a + \varrho - \xi$) gegenüberliegenden Winkel bedeutet, oder:

$$\varDelta_E = \text{Const} \int_{\xi^0}^{\varrho} 2s \,.\, d\xi,$$

wo s der zu φ gehörige Bogen im Kreise $(a - \varrho + \xi)$ ist.

Es stellt aber das Integral:

$$\int_{\xi_0}^{\varrho} 2s \,.\, d\xi$$

die Fläche $2F$ dar, welche in der Ebene $z = \text{const}$ der um den Punkt (ξ^0, z) mit $\varrho = \sqrt{R^2 - z^2}$ beschriebene Kreis von einer in derselben Ebene liegenden Kreisfläche abschneidet, die mit a um die Z-Achse beschrieben ist (Fig. 8.).

Bewegt sich in der Ebene $z = \text{const}$ ein Punkt aus dem Endringe heraus in das Innere des sphärogenen Körpers, so schneidet dieser Kreis stets seine volle Fläche ab; folglich ist für solche Punkte die Dichte $\varDelta$ constant und zwar proportional der Kreisfläche:

$$(R^2 - z^2)\pi.$$

Für den Punkt $(\xi^0 z)$ ist $2F$ gleich der ganzen Kreisfläche $\varrho^2 . \pi$, vermindert um die Ergänzungsfläche $2F'$, also:

$$2F = (R^2 - z^2)\pi - 2F'.$$

Es ist aber:

$$F' - D + S_{\alpha'} - S_{\varphi},$$

wo

D die Fläche des von a, $a + \xi^0$ und ϱ gebildeten Dreiecks,

$S_{\alpha'}$ die Fläche des vom Radius ϱ und der X-Achse,

S_{φ} die Fläche des von den Radien ϱ eingeschlossenen Kreissectors bedeuten. Dabei ist:

$$D = \tfrac{1}{4} \,.\, \sqrt{4(a + \xi^0)^2 a^2 - [a^2 + (a + \xi^0) - \varrho^2]^2},$$

$$S_{\alpha'} = \varrho^2 . \left[\pi - \arccos\left(\frac{\varrho^2 + (a+\xi^0)^2 - a^2}{2(a+\xi^0)\varrho}\right)\right],$$

$$S_\varphi = a^2 . \arccos\left(\frac{a^2 + (a+\xi^0)^2 - \varrho^2}{2(a+\xi^0)\varrho}\right).$$

Es ist daher:

$$\varDelta_E = C . 2F = C . [\varrho^2\pi - 2(D + S_{\alpha'} - S_\varphi)]$$

Dabei ist für Punkte: $\xi^0 = -\varrho$, d. h. für Punkte, die auf der Grenze des Endringes liegen:

$$D = 0, \quad S_\varphi = 0, \quad S_{\alpha'} = 0.$$

Daraus ergiebt sich die Bestimmung der Constanten C. Für derartige Punkte ist nach Formel D:

$$\varDelta = \frac{R^2 - z^2}{R^2} \cdot \varDelta_0,$$

nach obiger Formel aber:

$$\varDelta_E = C . (R^2 - z^2)\pi ;$$

daher:

$$C = \frac{\varDelta_0}{R^2 . \pi}$$

und:

$$\varDelta_E = \frac{1}{R^2\pi} \cdot [(R^2 - z^2)\pi - 2(D + S_{\alpha'} - S_\varphi)] . \varDelta_0$$

Die gefundenen Formeln gestatten leicht, die Dichte in allen Punkten sphärogener Körpér anzugeben, die irgend einer homogenen ebenen Fläche äquipotential sind, wenn diese von Kreisen oder Geraden begrenzt wird; eine besondere Berechnung erfordert jedesmal die Dichtenbestimmung innerhalb der Eckkugeln:

§. 10.

Potential sphärogener Körper auf innere Punkte.

Um das Potential sphärogener Körper auf innere Punkte zu finden, denken wir nur jede der erzeugenden Kugeln in unendlich viele concentrische Kugelschalen zerlegt.

Während auf äussere Punkte die ganzen Massen der erzeugenden Kugeln einwirken, kommen bei einem inneren Punkte diejenigen Schalen dieser Kugeln in Wegfall, welche den Punkt umschliessen, da das Potential einer homogenen Kugelschale auf einen inneren Punkt eine Constante ist. Bei Berechnung des Potentialwertes werden wir daher nur diejenigen Schalen der erzeugenden Kugeln zu berücksichtigen haben, für welche der afficierte Punkt ein äusserer ist.

Betrachten wir zunächst einen Punkt P (Fig. 9) innerhalb eines sphärogenen Cylinders mit den Coordinaten z, $y = 0$, $x = 0$. Auf diesen Punkt wirken noch mit ganzer Masse ein die Kugeln, deren Oberflächen durch ihn hindurchgehn, von den darauf folgenden, den Punkt P umschliessenden Kugeln aber nur derjenige kugelförmige Teil ihrer Masse, welcher die Entfernung R_n des Punktes P vom Mittelpunkte zum Radius hat. Denken wir uns daher die Massen dieser Kugeln auf die Y-Achse in den Elementen dm etc. concentrirt, so verhalten sich

$$dm : dm_1 \ldots dm_n = R^3 : R_1{}^3 \ldots R_n{}^3,$$

so dass also:

$$dm_n = \frac{R_n{}^3}{R^3} \cdot dm = \frac{\sqrt{(z^2+y^2)^3}}{R^3} . dm.$$

Es ist aber nach §. 5. die Dichte ε der dem Cylinder äquipotentialen linearen Masse ausgedrückt durch die Dichte δ_0 in unmittelbarer Nähe der Achse des sphärogenen Cylinders:

$$\varepsilon = \frac{dm}{ds} = \frac{2\pi R^2}{3} \cdot \delta_0 .$$

Diese Formel gilt nur, wenn der afficierte Punkt ein äusserer ist; liegt derselbe im Innern des Cylinders, so wird die zugehörige lineare Dichte ε_i ausgedrückt sein durch:

$$\varepsilon_i = \frac{dm_n}{ds} = \frac{\sqrt{(z^2+y^2)^3}}{R^3} \cdot \frac{2\pi R^2}{3} \delta_0$$
$$= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{(z^2+y^2)^3}}{R} \delta_0 .$$

Danach lässt sich das Potential P für einen inneren Punkt leicht berechnen.

Wir zerlegen dasselbe in zwei Teile P_1 und P_2, deren erster herrührt von den Kugeln, welche ganz ausserhalb des afficierten Punktes liegen; der zweite von den in Betracht kommenden Teilen der übrig bleibenden Kugeln:

$$P = P_1 + P_2 .$$

Alsdann ist:

$$P_2 = 2 \cdot \int_{y+0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\varepsilon_i dy}{\sqrt{z^2+y^2}} = 2 \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} (z^2+y^2) dy \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\delta_0}{R}$$
$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\delta_0}{R} \left[z^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}$$
$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R} \cdot \left[\frac{2z^2 + R^2}{3} \right] \cdot \delta_0 .$$

Das Potential P_1 lässt sich nach §. 5. ohne Schwierigkeit aufstellen.

Um das Potential für einen Punkt P im Innern eines sphärogenen Kreisringes zu berechnen, denken wir uns durch den Punkt P eine Ebene senkrecht zur Ringebene gelegt, welche die letztere in der Y-Achse schneiden mag. Betrachten wir ferner die erzeugenden Kugeln als zusammengesetzt aus lauter homogenen Kugelschalen, so sind für den Punkt P die Potentiale derjenigen Schalen constant, welche denselben umschliessen. Ziehen wir daher die Verbindungslinie R_n vom Punkte P nach dem Mittelpunkte einer ihn umschliessenden Kugel, so wird nur die Masse der Kugel (R_n) nach dem Mittelpunktselemente dm_n zu concentriren sein. Es würden sich daher die Massen in den Elementen dm_n, soweit sie innerhalb einer um P mit dem Radius R beschriebenen Kugel liegen, verhalten wie die Kuben der Radien R_n, also $dm : dm_1 : \ldots : dm_n = R^3 : R_1^3 : \ldots : R_n^3$.

Es ist aber:

$$R_n^2 = z^2 + \varrho_n^2 = z^2 + (a+y)^2 + a^2 - 2a(a+y)\cos\varphi_n,$$

und:

$$dm_n = \frac{R_n^3}{R^3} \cdot dm = \frac{\sqrt{(z^2+\varrho_n^2)^3}}{R^3} . dm;$$

ferner nach §. 6.:

$$\varepsilon = \frac{dm}{ds} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{\arccos\left[\frac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]} \cdot \frac{R^3}{a} . \delta_0;$$

daher:

$$\varepsilon_i = \frac{dm_n}{ds} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{\arccos\left[\frac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]} \cdot \frac{\sqrt{(z^2+\varrho_n^2)^3}}{a} . \delta_0 .$$

Nun ist:

$$P = 2\int_0^{\varphi} \frac{\varepsilon_i . a . d\varphi}{R_n}$$

$$= 2\int_0^{\varphi} \frac{2}{3} \frac{\pi}{\arccos\left[\frac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]} . \delta_0 . [z^2 + \varrho_n^2] . d\varphi$$

$$P = \tfrac{4}{3}\delta_0 \frac{\pi}{\arccos\left[\frac{2a^2 - R^2}{2a^2}\right]} . [\{z^2 + a^2 + (a+y)^2\}\varphi - 2a(a+y)\sin\varphi],$$

wo

$$\varphi = \arccos\left[\frac{(a+y)^2 + a^2 - R^2 + z^2}{2a(a+y)}\right].$$

Für Punkte ($y=0$, $z=0$) in der ringförmigen Achse ist demnach:

$$P=\frac{8a^2}{3}\cdot\frac{\pi}{\arccos\left[\frac{2a^2-R^2}{2a^2}\right]}\cdot[\varphi-\sin\varphi]\,.\,\delta_0,$$

wo

$$\varphi=\arccos\left[\frac{2a^2-R^2}{2a^2}\right].$$

Bei einer sphärogenen Platte, die einer homogenen ebenen Belegung entspricht, werden von allen Kugeln, die in gleicher Entfernung vom Punkte P liegen, gleiche Kugelschalen fortfallen.

Denken wir uns durch den Punkt P senkrecht zur Leitebene die Z-Achse gelegt und um den Fusspunkt derselben in unendlich kleinen Abständen von einander concentrische Peripherien beschrieben, so wird die Masse eines dieser unendlich dünnen Kreisringe in der Entfernung R_n vom Punkte P ausgedrückt sein durch die Formel:

$$dm_n=2\pi y_n\,.\,dy\,.\,\mu_n,$$

in der Entfernung R aber:

$$dm_R=2\pi y_R\,.\,dy\,.\,\mu_R.$$

Da aber die ebene Massenverteilung völlig homogen ist, also auf gleiche Flächenelemente eine gleiche Anzahl von Kugeln fällt, so verhalten sich die Massenelemente, d. h. die Dichten wie die Massen der zugehörigen Kugeln, oder wie die Kuben der Kugelradien:

$$\mu_R:\mu_1:\ldots:\mu_n=R^3:R_1{}^3:\ldots:R_n{}^3.$$

Es ist aber nach den beiden obigen Formeln:

$$\frac{\mu_n}{\mu_R}=\frac{dm_n}{dm}\cdot\frac{y_R}{y_n},$$

und nach der letzten:

$$\frac{\mu_n}{\mu_R}=\frac{R_n{}^3}{R^3};$$

daher:

$$dm_n=\frac{y_n}{y_R}\cdot\frac{R_n{}^3}{R^3}\,.\,dm.$$

Zerlegen wir nun wie oben das Potential der ganzen sphärogenen Platte in zwei Teile: P_1+P_2, deren erster herrührt von den Kugeln, für welche der Punkt P ein äusserer ist, der zweite aber von den sämmtlichen übrigen Kugeln, so ist:

$$P_2 = \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{dm_n}{R_n} = \frac{2\pi\mu_R}{R^3} \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} y_n(y_n^2 + z^2) . dy$$

$$= \frac{2\pi\mu}{R^3} . \left[\frac{y^4}{4} + \frac{z^2 . y^2}{2}\right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-z^2}}$$

$$= \frac{\pi . \mu}{2} . \left[\frac{R^4 - z^4}{R^3}\right].$$

Würde die ganze Ebene die homogene Dichte μ haben, so würde das Potential P_2 sich umwandeln in

$$P_2' = \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{2\pi y . dy . \mu}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$= 2\pi\mu . [R - z].$$

Daher kann man das Potential einer sphärogenen Tafel für einen inneren Punkt aus dem Potential für einen äusseren Punkt einfach erhalten, indem man von demselben die Differenz

$$D_{P_2} = P_2' - P_2 = \pi\mu . \left[2(R-z) - \frac{R^4 - z^4}{2R^3}\right]$$

subtrahirt.

Durch diese wie überhaupt sämmtliche im Verlaufe der Untersuchung gefundenen Formeln sind die Potentiale nur bis auf additive Constanten genau bestimmt.

III.

Potential des sphärischen Dreiecks.

Von

R. Hoppe.

Ein sphärisches Dreieck, wie jedes Dreieck, lässt sich in 3 Dreiecke zerlegen, deren eine Ecke ein beliebig gewählter Punkt ist. Wir wählen als gemeinsame Ecke den Punkt D, welcher auf gerader Linie mit dem Mittelpunkt M und dem vom sphärischen Dreieck ABC angezogenen Punkte P liegt. Fällt dieser innerhalb ABC, so ist

$$ABC = BCD + CAD + ABD$$

In andern Fällen sind irgend welche dieser 3 Teile negativ zu rechnen, unter Umständen auch die ganze Kugelfläche zu addiren. Es handelt sich also zunächst nur um Berechnung des Potentials V eines solchen Dreiecks ABD.

Sei D Anfang sphärischer Polarcoordinaten φ, ψ, und zwar ψ sphärischer Radiusvector von D aus, φ Azimut von DA aus; dann ist das sphärische Flächenelement, wenn man den Kugelradius $= 1$ setzt,

$$= \partial\varphi\,\partial\psi \sin\psi$$

Bezeichnet r die Entfernung desselben von P, und ist $MP = e$, so hat man:

$$r^2 = e^2 + 1 - 2e\cos\psi \tag{1}$$

Die Anziehung der Flächeneinheit in der Entfernung $= 1$ auf den Punkt P sei $= 1$; dann ist das Potential eines sphärischen Flächenstücks

$$V = \iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi \sin\psi}{r}$$

Wir lassen erst ψ über die Transversale $DN = \psi_0$, dann φ über den Winkel

$$ADB = \nu$$

variiren; dann ist das Potential des Dreiecks ABD

$$V = \int_0^\nu \partial\varphi \int_0^{\psi_0} \frac{\partial\psi \sin\psi}{r} \tag{2}$$

oder, da nach (1)

$$r\partial r = e\partial\psi \sin\psi$$

ist,

$$V = \frac{1}{e}\int_0^\nu \partial\varphi \int_{\psi=0}^{\psi=\psi_0} \partial r \tag{3}$$

Je nachdem P ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt, hat man für $\psi = 0$:

$$r = \pm(e-1)$$

Ist entsprechend der obern Grenze

$$r_0^2 = e^2 + 1 - 2e\cos\psi_0 \tag{4}$$

so wird

$$V = \frac{1}{e}\int_0^\nu r_0\partial\varphi \mp \frac{e-1}{e}\nu \tag{5}$$

Sei

$$DE = 2h$$

das sphärische Lot von D auf AB, also Kathete des rechtwinkligen Dreiecks DEN; dann hat man:

$$\cos EDN = \cos(EDA - \varphi) = \operatorname{tg} 2h \cot\psi_0$$

und nach Differentiation:

$$\partial\varphi \sin EDN = -\frac{\partial\psi_0 \operatorname{tg} 2h}{\sin^2\psi_0}$$

also nach (4)

$$\partial\varphi = -\frac{r_0\,\partial r_0 \operatorname{tg} 2h}{e\sin^3\psi_0\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 2h\cot^2\psi_0}}$$

$$= -\frac{r_0\,\partial r_0 \sin 2h}{e\sin^2\psi_0\sqrt{\cos^2 2h - \cos^2\psi_0}}$$

Dies eingeführt in (5) giebt:

$$V = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{r_0^2\,\partial r_0 \sin 2h}{e^2\sin^2\psi_0\sqrt{\cos^2 2h - \cos^2\psi_0}} \mp \frac{e-1}{e}\nu$$

wo

$$PA = r_1; \qquad PB = r_2$$

Nachdem man ψ_0 gemäss (4) in r_0 ausgedrückt hat, kann man r statt r_0 schreiben und erhält:

$$V = \int_{r_2}^{r_1} \frac{8er^2 \partial r \sin 2h}{[4e^2 - (e^2 + 1 - r^2)^2] \sqrt{4e^2 \cos^2 2h - (e^2 + 1 - r^2)^2}} \mp \frac{e-1}{e} \nu$$

$$= \int_{r_2}^{r_1} \frac{8er^2 \partial r \sin 2h}{[(e+1)^2 - r^2][r^2 - (e-1)^2] \sqrt{(m^2 - r^2)(r^2 - m^2 k'^2)}} \mp \frac{e-1}{e} \nu$$

wo

$$m^2 = e^2 + 1 + 2e \cos 2h$$

$$k'^2 = \frac{e^2 + 1 - 2e \cos 2h}{e^2 + 1 + 2e \cos 2h}$$

gesetzt ist. Der rationale Bruch lässt sich folgendermassen zerlegen:

$$\frac{8er^2}{[(e+1)^2 - r^2][r^2 - (e-1)^2]} = 2 \frac{(e+1)^2}{(e+1)^2 - r^2} + 2 \frac{(e-1)^2}{r^2 - (e-1)^2}$$

$$= \frac{2r^2}{(e+1)^2 - r^2} + \frac{(e-1)^2}{2e \cos^2 h} \frac{m^2 - r^2}{r^2 - (e-1)^2} + \frac{m^2}{2e \cos^2 h}$$

Der Ausdruck zerfällt demnach in 4 Teile:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= 2 \sin 2h \int_{r_2}^{r_1} \frac{r^2}{(e+1)^2 - r^2} \frac{\partial r}{\sqrt{(m^2 - r^2)(r^2 - m^2 k'^2)}} \\
V_2 &= \frac{(e-1)^2}{e} \operatorname{tg} h \int_{r_2}^{r_1} \frac{m^2 - r^2}{r^2 - (e-1)^2} \frac{\partial r}{\sqrt{(m^2 - r^2)(r^2 - m^2 k'^2)}} \\
V_3 &= \frac{m^2}{e} \operatorname{tg} h \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial r}{\sqrt{(m^2 - r^2)(r^2 - m^2 k'^2)}} \\
V_4 &= \mp \frac{e-1}{e} \nu
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Hier ist V_3 elliptische Function 1. Gattung für den conjugirten Modul k', V_1 und V_2 3. Gattung in der Form, in welcher sie sich direct in Jacobi'schen Functionen darstellen lassen. Sei

$$\Theta_1(u,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-n^2\tau+2niu}$$

$$H_1(u,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})^2\tau+(2n+1)iu}$$

$$\Theta(u,\tau)=\Theta_1(u-\mathrm{R},\tau);\qquad H(u,\tau)=H_1(u-\mathrm{R},\tau)$$

dann wird τ bestimmt durch

$$\frac{\Theta(0,\tau)}{\Theta_1(0,\tau)}=\sqrt{k'}=\sqrt[4]{\frac{e^2+1-2e\cos 2h}{e^2+1+2e\cos 2h}} \tag{7}$$

ferner u durch

$$\frac{\Theta_1(u,\tau)}{\Theta(u,\tau)}=\frac{r}{m\sqrt{k'}}=\frac{r}{\sqrt[4]{(e^2+1)^2-4e^2\cos^2 2h}} \tag{8}$$

$$\frac{H_1(u,\tau)}{\Theta(u,\tau)}=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{r^2-m^2k'^2}{kk'}}$$

$$\frac{H(u,\tau)}{\Theta(u,\tau)}=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m^2-r^2}{k}}$$

Nach dieser Substitution wird sogleich

$$\frac{\partial r}{\sqrt{(m^2-r^2)(r^2-m^2k'^2)}}=-\frac{\partial u}{m}\Theta_1{}^2(0,\tau) \tag{9}$$

Ferner werden 2 Parameter λ, μ bestimmt durch

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\Theta_1 0\, Hi\lambda}{iH_1 0\,\Theta i\lambda}=\dfrac{m}{2\sqrt{e}\sin h};\quad \dfrac{\Theta 0\, H_1 i\lambda}{H_1 0\,\Theta i\lambda}=\dfrac{e+1}{2\sqrt{e}\sin h};\quad \dfrac{\Theta 0\Theta_1 i\lambda}{\Theta_1 0\Theta i\lambda}=\coth\\[2ex] \dfrac{\Theta 0\, Hi\mu}{iH_1 0\Theta_1 i\mu}=\dfrac{\sin h}{\sqrt{\cos 2h}};\quad \dfrac{\Theta_1 0 H_1 i\mu}{H_1 0\Theta_1 i\mu}=\dfrac{\cos h}{\sqrt{\cos 2h}};\\[2ex] \dfrac{\Theta\, 0\Theta\, i\mu}{\Theta_1 0\Theta_1 i\mu}=\pm\dfrac{e-1}{m}\end{array}\right\} \tag{10}$$

Führt man dies ein, und geht u für $r=r_1$, r_2 über in u_1, u_2, so kommt:

$$V_1=\frac{e+1}{e}\,\frac{iHi\lambda\Theta i\lambda\Theta_1 i\lambda}{H_1 i\lambda}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\Theta_1{}^2u\,\partial u}{\Theta(u+i\lambda)\,(\Theta(u-i\lambda)} \tag{11}$$

$$V_2=\mp\frac{e-1}{e}\,\frac{iHi\mu\,\Theta i\mu\Theta_1 i\mu}{H_1 i\mu}\int_{u_1}^{u_2}\frac{H^2u\,\partial u}{H_1(u+i\mu)\,H_1(u-i\mu)} \tag{12}$$

$$V_3 = \frac{m}{e} \operatorname{tg} h \,.\, \Theta_1{}^2 0 (u_2 - u_1) \tag{13}$$

und nach Integration:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \quad \frac{e+1}{e}\left\{\frac{i}{2}\log\frac{\Theta\,(u_2+i\lambda)\Theta(u_1-i\lambda)}{\Theta\,(u_2-i\lambda)\Theta(u_1+i\lambda)} - i\,\frac{H_1{}'i\lambda}{H_1{}'i\lambda}(u_2-u_1)\right\} \\ V_2 &= \pm\,\frac{e-1}{e}\left\{\frac{i}{2}\log\frac{H_1(u_2+i\mu)H_1(u_1-i\mu)}{H_1(u_2-i\mu)H_1(u_1+i\mu)} - i\,\frac{H_1{}'i\mu}{H_1\;i\mu}(u_2-u_1)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wo das obere Zeichen einem äussern, das untere einem innern Punkte P entspricht.

Hier ist e die einzige von der sphärischen Figur unabhängige Grösse, die demnach für alle Teile derselben gleichen Wert hat. Die Zeichen τ, λ, μ, u_1, u_2, m, h hingegen haben in allen 3 Teildreiecken verschiedene Werte. Wir wollen letztere nach folgender Tabelle bezeichnen:

Im Dreieck	sei gesetzt für m	h	k	τ	λ	μ	u_1	u_2	ν
BDC	m_1	h_1	k_1	τ_1	λ_1	μ_1	u_1	u_1'	ν_1
CDA	m_2	h_2	k_2	τ_2	λ_2	μ_2	u_2	u_2'	ν_2
ADB	m_3	h_3	k_3	τ_3	λ_3	μ_3	u_3	u_3'	ν_3

Ausserdem sei der Kugelradius jetzt $= c$, und bezeichne V das Potential des Dreiecks ABC. Liegt D innerhalb ABC, so ist

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 4\mathrm{R}$$

und man hat:

$$\begin{aligned} V = \frac{e+c}{e}\frac{ic}{2}\log &\left\{\frac{\Theta(u_1-i\lambda_1)\Theta(u_2-i\lambda_2)\Theta(u_3-i\lambda_3)}{\Theta(u_1+i\lambda_1)\Theta(u_2+i\lambda_2)\Theta(u_3+i\lambda_3)} \times \right. \\ &\qquad \left.\frac{\Theta(u_1'+i\lambda_1)\Theta(u_2'+i\lambda_2)\Theta(u_3'+i\lambda_3)}{\Theta(u_1'-i\lambda_1)\Theta(u_2'-i\lambda_2)\Theta(u_3'-i\lambda_3)}\right\} \\ \pm\,\frac{e-c}{e}\frac{ic}{2}\log &\left\{\frac{H_1(u_1-i\mu_1)H_1(u_2-i\mu_2)H_1(u_3-i\mu_3)}{H_1(u_1+i\mu_1)H_1(u_2+i\mu_2)H_1(u_3+i\mu_3)} \times \right. \\ &\qquad \left.\frac{H_1(u_1'+i\mu_1)H_1(u_2'+i\mu_2)H_1(u_3'+i\mu_3)}{H_1(u_1'-i\mu_1)H_1(u_2'-i\mu_2)H_1(u_3'-i\mu_3)}\right\} \\ + G_1(u_1'-u_1) &+ G_2(u_2'-u_2) + G_3(u_3'-u_3) \mp \frac{e-c}{e} 4\mathrm{R}c \end{aligned} \tag{15}$$

wo, gültig für die Indices 1, 2, 3,

$$G = \frac{cm\operatorname{tg}h}{e}\,\Theta_1{}^2 0 - \frac{ic}{e}\left\{(e+c)\,\frac{H_1{}'i\lambda}{H_1 i\lambda} \pm (e-c)\,\frac{H_1{}'i\mu}{H_1 i\mu}\right\}$$

$$m^2 = e^2 + c^2 + 2ce\cos 2h$$
$$(mk')^2 = e^2 + c^2 - 2ce\cos 2h$$
$$\frac{\Theta(0,\tau)}{\Theta_1(0,\tau)} = \sqrt{k}; \quad \frac{\Theta_1(u,\tau)}{\Theta(u,\tau)} = \frac{r}{m\sqrt{k'}}; \quad \frac{\Theta_1(u',\tau)}{\Theta(u',\tau)} = \frac{r'}{m\sqrt{k'}}$$
$$r_3 = r_2' = AP; \quad r_1 = r_3' = BP; \quad r_2 = r_1' = CP$$
$$\frac{\Theta_1(0,\tau)\Theta(i\lambda,\tau)}{\Theta(0,\tau)\Theta_1(i\lambda,\tau)} = \frac{\Theta(0,\tau)H(i\mu,\tau)}{i\Theta_1(0,\tau)H_1(i\mu,\tau)} = \operatorname{tg} h$$

ist, und der nicht geschriebene Modul τ immer den gleichen Index mit dem Argument hat.

Seien nun $c\alpha$, $c\beta$, $c\gamma$, unterschieden durch die Indices 1, 2, 3, die rechtwinkligen Coordinaten der 3 Ecken, ξ, η, ζ die des angezogenen Punktes P für den Anfangspunkt M und beliebige Axenrichtung; dann handelt es sich darum V als Function von ξ, η, ζ darzustellen.

Zunächst hat man:

$$e^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$
$$r_3{}^2 = r_2'^2 = (\xi - c\alpha_1)^2 + (\eta - c\beta_1)^2 + (\zeta - c\gamma_1)^2; \quad \text{etc. oder}$$
$$= e^2 + c^2 - 2c(\xi\alpha_1 + \eta\beta_1 + \zeta\gamma_1); \quad \text{etc.}$$

Den Wert von h findet man leicht auf trigonometrischem Wege, sofern $2h$ das sphärische Höhenlot im Dreieck BCD ist. Hiernach hat man:

$$\sin 2h_1 = \sin BD \sin CBD$$
$$= \frac{1}{\sin BC}\sqrt{\{\sin^2 BC - \cos^2 BD - \cos^2 CD + 2\cos BC\cos BD\cos CD\}}$$
$$\cos 2h_1 = \sqrt{\frac{\cos^2 BD + \cos^2 CD - 2\cos BC\cos BD\cos CD}{1 - \cos^2 BC}}$$

und zwar ist

$$\cos BC = \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3$$
$$\cos BD = \frac{\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta}{e}$$
$$\cos CD = \frac{\alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta}{e}$$

woraus durch Vertauschung der Indices die Werte von $\cos 2h_2$, $\cos 2h_3$ hervorgehen.

Geht MP nicht durch ABC, so geht es durch eins der Dreiecke

$$A'BC, \quad AB'C, \quad ABC',$$
$$AB'C', \quad A'BC', \quad A'B'C,$$
$$A'B'C',$$

wo A', B', C' die diametralen Gegenpunkte von A, B, C sind. Jenachdem 1, 2 oder 3 Ecken Gegenpunkte sind, ist 1, 2 oder 3 der Teildreiecke negativ zu nehmen. In den 2 ersten Fällen wird einer der 3 Winkel bei D gleich der Summe der beiden andern und hebt sich dagegen, so dass der Term $\frac{e-c}{e}4\mathrm{R}c$ wegfällt. Die beiden letzten Fälle kann man aber auch auf den ersten und den ursprünglichen zurückführen, indem man statt des convexen Dreiecks ABC das concave, welches jenes zur Kugelfläche ergänzt, in die entsprechenden Stücke zerlegt. Dann hat man ursprünglich:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

und in den 3 Fällen:

$$V = V_1 + V_2 - V_3$$
$$V = V_0 - (V_1' + V_2' - V_3')$$
$$V = V_0 - (V_1' + V_2' + V_3')$$

wo V_0 das Potential der Kugelfläche, nämlich

$$\frac{8\mathrm{R}c^2}{e} \text{ für äussern, } 8\mathrm{R}c \text{ für innern Punkt,}$$

bezeichnet.

Der Uebergang aus einer Lage von P in die angrenzende geschieht, indem D eine Dreiecksseite, dann die Verlängerung einer andern überschreitet. Auf der Grenze verschwindet das entsprechende h; man kann es von da als negativ betrachten. Dasselbe gilt von μ; dagegen wird $\lambda = \frac{1}{2}\tau$. Der entsprechende Term von V verschwindet und wird bei fernerem Wachsen von λ negativ.

Bei verschwindendem μ wird für ein im Dreieck gelegenes D, wo zwischen u_1 und u_2 der Wert $u = \mathrm{R}$ liegt, die zu integrirende Function in (12) unstetig, sofern $H_2(u \pm i\mu)$ zwischen den Integrationsgrenzen verschwindet. Aus Gl. (5) ist zu ersehen, dass dann der betreffende Term nicht verschwindet, sondern, da r constant $= e - c$ wird, sich gegen den 4. Term hebt, so dass der ursprüngliche Fall bei erster Ueberschreitung einer Dreiecksseite stetig in den folgenden übergeht, in welchem der 4. Term null ist. Bei Ueberschreitung einer Seitenverlängerung hingegen kann zwischen den Integralgrenzen u nicht $= \mathrm{R}$ werden; die 3 ersten Terme sind also stetig und der 4. Term bleibt null.

Die Formel für das Potential eines Dreiecks gilt offenbar für jedes Vieleck, wo nur die Anzahl der homologen Stücke gleich der Seitenzahl zu setzen ist, die Form aller Bestandteile von V aber dieselbe bleibt.

Der Fall, dass einer dieser Bestandteile nicht elliptisch ist, tritt ein, wenn die in D zusammen stossenden Seiten eines Teildreiecks Quadranten sind. Hier nämlich wird $2h = \mathrm{R}$, $k' = 1$, und umgekehrt. Man hat demnach, da

$$r_0 = \sqrt{e^2 + c^2}$$

ist, nach Gl. (5) für das Teildreieck:

$$V = \frac{\sqrt{e^2 + c^2} \mp (e - c)}{e}$$

für die Halbkugel, deren Pol D,

$$V = 4\mathrm{R}c \frac{\sqrt{e^2 + c^2} \mp (e - c)}{e}$$

Subtrahirt man dies vom Potential der ganzen Kugelfläche, so erhält man für die abgekehrte Kugelhälfte:

$$V = 4\mathrm{R}c \frac{e + c - \sqrt{e^2 + c^2}}{e}$$

mag P ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegen.

IV.

Elemente der Determinantentheorie.

Von

R. Hoppe.

Die folgende Bearbeitung geht aus dem Gesichtspunkt hervor, dass die der Determinantentheorie eigentümlichen einfachen, allgemeinen und weitgreifenden Schlüsse ihren eigentlich instructiven Kern bilden, der nicht durch umständliche Methoden verdeckt werden darf. Alle Vorbereitung durch specielle Rechnung, alle unnötige Zerlegung verwerfe ich und zeige, dass zur Herleitung keines elementaren Satzes eine Anwendung der Unterdeterminanten erforderlich ist. Die Kenntniss der letztern ist deshalb nicht überflüssig.

§. 1. Gesetz der Determinantenbildung.

Die Determinante eines Systems von n Reihen zu je n Elementen, die sich demgemäss folgendermassen in ein Quadrat ordnen lassen

$$\begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \overset{1}{a}_2 & \ldots & \overset{1}{a}_n \\ \overset{2}{a}_1 & \overset{2}{a}_2 & \ldots & \overset{2}{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{n}{a}_1 & \overset{n}{a}_2 & \ldots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix} \qquad \text{(D)}$$

wird erhalten, indem man das Product der in der Diagonale von links oben nach rechts unten stehenden Elemente

$$\overset{1}{a}_1 \; \overset{2}{a}_2 \ldots \overset{n}{a}_n$$

bildet, dann die untern Indices alle Permutationen durchlaufen lässt, und bei jeder Vertauschung von 2 Indices das Vorzeichen des Products wechselt, endlich alle so erhaltenen Producte addirt.

Sie wird bezeichnet durch das geordnete System von nn Elementen zwischen 2 Verticalstrichen, wie oben zu sehen ist. Je nach der Reihenzahl n heisst sie $n$ter Ordnung.

Statt der untern Indices kann man auch die obern permutiren; oder was dasselbe ist die Horizontalreihen lassen sich zu Verticalreihen machen und umgekehrt; die Determinante bleibt unverändert.

§. 2. Beobachtungen.

1) Jeder Term einer Determinante enthält aus jeder Reihe (horizontalen wie verticalen) ein und nur ein Element als Factor.

2) Bei Vertauschung zweier parallelen Reihen wechseln alle Terme, folglich auch die Determinante ihr Vorzeichen, ohne Veränderung ihres absoluten Wertes.

§. 3. Lehrsätze.

1) Sind 2 horizontale oder 2 verticale Reihen in allen entsprechenden Elementen einander gleich, und man vertauscht sie, so bleibt natürlich die Determinante unverändert. Nach Beob. 2) vertauscht sie aber ihr Vorzeichen. Folglich ist sie null, und man hat den Satz:

Eine Determinante mit 2 gleichen parallelen Reihen ist null.

2) Nach Beob. 1) müssen alle Terme verschwinden, sobald alle Elemente einer Reihe verschwinden, und man hat den Satz:

Eine Determinante ist null, wenn eine Reihe null ist.

§. 4. Multiplication einer Determinante mit einem Factor.

Multiplicirt man alle Elemente einer Reihe mit demselben Factor m, so multipliciren sich nach Beob. 1) alle Terme mit m und das Multiplicationsgesetz lautet:

Eine Determinante wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man eine beliebige Reihe damit multiplicirt.

§. 5. Addition gewisser Determinanten.

Die bekannte Regel über die Multiplication einer Summe s mit einem Factor m lässt sich so ausdrücken: ms ist gleich der Summe

der Werte, welche durch Substitution aller Terme von s für s aus ms erhalten werden. Ist nun jedes Element einer Reihe einer Determinante die Summe von k Teilen, so hat nach Beob. 1) jeder Term eine solche Summe zum Factor; folglich wird jeder Term, also auch die ganze Determinante widererhalten, wenn man für jede der n Summen gleichzeitig ihren ersten, dann ihren zweiten, u. s. w. endlich ihren $k$ten Teil substituirt und die k Resultate addirt. Das Ergebniss können wir in zweierlei Form aussprechen:

Eine Determinante lässt sich in eine Summe von k Determinanten zerlegen, die man erhält, indem man jedes Element einer Reihe in k Teile zerlegt und dieselben nach einander für die Summe substituirt.

Mehrere Determinanten, welche nur in einer Reihe ungleich sind, werden addirt, indem man die entsprechenden Elemente der ungleichen Reihe addirt.

In Verbindung mit §. 4. folgt hieraus:

Sind $D_1, D_2, \dots D_k$ Determinanten, die nur eine Reihe ungleich haben, und $m_1, m_2, \dots m_k$ beliebige Grössen, so kann man die Summe

$$m_1 D_1 + m_2 D_2 + \dots m_k D_k$$

in eine Determinante verwandeln, indem man die ungleiche Reihe jedes D mit dem zugehörigen m multiplicirt und die Producte addirt.

Jetzt folgt in Verbindung mit Lehrsatz 1):

Eine Determinante bleibt unverändert, wenn man zu einer Reihe das $m$fache einer parallelen Reihe addirt; mithin auch, wenn man von einer Reihe Teile streicht, welche einer parallelen Reihe proportionirt sind.

§. 6. Multiplication zweier Determinanten.

Sei

$$\overset{h}{c}_k = \overset{1}{a}_k \overset{1}{b}_h + \overset{2}{a}_k \overset{2}{b}_h + \dots \overset{n}{a}_k \overset{n}{b}_h$$

dann lässt sich die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} \overset{1}{c}_1 & \overset{1}{c}_2 & \dots & \overset{1}{c}_n \\ \overset{2}{c}_1 & \overset{2}{c}_2 & \dots & \overset{2}{c}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{n}{c}_1 & \overset{n}{c}_2 & \dots & \overset{n}{c}_n \end{vmatrix}$$

nach §. 5. bei successiver Anwendung auf die Summen $\overset{h}{c}_1, \overset{h}{c}_2 \dots \overset{h}{c}_n$ in n^n Determinanten zerlegen, die man erhält, indem man für jene Summen nach einander ihre Teile substituirt. Eine beliebige der n^n Determinanten ist dann

$$N = \begin{vmatrix} \overset{\alpha}{a}_1 \overset{\alpha}{b}_1 & \overset{\beta}{a}_1 \overset{\beta}{b}_2 & \dots & \overset{\nu}{a}_1 \overset{\nu}{b}_n \\ \overset{\alpha}{a}_2 \overset{\alpha}{b}_1 & \overset{\beta}{a}_2 \overset{\beta}{b}_2 & \dots & \overset{\nu}{a}_2 \overset{\nu}{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{\alpha}{a}_n \overset{\alpha}{b}_1 & \overset{\beta}{a}_n \overset{\beta}{b}_2 & \dots & \overset{\nu}{a}_n \overset{\nu}{b}_n \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\alpha}{b}_1 \overset{\beta}{b}_2 \dots \overset{\nu}{b}_n \begin{vmatrix} \overset{\alpha}{a}_1 & \overset{\beta}{a}_1 & \dots & \overset{\nu}{a}_1 \\ \overset{\alpha}{a}_2 & \overset{\beta}{a}_2 & \dots & \overset{\nu}{a}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{\alpha}{a}_n & \overset{\beta}{a}_n & \dots & \overset{\nu}{a}_n \end{vmatrix}$$

wo $\alpha, \beta, \dots \nu$ beliebige der Zahlen $1, 2, \dots n$ bezeichnen. Befinden sich unter ihnen irgend 2 gleiche Zahlen, so hat die Determinante zur Rechten 2 gleiche Verticalreihen, und N ist null. Folglich sind unter allen Systemen $(\alpha, \beta, \dots \nu)$ nur diejenigen in Rechnung zu bringen, welche durch Permutation aus dem System $(1, 2, \dots n)$ hervorgehen.

Bei jeder solchen Permutation wechselt nun nach Beob. 2) die Determinante zur Rechten ihr Vorzeichen $p$mal, wenn p Vertauschungen von 2 Zahlen dazu erforderlich sind, während der absolute Wert ungeändert bleibt. Setzt man also

$$A = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \overset{1}{a}_2 & \dots & \overset{1}{a}_n \\ \overset{2}{a}_1 & \overset{2}{a}_2 & \dots & \overset{2}{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{n}{a}_1 & \overset{n}{a}_2 & \dots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix}$$

so wird

$$N = (-1)^p \overset{\alpha}{b}_1 \overset{\beta}{b}_2 \dots \overset{\nu}{b}_n A$$

Hiernach ist A Factor aller Teile von C. Die Coefficienten von A aber gehen aus

$$\overset{1}{b}_1 \overset{2}{b}_2 \dots \overset{n}{b}_n$$

durch Permutation der obern Indices hervor, während ihr Vorzeichen, ausgedrückt durch $(-1)^p$, bei jeder Vertauschung von 2 Indices wechselt. Daher ist ihre Summe nach §. 1.

$$B = \begin{vmatrix} \overset{1}{b}_1 & \overset{1}{b}_2 & \dots & \overset{1}{b}_n \\ \overset{2}{b}_1 & \overset{2}{b}_2 & \dots & \overset{2}{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{n}{b}_1 & \overset{n}{b}_2 & \dots & \overset{n}{b}_n \end{vmatrix}$$

und man hat:

$$AB = C.$$

Es hat sich ergeben, dass man das Product zweier beliebigen Determinanten von gleicher Ordnung durch eine Determinante derselben Ordnung darstellen kann.

§. 7. Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.

Es sei gegeben das System von n linearen Gleichungen zwischen n Gesuchten $x_1, x_2, \dots x_n$

$$\begin{matrix} \overset{1}{a}_1 x_1 + \overset{1}{a}_2 x_2 + \dots \overset{1}{a}_n x_n = \overset{1}{u} \\ \overset{2}{a}_1 x_1 + \overset{2}{a}_2 x_2 + \dots \overset{2}{a}_n x_n = \overset{2}{u} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \overset{n}{a}_1 x_1 + \overset{n}{a}_2 x_2 + \dots \overset{n}{a}_n x_n = \overset{n}{u} \end{matrix}$$

Die Determinante des Coefficientensystems

$$D = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \overset{1}{a}_2 & \dots & \overset{1}{a}_n \\ \overset{2}{a}_1 & \overset{2}{a}_2 & \dots & \overset{2}{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{n}{a}_1 & \overset{n}{a}_2 & \dots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix}$$

geht nach Substitution von $\overset{h}{u}$ für $\overset{h}{a}_k$ über in

$$D_k = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \dots & \overset{1}{a}_{k-1} & \overset{1}{u} & \overset{1}{a}_{k+1} & \dots & \overset{1}{a}_n \\ \overset{2}{a}_1 & \dots & \overset{2}{a}_{k-1} & \overset{2}{u} & \overset{2}{a}_{k+1} & \dots & \overset{2}{a}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{n}{a}_1 & \dots & \overset{n}{a}_{k-1} & \overset{n}{u} & \overset{n}{a}_{k+1} & \dots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix}$$

Da die u Summen von je n Teilen sind, so kann man nach §. 5. diejenigen Teile streichen, deren Coefficienten den Verticalreihen in D_k gleich sind. Dann bleibt für $\overset{h}{u}$ nur übrig $\overset{h}{a}_k x_k$. Der gemeinsame Factor x_k der $k$ten Reihe, als Factor der Determinante herausgestellt, hat dann zum Coefficienten die Determinante D, und es wird

$$Dx_k = D_k$$

Ist nun D nicht null, so ist die beliebige Gesuchte

$$x_k = D_k : D$$

Ist hingegen D null, so sind alle Gesuchten unbestimmbar; denn wenn alle D_k null sind, so ist mindestens eine Gleichung durch jedes x_k erfüllt, wenn aber irgend ein D_k nicht null ist, so zeigt die resultirende Gleichung einen Widerspruch an. Hieraus folgt, dass für $D = 0$ nicht alle n Gleichungen von einander unabhängig sind. Vorausgesetzt, dass D nicht null ist, lautet das Ergebniss im Anschluss an die obige Anordnung:

Die $k$te Gesuchte ist gleich einem Bruch, dessen Nenner die Determinante des Coefficientensystems ist, und dessen Zähler daraus durch Substitution der Reihe der rechten Seiten für die $k$te Verticalreihe hervorgeht.

Sind alle u null, so sind auch alle D_k null. Die resultirende Gleichung zeigt, dass dann entweder alle x null sind, oder D null ist.

§. 8. Elimination.

Es seien m lineare Gleichungen zwischen n Gesuchten gegeben, in der Form, dass die rechten Seiten 0 sind; man soll $m-1$ Unbekannte eliminiren. Man bilde eine Determinante, deren erste $m-1$ Verticalreihen die Coefficienten der Eliminanden, und deren letzte Verticalrelhe die linken Seiten der Gleichungen bilden. Nach Lehrs. 2) ist sie $=0$, und nach §. 5. kann man alle Terme der Gleichungen, welche die Eliminanden enthalten, streichen. Hieraus ergibt sich die praktische Regel, wobei die anfangs §. 7. aufgestellte Gleichungsform vorausgesetzt ist:

Man ordne die Terme der Gleichungen so, dass die Eliminanden vor den übrigen Unbekannten kommen, streiche die Eliminanden nebst den nachfolgenden Additionszeichen, setze statt $=$ das Zeichen $-$, ziehe links und rechts einen Verticalstrich, und setze die so erhaltene Determinante $=0$.

§. 9. Unterdeterminanten.

Da nach Beob. 1) jeder Term der in §. 1. aufgestellten Determinante D einen und nur einen Factor aus der $k$ten Verticalreihe enthält, so hat die Determinante die Form:

$$D = \overset{1}{a_k}\,\overset{1}{d_k} + \overset{2}{a_k}\,\overset{2}{d_k} + \ldots \overset{h}{a_k}\,\overset{h}{d_k} + \ldots \overset{n}{a_k}\,\overset{n}{d_k}$$

und zwar ist d_k eine Summe von Producten von je $n-1$ Elementen des Systems (D). Die obern Indices jener Elemente sind der Reihe nach

$$1,\ 2, \ldots h-1,\ \ h+1, \ldots n$$

die untern in jeder möglichen Reihenfolge

$$1,\ 2, \ldots k-1,\ \ k+1, \ldots n$$

und mögen der Reihe nach sein

$$\alpha,\ \ \beta \ldots \mu$$

Das Vorzeichen aber ist $(-1)^{p+q}$, wo p und q die Anzahlen der Vertauschungen je zweier Zahlen bedeuten, welche nötig sind, um die Reihe $1, 2, \ldots n$ bzhw. in die Reihe $h, 1, 2, \ldots h-1, h+1, \ldots n$ und in die Reihe $k, \alpha, \beta, \ldots \mu$ überzuführen. Nach §. 1. wird demnach $\overset{h}{d_k}$ nach dem Gesetz einer Determinante aus einem System von $n-1$ Reihen zu $n-1$ Elementen gebildet, welches sich von dem System (D) nur dadurch unterscheidet, dass die $h$te Horizontalreihe und die $k$te Verticalreihe fehlt, während der Anfangsterm

der neuen Determinante im voraus das Vorzeichen $(-1)^{h+k}$ statt $+$ hat.

Die Grösse $\overset{h}{d_k}$ heisst die dem Element $\overset{h}{a_k}$ entsprechende Unterdeterminante, und zwar ist $(-1)^{h+k}\overset{h}{d_k}$ die Determinante des Systems (D) nach Unterdrückung der $h$ten Horizontal- und $k$ten Verticalreihe.

Wie hier die Determinante nach Elementen einer Verticalreihe entwickelt ist, kann man sie natürlich auch nach Elementen einer Horizontalreihe entwickeln.

Bemerkung.

Jeden der vorstehenden Sätze, jede Anordnung, Beobachtung und Regel wende der Studirende nach Auffassung der allgemeinen Argumentation auf Determinanten 2. und 3. Ordnung an. Eines weitern bedarf es nicht, um eine genügende Vertrautheit mit der Determinantenrechnung, soweit sie in der analytischen Geometrie vorkommt, zu erlangen.

Für die Determinanten 3. Ordnung ist noch folgende Bemerkung wichtig. Jede cyklische Permutation der Indices oder Reihen, d. h. jedes Fortschreiten in der Folge 1, 2, 3, 1, 2, 3 lässt das Vorzeichen der Determinanten, sowie ihrer Terme unverändert; die aufsteigende Folge (123, 231, 312) entspricht dem $+$ Zeichen, die absteigende (321, 213, 132) dem $-$ Zeichen jedes Terms, und zwei $-$ Zeichen geben ein $+$.

V.

Die Regelfläche vierten Grades mit zwei Doppelgeraden.

Von

Adolf Ameseder.

Art. 1. Das Erzeugniss zweier zweideutiger Punktreihen $\varDelta_1(\alpha\alpha')$ und $\varDelta_2(\beta\beta')$ auf zwei windschiefen Geraden $\varDelta_1$ bzhw. $\varDelta_2$ ist eine Regelfläche vierten Grades φ^4. Denn legen wir durch eine willkürlich angenommene Gerade g eine Ebene A und weisen ihr jene Ebenen B, B' desselben Büschels als entsprechend zu, welche durch die dem Schnittpunkte α, von A und $\varDelta_1$ zugeordnetem Punkte β, β' der Reihe gehen; so erhalten wir dadurch zwei zweideutige coaxiale Ebenenbüschel $g(A)$ und $g(B)$, welche vier Doppelebenen besitzen. Jede Doppelebene enthält zwei einander entsprechende Punkte α und β der erzeugenden Reihen, also eine Erzeugende $\mathfrak{e}$ selbst; g wird demnach von vier Erzeugenden geschnitten und φ^4 ist, was zu beweisen war, von der vierten Ordnung und Classe.

Einem Punkte α von $\varDelta_1$ entsprechen zwei Punkte β, β' auf $\varDelta_2$ (und umgekehrt), welche mit dem ersten verbunden die in diesem Punkt sich schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e} \equiv \overline{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{e}' \equiv \overline{\alpha\beta'}$ liefern. Diese zwei Erzeugenden liegen in einer Ebene $(\alpha\varDelta_2) \equiv \varepsilon$ des Büschels $\varDelta_2$ und bestimmen mit $\varDelta_1$ zwei Ebenen $(\beta\varDelta_1) \equiv \delta$ und $(\beta'\varDelta_1) \equiv \delta'$, welche, wenn ε das Büschel $\varDelta_2(\varepsilon\varepsilon')$ durchläuft, das mit diesem in zweideutiger Beziehung stehende Ebenenbüschel $\varDelta_1(\delta, \delta')$ bilden.

Die beiden Büschel $\varDelta_1(\delta\delta')$ und $\varDelta_2(\varepsilon\varepsilon')$ liegen mit den erzeugenden Reihen $\varDelta_2(\beta\beta')$, $\varDelta_1(\alpha\alpha')$ wechselweise perspectivisch und erzeugen ebenfalls die Regelfläche φ^4; jedes ihrer Elemente d. h. jede

Ebene, welche $\varDelta_1$ oder $\varDelta_2$ enthält, ist eine Doppeltangentenebene der Fläche, mit auf $\varDelta_1$ bzhw. $\varDelta_2$ liegenden Berührungspunkten, und jeder Punkt der Geraden $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ ist ein Doppelpunkt der Fläche, die Tangentialebenen derselben in ihm sind durch $\varDelta_1$ bzhw. $\varDelta_2$ und die ihn enthaltenden zwei Erzeugenden bestimmt.

„Das Erzeugniss zweier zweideutiger Gebilde auf zwei windschiefen Geraden $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ ist eine Regelfläche vierten Grades, welche $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ zu Doppelgeraden hat.“

Art. 2. Die durch einen Punkt α von $\varDelta_1$ laufenden Erzeugenden e', e'' bestimmen mit $\varDelta_1$ die zwei Tangentialebenen δ, δ' von φ^4 im untersuchten Punkt. Durch die Schnittpunkte β', β'' dieser Ebenen mit $\varDelta_2$ geht noch je eine Erzeugende e_1', e_1'', welche auf $\varDelta_1$ die zweiten Berührungspunkte α', α'' von δ resp. δ' mit φ^4 fixiren.

Die Punkte α und α', α'' sind zwei-zweideutig verwandt, die durch sie gebildeten Reihen haben daher vier Doppelpunkte d_1', d_2', d_3', d_4'. Es existiren demnach in der Reihe $\varDelta_2(\beta\beta')$ vier Punkte c_1', c_2', c_3' und c_4' von der Eigenschaft, dass die einem jeden derselben, etwa c_1' entsprechenden Punkte α, α' auf $\varDelta_1$ zusammenfallend, einen Doppelpunkt d_1' constituiren. Wir nennen diese Punkte nach Weyr die Verzweigungspunkte der Reihe $\varDelta_2(\beta\beta')$; ein jeder solcher, so c_1' hat die Eigenschaft, dass die in ihm sich schneidenden Erzeugenden, welche in der Ebene $(c_1'\varDelta_1) \equiv v_1'$ liegen, mit der Geraden $c_1'd_1' \equiv s_1'$ coincidiren.

Die Ebene v_1' berührt die Regelfläche längs der Geraden c_1', welche deshalb eine singuläre Erzeugende derselben ist; sie bestimmt mit $\varDelta_2$ die zwei Tangentialebenen der φ^4 im Punkte c_1', diese fallen also zusammen und bilden eine Doppelebene δ_1', der aus den Tangentialebenen der Fläche in Punkten von $\varDelta_2$ bestehenden, ebenfalls, wie leicht einzusehen, zwei zweideutigen, coaxialen Ebenenbüschel $\varDelta_2(\varepsilon, \varepsilon')$.

Während die Regelfläche in irgend einem Punkt der Geraden $\varDelta_2$, zwei getrennte Tangentialebenen besitzt, fallen diese, dem Gesagten zufolge für c_1' (und $c_2' \dots c_4'$) mit δ_1' zusammen; die Fläche berührt sich also im Punkte c_1', und zwar längs der Ebene δ_1' — sie hat daher c_1' zum Cuspidalpunkt. Weil sich in diesem Punkte zwei unendlich benachbarte, in e_1' vereinigte Erzeugende von φ^4 durchschneiden, ist jede Gerade t, welche durch c_1' geht, als Tangente der Fläche in diesem Punkte zu betrachten, und eben deshalb haben wir auch irgend eine Ebene des Büschels c_1' als Tangentialebene von φ^4, mit dem Berührungspunkt c_1' anzusehen. Unter allen diesen

Ebenen nimmt, wie erwähnt, δ_1' insofern eine ausgezeichnete Stellung ein, als sich die Fläche an sie im Punkte c_1' und zwar doppelt anschmiegt. Doch auch die δ_1' entsprechende Verzweigungsebene v_1' von Δ_1, zeichnet sich, und zwar dadurch aus, dass sie φ^4 nicht nur in c_1', sondern in allen Punkten von e_1' tangirt. Besonders innig wird diese Berührung im Schnittpunkt d_1' von e_1' mit Δ_1, da jede Gerade, welche durch diesen Punkt in der Ebene v_1' gezogen wird, in ihm vier unendlich nahe Punkte mit φ^4 gemein hat; jede solche Gerade ist also eine Inflexionstangente, und d_1' selbst ein Inflexionspunkt der Regelfläche.

Da auch die Reihen $\Delta_2(\beta\beta')$ vier Doppelpunkte d_1'', d_2'', d_3'', d_4'' und dem entsprechend $\Delta_1(\alpha\alpha')$ vier Verzweigungspunkte c_1'', c_2'', c_3'', c_4'' haben, und für diese Punkte auch das oben Gesagte gilt, können wir das Resultat dieser Untersuchung nun folgendermassen zusammenfassen:

„Die Regelfläche φ^4 mit zwei Doppelgeraden Δ_1, Δ_2 besitzt acht Cuspidalpunkte und acht Inflexionspunkte.

Die ersteren sind die Verzweigungspunkte, die letztern die Doppelpunkte der erzeugenden Reihen $\Delta_1(\alpha\alpha')$, $\Delta_2(\beta\beta')$. Die acht Verbindungslinien je zweier zusammengehöriger Punkte der genannten Gruppen sind die singulären Erzeugenden der Fläche. Diese wird längs derselben von den Verzweigungsebenen der, auch φ^4 erzeugenden Ebenenbüschel $\Delta_1(\delta, \delta')$ und $\Delta_2(\varepsilon, \varepsilon')$ berührt, während die Doppelebenen derselben die Fläche in den Cuspidalpunkten tangiren“.

Je eine Verzweigungsebene des einen Büschels Δ_1 geht durch einen Verzweigungspunkt der andern erzeugenden Reihe Δ_2, und ebenso liegt immer ein Doppelpunkt der letztern in einer Doppelebene des ersteren.

Art. 3. Eine Ebene E von beliebiger Lage schneidet die Regelfläche φ^4 in einer Curve vierter Ordnung C_8^4, welche die Schnittpunkte der Ebene mit den Doppelgeraden Δ_1, Δ_2 zu Doppelpunkten hat, also von der achten Classe. Diese Curve kann man als das Erzeugniss jener zweideutigen Strahlenbüschel erhalten, in welchen die die Ebenenbüschel $\Delta_1(\delta\delta')$, $\Delta_2(\varepsilon\varepsilon')$ von E geschnitten werden; sie hat in einem ihrer Doppelpunkte die Schnittlinien von E und den Tangentialebenen der φ^4 im genannten Punkt zu Tangenten. Die aus diesem Punkt an sie gelegten vier Tangenten sind hingegen die Schnittlinien der Ebene E mit den vier Verzweigungsebenen jenes Büschels, auf dessen Axe der Doppelpunkt sich befindet; ihre Be-

rührungspunkte liegen auf den zugehörigen, d. h. auf jenen singulären Erzeugenden von φ^4, welche in den bezeichneten Verzweigungsebenen liegen. Die Regelfläche berührt sich in jedem Cuspidalpunkt c; es wird daher die Ebene E, wenn sie durch einen solchen geht, φ^4 in einer Curve C_7^4 schneiden, die in C einen Rückkehrpunkt hat; weil die sonst getrennten Doppelpunktstangenten der C_7^4 in C nun coincidiren. Die Curve ist in diesem Fall blos von der siebenten Classe.

Enthält die Ebene E zwei, und zwar nicht auf derselben Doppelgeraden liegende Cuspidalpunkte c', c''; so ist ihre Schnittcurve C_6^4 von der vierten Ordnung und sechsten Classe. Die Regelfläche φ^4 enthält sechszehn Büschel derartiger Curven.

Wir haben bereits erwähnt, dass eine durch einen Inflexionspunkt, und zwar in der ihm beigeordneten Verzweigungsebene gezogene Gerade t, eine Inflexionstangente der Fläche, also auch jeder derselben eingeschriebenen Curve ist, deren Ebene t enthält.

Wir sehen daraus, dass eine ebene Curve, welche auf φ^4 liegt und durch einen Inflexionspunkt d derselben läuft, notwendig entweder in ihm einen Inflexionspunkt hat, oder die durch d gehende singuläre Erzeugende e als Bestandteil enthält.

In dem letztern Fall enthält jedoch ihre Ebene die genannte Erzeugende selbst und schneidet φ^4 ausser in e, in einer Curve C_6^3, dritter Ordnung sechster Classe, die sowol d als auch den auf e befindlichen Cuspidalpunkt c zu einfachen Punkten hat.

Dies gilt ganz allgemein für jede Ebene, die durch irgend eine Erzeugende $\mathfrak{e}$ von φ^4 gelegt ist. Jede solche bestimmt auf φ^4 eine Curve C_6^3, welche $\mathfrak{e}$ ausser in den Schnittpunkten dieser Geraden mit Δ_1 und Δ_2 in einem dritten mit E variabeln Punkt b schneidet. Dieser dritte Punkt ist bekanntlich der Berührungspunkt der Ebene E; er fällt aus diesem Grund, wenn E eine singuläre Erzeugende e enthält, mit dem auf dieser befindlichen Cuspidalpunkt c zusammen [1]), und C_6^3 selbst berührt demnach e in c.

„J e d e d e r R e g e l f l ä c h e φ^4 e i n g e s c h r i e b e n e e b e n e C u r v e, w e l c h e d u r c h e i n e n C u s p i d a l p u n k t g e h t, h a t i n i h m e n t w e d e r e i n e n R ü c k k e h r p u n k t, o d e r s i e b e r ü h r t d i e d u r c h i h n g e h e n d e s i n g u l ä r e E r z e u g e n d e“.

„J e d e a u f φ^4 l i e g e n d e e b e n e C u r v e, w e l c h e d u r c h e i n e n I n f l e x i o n s p u n k t l ä u f t, h a t i n i h m e n t w e d e r a u c h

1) Weil nach Art. 2. jede durch e gelegte Ebene die φ^4 in c berührt.

einen solchen, oder ihre Ebene enthält die durch ihn gehende singuläre Erzeugende.“

„Eine Ebene von allgemeiner Lage schneidet φ^4 in einer Curve vierter Ordnung, achter Classe, welche zwei auf Δ_1 resp. Δ_2 liegende Doppelpunkte hat.“

„Enthält die Ebene eine Erzeugende, so bestimmt sie auf φ^4 eine allgemeine Curve dritter Ordnung (sechster Classe), welche sowol Δ_1 als auch Δ_2 einpunktig schneidet.“

Eine Curve $C_8{}^4$ ist durch drei Punkte vollkommen bestimmt.

Eine Curve $C_6{}^3$ ist hingegen durch zwei Punkte p', p'' zweideutig gegeben, da ihre Ebene durch $\overline{p'p''}$ und eine jede, jener zwei Erzeugenden von φ^4 gelegt werden kann, die $\overline{p'p''}$ in von p', p'' verschiedenen Punkten begegnen.

Aus dem letzten Satz folgt auch u. A.:

„Gleitet eine Gerade an einer allgemeinen, ebenen Curve dritter Ordnung (sechster Classe) $C_6{}^3$, und zwei windschiefen Geraden Δ_1, Δ_2, deren jede $C_6{}^3$ einpunktig schneidet, so erzeugt sie eine Regelfläche φ^4 etc.

Durch einen Punkt Θ' einer ebenen Curve der Regelfläche φ^4 geht nur eine Erzeugende $\mathfrak{e}'$ hindurch; sie schneidet Δ_1 in einem Punkt α, durch welchen wieder ausser $\mathfrak{e}'$ nur $\mathfrak{e}''$ läuft. Diese Erzeugende bestimmt auf der ebenen Curve einen Punkt Θ'', der offenbar mit Θ' involutorisch liegt.

Die Gerade $\overline{\Theta'\Theta''}$ befindet sich in der Ebene der Curve und einer der Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, schneidet also Δ_2 in demselben Punkte Ω, in welchem diese die Curve trifft.

„Das Erzeugniss einer centralen, quadratischen Involution auf einer ebenen, allgemeinen Curve dritter Ordnung und einer ihr projectivischen Reihe auf einer $C_6{}^3$ einpunktig schneidenden Geraden Δ_1, ist, wenn sich der gemeinschaftliche Punkt einmal selbst entspricht, eine Regelfläche φ^4.

Der Punkt Ω ist das Involutionscentrum, durch ihn läuft die Doppelgerade Δ_2. Ist diese gegeben, so können wir die in irgend einem Punkt α von Δ_1 sich schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ construiren. Wir legen zu dem Zweck durch α und Δ_2 die Ebene ε

diese schneidet C_6^3 ausser in Ω in zwei conjugirten Punkten Θ', Θ'' der erzeugenden Involution, welche Punkte mit α verbunden, die gesuchten Erzeugenden liefern.

Diese Erzeugenden sind daher gleichzeitig mit den Schnittpunkten Θ', Θ'' von ε mit C_6^3 reell und imaginär.

Aus Ω kann man an C_6^3 vier Tangenten t_1'', t_2'', t_3'', t_4'' legen, welche mit Δ_2 die Verzweigungsebenen v_1'', v_2'', v_3'', v_4'' des Büschels Δ_2, und deren Berührungspunkte b_1'', b_2'', b_3'', b_4'' mit den Schnittpunkten der Ebenen und der Doppelgeraden Δ_1, nämlich den auf dieser liegenden Cuspidalpunkten c_1'', c_2'', c_3'', c_4'' und zwar in angegebener Reihenfolge verbunden, die vier singulären Erzeugenden e_1'', e_2'', e_3'', e_4'' bestimmen.

Lassen wir nun einen Strahl $\overline{\Theta'\Theta''}$, des Scheines der Involution sich um Ω, also die Ebene ε um Δ_2 drehen. Der Punkt α durchläuft während der Drehung die Gerade Δ_1 und fällt dann mit einem Cuspidalpunkt c_1'' zusammen, wenn ε mit v_1'' oder also $\overline{\Theta'\Theta''}$ mit t_1' coincidirt.

Es ist nun bekannt und leicht analytisch nachzuweisen, dass wenn eine Gerade z. B. hier $\overline{\Theta'\Theta''}$ sich um den Punkt Ω von C_6^3 drehend, vor ihrer Coincidenz mit einer aus Ω an C_6^3 gelegten Tangente, so t_1'', die genannte Curve in zwei reellen Punkten Θ', Θ'' schneidet, diese Punkte imaginär werden, wenn $\overline{\Theta'\Theta''}$ die Gerade t_1'' überschritten hat, und so lange imaginär bleiben, bis bezeichneter Strahl mit einer andern aus Ω an C_6^3 gelegten Tangente t_2'' zusammenfällt, um fortan bis zu t_3'' reell zu bleiben etc.

Da aber mit den Punkten Θ', Θ'' auch die in der Ebene $(\Theta'\Theta''\alpha) \equiv \varepsilon$ liegenden Erzeugenden e', e'', gleichzeitig reell und imaginär sind, sehen wir, dass wenn die sich in einem Punkt α von Δ_1 schneidenden Erzeugenden reell sind, sie dann, wenn α nach einer bestimmten Richtung auf Δ_1 sich bewegend, den nächsten Cuspidalpunkt c_1'' überschritten hat, imaginär werden und so lange es bleiben, bis α mit den auf c_1'' folgenden Cuspidalpunkt c_2'' coincidirt, um dann bis c_3'' reell zu sein etc.

„Die vier auf einer Doppelgeraden liegenden Cuspidalpunkte teilen dieselbe in vier Strecken, von welchen je zwei nicht benachbarte gleichartig, d. h. gleichzeitig eigentlich oder ideell sind.“

Legen wir also durch einen Punkt von Δ_1, etwa α, und die Gerade Δ_2 die Ebene ε, so wird diese φ^4 in reellen Erzeugenden e',

c'' schneiden, wenn α ein eigentlicher, in imaginären, wenn α ein ideeller Doppelpunkt der Fläche ist.

Im erstern Fall sind aber auch die Schnittpunkte β', β'' von c', c'' und Δ_2, d. h. die Berührungspunkte der Ebene ε mit φ^4 reell, während sie dann, wenn α ideell ist, imaginär sind.

Die Grenzen zwischen den Doppeltangentenebenen mit reellen und jenen mit imaginären Berührungspunkten, bilden offenbar die Ebenen $(\Delta_1 c_1'')$, $(\Delta_2 c_1'')$ etc., d. h. die Verzweigungsebenen des Büschels Δ_2. Diese teilen also den vollen Winkel um Δ_2 in vier Winkelräume, deren je zwei nicht benachbarte gleichzeitig Doppeltangentenebenen mit reellen bzhw. imaginären Berührungspunkten enthalten. Wir wollen Räume erster Art reell, letzter Art kurz imaginär nennen [1]).

„Die vier Verzeigungsebenen eines der φ^4 erzeugenden Ebenenbüschel, teilen den vollen Winkel um ihre Axe Δ in vier Winkelräume, von welchen je zwei nicht benachbarte gleichartig, d. h. gleichzeitig reell oder imaginär sind."

Liegt z. B. ein Punkt P, sowohl in einem reellen Winkelraum von Δ_1, als auch von Δ_2, so hat der aus ihm der φ^4 umschriebene Kegel zwei eigentliche Doppeltangentenebenen etc.

Sind aber die vier Cuspidalpunkte von Δ_1 (d. h. jene die auf Δ_1 liegen) sämmtlich imaginär, so kann von einer Teilung der Geraden Δ_1 in eigentliche und ideelle Teile nicht die Rede sein. Jeder Punkt von Δ_1 ist in diesem Fall ein eigentlicher Doppelpunkt und jede Ebene des Büschels Δ_2 eine eigentliche Doppeltangentenebene der Regelfläche [2]).

Diese Untersuchung hätte auch, wie leicht einzusehen ist, unter Vermittlung einer ebenen Curve $C_8{}^4$, oder eines beliebigen φ^4 umschriebenen Kegels geschehen können; im letztern Fall natürlich in reciproker Weise.

Denn wie für $C_6{}^3$ können wir auch für den allgemeinsten Schnitt zeigen, dass die in Punkten einer Doppelgeraden sich schneidenden Erzeugenden auf ihm eine Involution bilden; das Involutionscentrum

---

1) Die hier eingeführten Bezeichnungen für die Singularitäten der Fläche φ^4 sind jenen von Hrn. Prof. Dr. Emil Weyr in seinem Werk „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse 1—2 deutiger Elementargebilde i. b. der Regelfläche 3ten Grades" Leipzig 1871 gebrauchten analog.

2) Vergleiche den Art. 10.

ist nun selbstverständlich ein Doppelpunkt der C_8^4, da durch dasselbe die zweite Doppelgerade Δ_2 der φ^4 läuft.

Art. 4. Die oben für ebene Curven der Regelfläche φ^4 nachgewiesenen Eigenschaften, gelten im Allgemeinen auch für räumliche, auf ihr liegende Curven.

Eine Fläche $n$ter Ordnung $\mathfrak{f}^n$ schneidet φ^4 in einer Raumcurve R^{4n}, $4n$ter Ordnung, welche die $2n$ Schnittpunkte der Doppelgeraden Δ_1 und Δ_2 mis $\mathfrak{f}^n$ zu Doppelpunkten hat.

Die Doppelpunktstangenten τ', τ'' der R^{4n} in einem solchen Punkte, α wollen wir ihn nennen, sind die Schnittlinien der Tangentialebene E von $\mathfrak{f}^4$ in α, mit den Tangentenebenen δ, δ' der Regelfläche φ^4 in demselben Punkt. Für einen Cuspidalpunkt c coincidiren die Ebenen δ, δ' mit der betreffenden Doppelebene δ; es fallen daher auch die Doppelpunkstangenten τ', τ'' zusammen und c ist demnach ein Rückkehrpunkt der Curve R^{4n}.

Ein eventuell vorkommender Berührungspunkt b beider Flächen ist auch ein Doppelpunkt ihres Schnittes R^{4n}.

Wenn $\mathfrak{f}^n$ durch c geht und in diesem Punkte eine Tangentialebene E besitzt, welche dem Büschel c angehört, so berührt sie in diesem Punkt die Fläche φ^4.

Die Durchschnittscurve R^{4n} hat nun in c einen Doppelpunkt. weil dieser ein Doppelpunkt der Fläche φ^4 ist, sie besitzt aber in ihm auch einen zweiten, dem ersten unendlich nahen Doppelpunkt, welcher von der Berührung beider Flächen herrührt, d. h. c ist ein Berührungsknoten der Curve R^{4n} und c die Tangente derselben in ihm.

„Eine auf der Regelfläche φ^4 liegende (räumliche oder ebene) Curve, welche durch einen Cuspidalpunkt läuft, hat in ihm entweder einen Rückkehrpunkt oder die betreffende singuläre Erzeugende zur Tangente."

Weil die Tangente der Curve R^{4n} in einem ihrer Punkte m, als Tangente von φ^4 immer in der Tangentialebene des Punktes liegen muss, folgt:

„Eine der Regelfläche φ^4 eingeschriebene Curve berührt die Verzweigungsebenen in ihren Schnittpunkten mit den singulären Erzeugenden."

Angenommen die Curve R^{4n} enthielte einen Inflexionspunkt d der Fläche φ^4; so können wir leicht zeigen, dass sie die durch α gehende Verzweigungsebene v im genannten Punkt zur Osculations-

ebene hat. Denn der Schnitt C^n der Ebene v und der Fläche $\mathfrak{f}^n$, bestimmt auf Δ_1 (wenn d auf dieser Geraden liegt), ausser d, $n-1$ Punkte α und ebenso auf e, der in v liegenden singulären Erzeugenden, ausser d noch $n-1$ Punkte a. Da sowohl Δ_1 als auch e als Schnitte von v mit φ^4 doppelt zu zählen sind, haben wir auch die $2n-2$ Punkte α und a doppelt zu zählen, d. h. für $4n-4$ Punkte zu rechnen. Da aber R^{4n} von der $4n$ ter Ordnung ist, hat sie notwendig in d vier unendlich nahe Punkte mit v gemein.

„Eine der Fläche φ^4 eingeschriebene Raumcurve, welche einen Inflexionspunkt enthält, hat in ihm im Allgemeinen die zugehörige Verzweigungsebene zur Osculationsebene.“ [1]).

Art. 5. Unter den auf φ^4 liegenden Raumcurven verdienen die Berührungscurven besonderes Interesse; wir gelangen zu ihnen durch Betrachtungen, welche dem in Art. 3. geführten reciprok sind. Die durch einen Punkt P und die Erzeugenden der Fläche φ^4 gelegten Ebenen umhüllen den aus P der Fläche umschriebenen Kegel. Dieser ist von der vierten Classe, weil irgend eine dem Bündel P angehörige Gerade nur vier Erzeugende $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_4$ von φ^4 schneidet, welche mit g die durch diese Gerade an den Kegel möglichen Tangentialebenen bestimmen. Er ist von der achten Ordnung, weil eine Ebene des Bündels P, von sonst allgemeiner Lage, die Fläche φ^4 in einer Curve vierter Ordnung, achter Classe schneidet und die aus P von $C_8{}^4$ gelegten Tangenten, Kanten des Kegels $K_4{}^8$ sind. Die zwei Doppeltangenten dieses Kegels sind durch P und Δ_1 bzhw. Δ_2 bestimmt.

Jede Kante des Kegels $K_4{}^8$ berührt die φ^4 im Allgemeinen in einem Punkt; der Ort desselben ist daher eine Curve achter Ordnung [2]); was übrigens schon daraus folgt, dass diese Curve als Hälfte des Gesammtschnittes der Flächen φ^4 und $K_4{}^8$, welcher von der Ordnung 32 ist, doppelt zu zählen ist. Jeder Punkt der Berührungscurve ist ja, weil sich in ihm die Flächen φ^4 und $K_4{}^8$ beruhen, ein Doppelpunkt des Gesammtschnittes.

Die durch das Centrum P und irgend eine singuläre Erzeugende c gelegte Ebene E berührt φ^4 in dem auf c liegenden Cuspidalpunkt c, und zwar einfach. Die Berührungscurve B^8 schneidet also jede

---

1) Diese drei letzten Sätze gelten im Allgemeinen für jede Regelfläche, weil wir bei der Beweisführung keine Eigenschaft der φ^4 als Fläche vierter Ordnung benutzt haben.

2) Weil in einer Ebene des Bündels P sich nicht Kanten von $K_4{}^8$ befinden und auf jeder Kante ein Punkt der Curve liegt.

Doppelgerade (Δ_1 und Δ_2) ausser in den Berührungspunkten α, α' bzhw. β, β', der durch die genannten Geraden und P bestimmten Doppeltangentenebenen in allen Cuspidalpunkten; sie hat daher beide Doppellinien von φ^4 zu sechspunktigen Secanten. Dies stimmt auch mit der Eigenschaft der B^8, jede Erzeugende der Fläche φ^4 zur einpunktigen Secante zur haben, überein.

Denn legen wir durch Δ_1 eine Ebene δ', so schneidet diese B^6 in acht Punkten, von welchen zwei auf den in δ' liegenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ und sechs auf Δ_1 sich befinden.

Die ersteren zwei Punkte coincidiren mit einem auf Δ_2 liegenden Cuspidalpunkt c'', wenn δ' mit der Verzweigungsebene $(\Delta_1 c'') = v'$ zusammenfällt. Dies lässt sich aber, weil, wie wir eben gesehen haben, B^8 durch jeden Cuspidalpunkt einfach geht, nur dahin erklären, dass diese Curven in c'' die singuläre Erzeugende $\mathfrak{c}''$ tangirt. Dies ist auch richtig, denn abgesehen davon, dass es mit den Resultaten des letzten Artikels ganz im Einklang steht; weil nämlich jeder Punkt von B^8 ein Doppelpunkt des Gesammtschnittes ist, und B^8 durch c'' geht, sie nach l. c. die $\mathfrak{c}'$ in c'' berühren müsste; lässt sich dies auch direct zeigen. Wir legen zu dem Ende durch $\mathfrak{c}''$ und Δ_2 eine Ebene, (welche nebenbei bemerkt, Doppelebene dieses Büschels ist); sie enthält ausser $\mathfrak{c}''$ noch eine Erzeugende $\mathfrak{c}$ von φ^4. Einer ihrer acht Schnittpunkte mit B^8 liegt auf $\mathfrak{c}$, weitere fünf sind die Punkte β, β' und die drei ausser c'' auf Δ_2 befindlichen Cuspidalpunkte c_1'', c_2'', c_3''. Weil nun die Tangentialebene der φ^4 in irgend einem Punkte der B^8 den Punkt P enthalten muss, und die φ^4 längs $\mathfrak{c}''$ berührende Verzweigungsebene v_1' nicht dem Bündel P angehört; können sich die letzten zwei in $(\Delta_2 \mathfrak{c}'')$ liegenden Punkte von B^8 nur in dem Schnittpunkt c'' von Δ_2 und $\mathfrak{c}''$ befinden.

Es haben also zwei durch $\mathfrak{c}''$ gehenden Ebenen $(\Delta_1 c'')$ bzhw. $(\Delta_2 \mathfrak{c}'')$ mit B^8 in c'' zwei unendliche nahe Punkte gemein, d. h. $\mathfrak{c}''$ berührt bezeichnete Curve in c''.

Die Berührungscurve B^8 kann nur dann einen eigentlichen Doppelpunkt besitzen, wenn zwei verschiedene Tangentialebenen des Kegels K_4^8 die Fläche φ^4 in demselben Punkte berühren. Dieser Punkt müsste daher auf Δ_1 oder Δ_2 liegen, und kann, wenn P im Raum, d. h. nicht auf φ^4 liegen soll, nur ein Cuspidalpunkt sein, und P müsste dann selbstverständlich einer Doppelebene der Büschel Δ_1 bzhw. Δ_2 angehören.

Die zwölf Rückkehrtangenten des Kegels K_4^8 rühren daher im

Allgemeinen nicht von Rückkehrpunkten der Curve B^8 her, sondern sie sind Tangenten derselben [1]).

Legen wir durch eine beliebige Gerade G und den Punkt P die Ebene E; so sehen wir, dass weil irgend eine Gerade g, welche durch P geht und in E liegt, ausser von den zwölf sie in P schneidenden Tangenten von B^8, von vier Tangenten dieser Curve, welche bzhw. in den vier durch g an $K_4{}^8$ gelegten Tangentenebenen sich befinden, resp. in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 geschnitten wird; dass der geometrische Ort dieser Punkte eine Curve sechszehnter Ordnung ist, die P zum zwölffachen Punkt hat und demnach auch G in zechszehn Punkten trifft.

Die aus den Tangenten der Berührungscurve B^8 bestehende developpable Fläche hat also das Centrum zum zwölffachen Punkt und ist von der Ordnung sechszehn, und daher B^8 selbst von demselben Rang.

„Der aus einem Punkt des Raumes der Regelfläche φ^4 umschriebene Kegel $N_4{}^8$ ist von der vierten Classe und achten Ordnung. Er hat zwei durch die Doppelgeraden $\varDelta_1$ bzhw. $\varDelta_2$ gehende Doppeltangentenebenen und berührt die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten.

Die Berührungscurve des Kegels $K_4{}^8$ hat keinen wirklichen Doppelpunkt, sie ist von der achten Ordnung und dem sechszehnten Rang. Sie hat die Doppelgeraden zu sechspunktigen Secanten, geht durch die acht Cuspidalpunkte und hat in ihnen die singulären Erzeugenden zu Tangenten.“

Eine Doppelebene δ_1 des Büschels $\varDelta_1$ (dasselbe ist von $\varDelta_2$ zu sagen) enthält ausser der singulären Erzeugenden e_1 noch eine Erzeugende e, welche mit e_1 auf $\varDelta_2$ den Doppel- bzhw. Inflexionspunkt d_1 bestimmt und berührt daher φ^4 in dem Cuspidalpunkt c_1 und in $(c\varDelta_1) \equiv \alpha$.

Umschreiben wir aus einem Punkt P der Ebene δ_1 der Fläche

---

1) Wenn eine Raumcurve (z. B. B^8) aus einem Punkt des Raumes (P) projicirt wird, so projiciren sich die Berührungspunkte der aus P an sie gelegten Taugenten als Rückkehrpunkte. Dasselbe geschieht aber auch mit einem Rückkehrpunkt der fraglichen Curve. Hat nun diese, wie z. B. B^8 keinen Rückkehrpunkt, so können wir aus der Anzahl der Rückkehrtangenten des Projectionskegels auf die Anzahl der im Centrum sich schneidenden Tangenten der Curve schliessen etc.

den Kegel K_4^8, so sehen wir, dass von den zwei sonst variablen Schnittpunkten α, α' der Berührungscurve B^8 mit Δ_1 einer nun mit c_1 coincidirt. Von den acht Punkten, in welchen B^8 von δ_1 geschnitten wird, liegen also zwei in α, je einer in einem der drei von c_1 verschiedenen Cuspidalpunkten von Δ_1 und daher drei unendlich nahe in c_1 selbst.

Es hat in diesem Fall nicht nur ein e_1, sondern auch Δ_1 mit B^8 zwei unendlich nahe in c_1 vereinigte Punkte, dieser ist also ein Doppelpunkt der Berührungscurve. Weil diese Curve auf K_4^8 liegt, müssen sich beide Doppelpunktstangenten in der Ebene δ_1 befinden; sie fallen aber zusammen (weil eben diese Ebene im genannten Punkt mit B^8 nur drei unendlich nahe Punkte gemein hat [1]) und bilden eine Rückkehrtangente; woraus wir wieder sehen, dass c_1 ein Rückkehrpunkt von B^8 ist.

Eine von den Rückkehrtangenten des Kegels K_4^8 ist jetzt $\overline{Pc_1}$, daher nur eilf Tangenten der Curve B^8; diese ist vom Range funfzehn.

„Die Berührungscurve B^8 des aus einem Punkt einer Doppelebene δ, eines der Erzeugenden Ebenenbüschel der Fläche φ^4 umschriebenen Kegels K_4^8, hat in dem auf δ liegenden Cuspidalpunkt einen Rückkehrpunkt. Sie ist von der achten Ordnung und dem funfzehnten Rang."

Sowohl diese, als die allgemeinere Berührungscurve B^8, haben acht durch P gehende, zweipunktige Secanten.

Nachdem eine Verzweigungsebene v die φ^4 längs einer singulären Erzeugenden c berührt; zerfällt der aus einem Punkt P derselben der Regelfläche umschriebene Kegel in die Ebene v und einen Kegel K_4^7, vierter Classe, siebenter Ordnung, welcher $(P\Delta_2)$ zur Doppeltangentenebene und $(P\Delta_1) \equiv v$ zur Inflexionsebene hat. Die Inflexionskante zielt nach dem in v gelegenen Inflexionspunkt α von φ^4. Die Berührungscurve des Kegels K_4^7 ist von der siebenten Ordnung und dem vierzehnten Rang, sie geht nicht durch den in v liegenden Cuspidalpunkt c und hat, wie man sich leicht direct über-

---

1) Die Ebene der Tangenten einer Raumcurve in einem eigentlichen Doppelpunkt Δ hat bekanntlich an dieser Stelle mit ihr mindestens vier unendlich nahe, von den zwei Tangenten herrührende Punkte gemein. Ist Δ ein Berührungsknoten und τ seine Tangente, so hat jede Ebene des Büschels τ mit der Curve vier unendlich nahe in Δ liegende Punkte. Ist hingegen Δ ein Rückkehrpunkt, so schneidet irgend eine Ebene der Rückkehrtangente die Curve in drei zusammenfallenden Punkten.

zeugt, in dem Inflexionspunkt d (von φ^4) die Ebene v zur Osculationsebene [1]).

Art. 6. Für ein auf der Regelfläche φ^4 liegendes Centrum P zerfällt der umschriebene Kegel in das von der durch P gehenden Erzeugenden $\mathfrak{e}$ bestimmte Ebenenbüschel, welches von der ersten Classe ist, und in einen Kegel dritter Classe. Die drei durch eine Gerade g des Bündels P an K_3 gelegten Tangentenebenen sind durch g und jene drei Erzeugenden von φ^4 bestimmt, welche g in von P verschiedenen Punkten treffen.

Eine durch P gelegte Ebene bestimmt auf φ^4 eine Curve C_8^4, vierter Ordnung, achter Classe. Ausser der Tangente t von C_8^4 in P, welche die Tangentialebene im genannten Punkt erfüllt, kann man an sie sechs Tangenten t' ziehen, welche die sechs in der Ebene (C_8^4) befindlichen Kanten von K_3 sind. Dieser Kegel ist daher von der sechsten Ordnung.

Die Fläche φ^4 hat in P ausser $\mathfrak{e}$ eine eigentliche Haupttangente τ, welche Inflexionstangente für jede Curve C_8^4 ist, deren Ebene durch sie geht. Eine von den sechs aus P an C_8^4 gelegten Tangenten fällt daher mit τ selbst zusammen, d. h. aus P kann man nur fünf Tangenten an $C_8^{4\prime}$ legen, welche sie in von P verschieden Punkten berühren. Die Haupttangente ist demnach auch eine Kante des Kegels K_3^6, und zwar jene, welche φ^4 berührt. Daraus folgt nun, dass die Berührungscurve des Kegels K_3^6 von der siebenten Ordnung ist, durch das Centrum P läuft und hier τ zur Tangente hat.

Wie B^8 geht auch B^7 durch die acht Cuspidalpunkte und berührt in ihnen die singulären Erzeugenden. Sie ist vom vierzehnten Rang, weil τ als Tangente von B^7 in P doppelt und jede der neun Rückkehrtangenten von K_3^6 einfach zu zählen sind.

„Der aus einem Punkt der Regelfläche φ^4 ihr umschriebene Kegel K_3^6 ist von der dritten Classe, sechster Ordnung und hat die durch die Doppelgeraden ge-

---

1) Ein Kegel K_4^7 entsteht aus einem Kegel K_4^8, wenn eine Doppeltangentenebene des letztern in eine Inflexionsebene übergeht. Im vorliegenden Fall ist v die Inflexionsebene, da die sonst getrennten Berührungskanten $\overline{Pa}$, $\overline{Pa'}$ jetzt mit $\overline{Pd}$ zusammenfallen. Die Ebene v hat also mit K_4^7 drei unendlich nahe in $\overline{Pd}$ vereinigte Kanten und daher mit B^7 drei unendlich nahe in d liegende Punkte gemein. Dass d ein einfacher Punkt von B^7 ist, folgt daraus, dass in einer Fbene δ' des Büschels Δ_1, zwei Erzeugende $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ von φ^4 uud auf jeder ein Punkt voe B^7 und vier weitere Punkte in den auf Δ_1 liegenden Cuspidalpunkt liegen etc.

legten Ebenen zu einfachen Tangentialebenen. Seine Berührungscurve ist von der siebenter Ordnung, dem vierzehnten Rang und berührt die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten. Sie läuft auch durch das Centrum P und hat in ihm die eigentliche Haupttangente von φ^4 zur Tangente."

Sie hat jede Doppelgerade, so $\varDelta_1$, zur fünfpunktigen Secante, der variable Schnittpunkt ist der $\varDelta_1$ und der zweiten in $(\mathfrak{e}\varDelta_1)$ liegenden Erzeugenden gemeinschaftliche Punkt.

Eine Berührungscurve B^8 ist durch drei Punkte eindeutig gegeben, da die Tangentialebenen von φ^4 in den drei Punkten, das Centrum bestimmen. Eine Curve B^7 hingegen erscheint durch zwei Punkte p', p'' von φ^4 zweideutig bestimmt, da ihr Centrum P ein jeder jener zwei Schnittpunkte der Schnittlinie g, der Tangentialebenen von φ^4 in p' bzhw. p'', mit φ^4 sein kann, deren keiner auf den durch p' und p'' gehenden Erzeugenden liegt. Denn aus dem Gesagten erhellt ja, dass B^7 mit der durch ihr Centrum gehenden Erzeugenden nur diesen und keinen weitern Punkt gemein hat.

Ist P ein Punkt einer singulären Erzeugenden, so berührt $K_3{}^6$ die Fläche φ^4 längs derselben und in einer Curve B^6, sechster Ordnung, die durch den auf e liegenden Inflexionspunkt d geht, den zugehörigen Cuspidalpunkt aber nicht enthält. Sie hat die Ebene v jedoch nicht zur Osculationsebene, welche Anomalie von dem in Art. 4. aufgestellten Satz aber in der besondern Natur der Berührungscurve und in der Tatsache, dass v in d beide Flächen, nämlich $K_3{}^6$ und φ^4 berührt, ihre Begründung findet.

Art. 7. Wie wir aus Artikel 2. sehen, ist die Regelfläche φ^4 durch ihre zwei Doppelgeraden $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ und eine ebene Curve $C_8{}^4$, vierter Ordnung, achter Classe, also durch $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ und acht in einer Ebene E liegende Punkte p bestimmt. Denn eine Curve $C_8{}^4$ ist ja durch ihre zwei Doppelpunkte und acht einfache Punkte, von allgemeiner Lage, eindeutig bestimmt. Die Ebene E schneidet nun die Doppelgeraden $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ in jenen Punkten D_1 bzhw. D_2, welche wir als Doppelpunkte der in E liegenden Curve $C_8{}^4$ ansehen können. Diese, welche noch die hinreichende Bedingung durch die acht Punkte p zu gehen, zu erfüllen hat, bestimmt mit $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$, als Leitlinie, die Fläche φ^4 eindeutig.

Um die durch irgend einen Punkt p_n von $C_8{}^4$ laufende Erzeugende von φ^4 zu construiren, legen wir durch p_n und $\varDelta_1$ die Ebene; sie schneidet die Doppelgerade $\varDelta_2$ in einem Punkt β, der mit p_n verbunden eine Gerade $\mathfrak{e}$ liefert, die, weil sie durch p_n geht und sowohl

Δ_1 als auch Δ_2 schneidet, also mit der durch Δ_1, Δ_2 und $C_8{}^4$ bestimmten Fläche φ^4 fünf Punkte gemein hat, ganz auf ihr liegt, d. h. die gesuchte Erzeugende ist.

Durch einen Punkt α von Δ_1 gehen zwei Erzeugende e', e'', welche wir als die, von $\overline{\alpha D_2}$ verschiedenen, in der Ebene $(\alpha\Delta_2)$ liegenden Kanten des aus α der Curve $C_8{}^4$ umschriebenen Kegels $K_8{}^4$ vierter Ordnung erhalten etc.

Auch weitere Constructionen können wir andeuten, z. B. die der auf Δ_1 liegenden Inflexionspunkte der Fläche, und zwar blos vermittelst $C_8{}^4$, Δ_1 und Δ_2. Wir legen zu dem Ende durch Δ_1 die vier Tangentialebenen an $C_8{}^4$ und bestimmen ihre Berührungspunkte mit dieser Curve, und ihre Schnittpunkte mit Δ_2. Entsprechende Punkte beider Gruppen verbunden, geben die vier singulären Erzeugenden, welche Δ_1 in den gesuchten Punkten treffen etc.

Doch auch dann, wenn die nicht gegebenen Punkte p beliebig im Raume angeordnet sind, bestimmen sie mit Δ_1 und Δ_2 die Fläche φ^4 eindeutig. Die durch sie gehenden acht Transversalen von Δ_1 und Δ_2 sind Erzeugende der Fläche. Sie werden von einer beliebigen Ebene E des Raumes in acht Punkten π getroffen, welche mit den in E liegenden Punkten der Geraden Δ_1 und Δ_2, diese als Doppelpunkte betrachtet, eine Curve $C_8{}^4$ festlegen. Diese Curve aber bestimmt mit Δ_1 und Δ_2, alle drei Linien als Leitlinien betrachtet, eine Fläche φ^4, die offenbar die acht Transversalen, also auch die acht gegebenen Punkte enthält.

Da eine Tangentialebene von φ^4 durch ihre Schnittpunkte α, β mit Δ_1 bzhw. Δ_2 auch eine Erzeugende der Fläche φ^4 fixirt, kann statt einer beliebigen Anzahl von Punkten eine gleich grosse Zahl von Ebenen gegeben werden.

„Die Regelfläche φ^4 ist durch ihre zwei Doppelgeraden und acht Erzeugende, oder eine Anzahl von Punkten und Tangentialebenen, deren Summe auch Acht ist, im Allgemeinen eindeutig bestimmt.“

„Die gegebenen Punkte können auch alle in einer Ebene liegen, und ebenso können die Tangentialebenen sich in einem Punkte schneiden.“

Nur darf die Verbindungslinie zweier Punkte, oder die Schnittlinie zweier gegebener Tangentialebenen nicht eine Transversale von Δ_1 und Δ_2 sein.

Für einen Fall bleibt jedoch die Aufgabe auch unter dieser Voraussetzung unbestimmt, und diesen wollen wir nun untersuchen.

Wir nehmen zu dem Zwecke an, zwei Regelflächen φ_1^4 und ψ_3^4 hätten dieselben Geraden $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ zu Doppelgeraden. Sie schneiden sich, da jede der genannten Geraden als Teil des Gesammtschnittes viermal zu zählen ist, noch in einer Curve R^8 achter Ordnung. Eine beliebige Ebene E schneidet R^8 in acht Punkten p; die durch einen solchen laufende Transversale $\mathfrak{e}$ von $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ ist nach Obigem sowohl eine Erzeugende von φ_1^4 als auch von φ_2^4, d. h. sie gehört beiden Flächen als Erzeugende an. Da dies für jeden der acht Punkte gilt, sehen wir, dass sich φ_1^4 und φ_2^4 ausser in $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ in acht Erzeugenden schneiden.

Hätten daher die gegebenen acht Erzeugenden die eben angedeutete specielle gegenseitige Lage, so bestimmen sie nicht eine, sondern ein ganzes Büschel von unendlich vielen Flächen behandelter Art.

„Zwei Regelflächen vierten Grades φ^4, welche gemeinschaftliche Doppelgeraden besitzen, schneiden sich in acht Erzeugenden. Diese bestimmen mit genannten Doppellinien ein Büschel der behandelten Fläche[1]).

Art. 8. Die Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ mit zwei Doppelgeraden und einer Doppelerzeugenden $\varDelta$, sowie auch jene $\mathfrak{f}_c^4$ mit einer Cuspidalerzeugenden[2]), sind specielle Arten der hier untersuchten; wir haben zu ihren in der Abhandlung: „Zur Theorie der Regelflächen vierten Grades und einer Doppelgeraden und einem Doppelkegelschnitt“[3]) gefundenen Eigenschaften noch Folgendes hinzu zu fügen.

Die Fläche $\mathfrak{f}^4$ wird von einer Ebene E in einer Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten geschnitten. Sie ist durch eine solche Curve C_6^4 um ihre zwei Doppelgeraden $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ eindeutig bestimmt. Ihre Doppelerzeugende $\varDelta_1$ ist jene Transversale genannter Geraden, welche durch den dritten Doppelpunkt der Curve läuft.

Da nun die Annahme, dass eine ebene Curve einen Doppelpunkt habe, wenn dieser nicht gegeben ist, für eine Bedingung gilt, und zwei Doppelpunkte der C_6^4 auf den Geraden $\varDelta_1$ bzhw. $\varDelta_2$ liegen müssen, ist diese Curve durch Angabe von sieben weitern Punkten eindeutig gegeben.

---

1) Es gilt ganz allgemein: Wenn zwei Regelflächen dieselben zwei windschiefen Geraden $\varDelta'$, $\varDelta''$ zu m- und n-fachen bzhw. μ- und ν-fachen Geraden haben, so schneiden sie sich in $(m\nu + n\mu)$ Erzeugenden. Der Grad der einen ist $m + n$, der der zweiten $\mu + \nu$.

2) Eine Cuspidalerzeugende hat die Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte ein Cuspidalpunkt der Fläche ist etc.

3) Siehe das Februarheft dieses Jahrg. d. Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. zu Wien.

Nehmen wir nun an, von $\mathfrak{f}^4$ wären Δ_1 unp Δ_2 sowie sieben Erzeugende e gegeben; so schneidet irgend eine Ebene E die Δ_1, Δ_2 in den Punkten D_1 resp. D_2 und die e in sieben Punkten p; sie schneidet aber $\mathfrak{f}^4$ in einer Curve $C_6{}^4$, welche die D_1, D_2 zu Doppelpunkten hat und durch die p einfach geht, durch diese Angaben daher vollkommen bestimmt ist.

Wäre die Doppelerzeugende Δ selbst bekannt, so ist durch ihren Schnitt D mit E, der dritte Doppelpunkt von $C_6{}^4$ fixirt; zur Bestimmung von $C_6{}^4$ genügt die Angabe von fünf Punkten, also die von fünf Erzeugenden der $\mathfrak{f}^4$.

Wir sehen daraus, dass die Regelfläche φ^4, mit einer Doppelerzeugenden $\Delta(\mathfrak{f}^4)$, durch ihre zwei Doppelgeraden Δ_1, Δ_2 und sieben Erzeugende (Punkte oder Tangentialebenen) bestimmt ist, wenn Δ selbst nicht gegeben ist. Dass jedoch, wenn Δ_1, Δ_2 und Δ bekannt sind, die Angabe von fünf Erzeugenden (oder Punkten und Tangentialebenen) genügt.

„Besitzt die Regelfläche φ^4 eine Doppelerzeugende Δ, so ist sie durch ihre zwei Doppelgeraden Δ_1, Δ_2 uud sieben Erzeugende (oder Punkte und Tangentialebenen) bestimmt. Ist ihre Doppelerzeugende bekannt, so genügt die Angabe von fünf einfachen Erzeugenden."

„Die Annahme, dass φ^4 eine Doppelerzeugende habe gilt für eine Bedingung; die Doppelerzeugende selbst jedoch für drei." [1])

In derselben Weise können wir zeigen, dass die Regelfläche $\mathfrak{f}_c{}^4$, mit einer Cuspidalerzeugenden Δ, durch die zwei Doppelgeraden Δ_1, Δ_2 und sechs Erzeugende e, oder durch Δ_1, Δ_2, Δ und vier Erzeugende bestimmt ist.

Denn schneiden wir die gegebenen Geraden durch eine Ebene E, so erhalten wir für den letzten Fall, die Punkte D_1, D_2, D und vier Punkte p. Die E schneidet nun $\mathfrak{f}_c{}^4$ (s. l. c.) in einer Curve $C_5{}^4$, die D_1 und D_2 zu Doppelpunkten, D zum Rückkehrpunkt hat, und durch die p einfach läuft. Da ein Rückkehrpunkt, wenn er bekannt ist, für vier, wenn er jedoch nur vorhanden ist, für zwei Bedingungen gilt, ist $C_5{}^4$ eindeutig gegeben. Lassen wir jetzt eine Gerade an $C_5{}^4$ und Δ_1, Δ_2 gleiten, so erzeugt sie eine ganz bestimmte Fläche $\mathfrak{f}_c{}^4$; diese ist demnach durch die gegebenen Daten fixirt.

„Besitzt die Regelfläche φ^4 eine Cuspidalerzeugende

---

1) Gilt für jede Regelfläche mit vielfachen Geraden.

Δ, so ist sie durch diese, ihre zwei Doppelgeraden Δ_1, Δ_2 und vier Erzeugende bestimmt. Ist Δ vorhanden, jedoch nicht gegeben, so erscheint φ^4 durch Δ_1, Δ_2 und sechs Erzeugende (oder Punkte und Tangentenebenen) erst bestimmt."

„Die Annahme φ^4 habe eine Cuspidalerzeugende, ist äquivalent zwei Bedingungen. Die Angabe der Cuspidalerzeugenden selbst jedoch gilt für vier Bedingungen." [1])

Die in Art. 7. für φ^4 blos angedeuteten Constructionen der Cuspidalpunkte, Inflexionspunkte und singulären Erzeugenden, können für $\mathfrak{f}^4$ und $\mathfrak{f}_c{}^4$ nebst andern Aufgaben mit Leichtigkeit gelöst werden. An die Stelle der Curve $C_8{}^4$, welche wir mit Δ_1, Δ_2 bei Lösung der bezeichneten Probleme als gegeben voraussetzten, tritt nun die Curve $C_6{}^4$ vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten bzhw. die Curve $C_5{}^4$ vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und einem Rückkehrpunkt; die an diesen Curven auszuführenden, zur Bestimmung genannter Singularitäten führenden Hilfsconstructionen jedoch, wie wir in der Abhandlung: „Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten" [2]) gezeigt haben, sind leicht durchzuführen. Uebrigens kann an die Stelle der Curven $C_6{}^4$ resp. $C_5{}^4$ immer ein $\mathfrak{f}^4$ oder $\mathfrak{f}_c{}^4$ eingeschriebener Kegelschnitt C^2 gesetzt werden, da dessen Ebene durch die Doppel- bzhw. Cuspidalerzeugende Δ bestimmt ist, und er jede der weiter gegebenen Erzeugenden $\mathfrak{e}$ schneiden muss. Reichen diese zu seiner Construction nicht hin, so kann man leicht eine beliebige Anzahl derselben, und zwar mit Hilfe der in l. c. erklärten Constructionen elementar bestimmen.

Obwohl wir in der $\mathfrak{f}^4$ und $\mathfrak{f}_c{}^4$ behandelnden Arbeit diese Flächen ausführlich besprochen, bemerken wir auch hier, dass jeder Kegelschnitt der $\mathfrak{f}_c{}^4$ die Cuspidalerzeugende tangirt.

Art. 9. Wir wollen die gefundenen Sätze auch analytisch nachweisen, da wir dadurch zu neuen Resultaten gelangen.

Es sei die eine Doppelgerade Δ_1 der Fläche φ^4, die wir im Folgenden immer als gegeben betrachten, die ξ Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems und ξ, v, ζ die Coordinaten irgend eines Punktes bezogen auf dasselbe. So ist die Gleichung irgend einer Ebene δ des Büschels Δ_1:

$$\alpha) \qquad \frac{v}{\xi} = n$$

---

1) Gilt auch allgemein.

2) Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Januarheft 1879.

und wenn

$$a\xi + bv + c\zeta + d = 0$$

und

$$a'\xi + b'v + c'\zeta + d' = 0$$

die Gleichungen irgend zweier durch die Doppelgerade Δ_2 gehender, nun als fest zu betrachtender Ebenen ε_I, ε_{II} sind, ist die Gleichung einer dritten variablen Ebene ε des Büschels Δ_2 die folgende:

$$\beta) \qquad \frac{a\xi + bv + c\zeta + d}{a'\xi + b'v + c'\zeta + d'} = m$$

Sowie in der Gleichung α) jedem n eine bestimmte Ebene des Büschels Δ_1 zugeordnet ist, entspricht auch in Gl. β) einem gewählten m eine Ebene ε eindeutig.

Die Bedingung, dass die Büschel $\Delta_1(\delta)$ und $\Delta_2(\varepsilon)$ eine Regelfläche φ^4 erzeugen, ist an die gegenseitige Zweideutigkeit derselben, also die folgende Gleichung gebunden:

$$1) \quad m^2(A_1n^2 + A_2n + A_3) + m(B_1n^2 + B_2n + B_3) + C_1n^2 + C_2n + C_3 = 0$$

Aus dieser Gleichung sehen wir, dass jedem Werte des m zwei Werte von n, also jeder Ebene ε von Δ_2 zwei Ebenen in Δ_1 und umgekehrt entsprechen.

Zwei entsprechende Ebenen beider Büschel schneiden sich in einer Erzeugenden e der Fläche, und umgekehrt bestimmt eine solche und daher auch ein Punkt p von φ^4 zwei einander zugeordnete Ebenen δ' und ε' von Δ_1 bzhw. Δ_2, also zwei correspondirende Werte der Teilverhältnisse m und n.

Die obige Gleichung enthält acht unabhängige Coefficienten, diese sind durch acht Wertpaare ven m und n, d. h. durch acht Punkte von φ^4 bestimmt.

Die Gleichung 1) bestimmt nun, wenn Δ_1, Δ_2 bekannt sind, die Fläche φ_4 selbst, diese ist, was wir früher synthetisch bewiesen, durch Δ_1, Δ_2 und acht Punkte oder Tangentialebenen, oder schliesslich ebensoviele Erzeugende gegeben etc.

Substituiren wir aus α) und β) die Werte von m und n in die Gleichung 1), so erhalten wir die folgende:

$$\begin{aligned}&(a\xi + bv + c\zeta + d)^2[A_1v^2 + A_2v\xi + A_3\xi^2] + \\ &(a\xi + bv + c\zeta + d)(a'\xi + b'v + c'\zeta + d')[B_1v^2 + B_2v\xi + B_3\xi^2] + \\ &(a'\xi + b'v + c'\zeta + d')^2(C_1v^2 + C_2v\xi + C_3\xi^2) = 0\end{aligned}$$

Diese nach den Potenzen der Variablen geordnet, liefert die Gleichung:

$$(A_1b^2+B_1bb'+C_1b^2)v^4+(A_2b^2+B_2bb'+C_2b'^2+2A_1ab+(ab'+a'b)B_2$$
$$+2C_1a'b')v^3\xi+(A_1a^2+B_1aa'+C_1a'^2+A_3b^2+B_3bb'+C_3b'^2+2A_2ab$$
$$+B_3(ab'+a'b)+2C_2a'b')v^2\xi^2+(A_2a^2+B_2aa'+C_2a'^2+2A_3ab$$
$$+B_3(ab'+a'b)+2C_3a'b')v\xi^3+(A_3a^2+B_3aa'+C_3a'^2)\xi^4$$
$$+(2A_1bd+B_1(bd'+b'd)+2C_1b'd')v^3+(2A_1ad+B_1(ad'+a'd)$$
$$+2C_1a'd'+2A_2bd+B_2(bd'+b'd)+2C_2b'd')v^2\xi$$
$$+(2A_2ad+B_2(ad'+a'd)+2C_2a'd'+2A_3bd+B_3(bd'+b'd)$$
$$+2C_3b'd')v\xi^2+(2A_3ad+B_3(ad'+a'd)+2C_3a'd')\xi^3$$
$$+(A_1d^2+B_1dd'+C_1d'^2)v^2+(A_2d^2+B_2dd'+C_2d'^2)v\xi$$
$$+(A_3d^2+B_3dd'+C_3d'^2)\xi^2$$
$$+\zeta[(2A_1bc+B_1(bc'+b'c)+2C_1b'c')v^3+(2A_1ac+B_1(ac'+a'c)$$
$$+2C_1a'c'+2A_2bc+B_2(bc'+b'c)+2C_2b'c')v^2\xi$$
$$+(2A_2ac+B_2(ac'+a'c)+2C_2a'c'+2A_3bc+B_3(bc'+b'c)$$
$$+2C_3b'c')\xi^2v+(2A_3ac+B_3(ac'+a'c)+2C_3a'c')\xi^3$$
$$+(2A_1cd+B_1(cd'+c'd)+2C_2c'd')v^2+(2A_2cd+B_2(cd'+c'd)$$
$$+2C_2c'd')v\xi+(2A_3cd+B_3(cd'+c'd)+2C^3c'd')]$$
$$+\zeta^2[(A_1c^2+B_1cc'+C_1c'^2)v^2+(A_2c^2+B_2cc'+C_2c'^2)v\xi$$
$$+(A_3c^2+B_3cc'+C_3c'_1)\xi^2]=0,$$

welche die Form hat:

$$\begin{aligned}2)\quad & \alpha_1\xi^4+\alpha_2\xi^3v+\alpha_3\xi^2v^2+\alpha_4\xi v^3+\alpha_5v^4+\alpha_6\xi^3+\alpha_7\xi^2v+\alpha_8\xi v^2\\ &+\alpha_9v^3+\alpha_{10}\xi^2+\alpha_{11}\xi v+\alpha_{12}v^2+\zeta(\beta_1\xi^3+\beta_2\xi^2v+\beta_3\xi v^2+\beta_4v^3\\ &+\beta_5\xi^2+\beta_6\xi v+\beta_7v^2)+\zeta^2(\gamma_1\xi^2+\gamma_2\xi v+\gamma_3v^2)=0.\end{aligned}$$

Dies ist also die Gleichung der Regelfläche φ^4 bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, in welchem die eine Doppelgerade Δ_1 von φ^4 die ζ Axe, und ξ, v und ζ die laufenden Coordinaten eines Flächenpunktes sind. Sie enthält einundzwanzig unabhängige Coefficienten, welche durch ebensoviele Gleichungen 2), d. h. durch einundzwanzig Punkte bestimmt sind. Daraus fliesst der Satz:

„Die Regelfläche φ^4 ist durch eine Doppelgerade und einundzwanzig Punkte oder einundzwanzig Tangentialebenen bestimmt.“

Vergleichen wir dieses Resultat mit der bekannten Tatsache, dass eine Fläche vierter Ordnung durch 34 Punkte gegeben ist und, dass wenn beide Doppelgeraden von φ^4 bekannt sind, die Angabe von acht Punkten zur Bestimmung von φ^4 genügt; so gelangen wir zu dem Ergebniss, dass eine Doppelgerade der φ^4 für 13 Bedingungen gilt.

Art. 10. Betrachten wir irgend eine Transversale τ von $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ als Coordinatenaxe, und bezeichnen wir die Entfernung eines Punktes α der Geraden $\varDelta_1$ von T mit x, und die eines Punktes β der $\varDelta_2$ von derselben Axe mit y; so können wir die Gleichung der Fläche φ^4, bezogen auf die Axe T folgend schreiben:

$$\text{I)} \quad x^2(a_1y^2+b_1y+c_1)+x(a_2y^2+b_2y+c_2)+a_3y^2+b_3y+c_3) = 0.$$

Auch diese Gleichung hat acht unabhängige Coefficienten, ist daher durch acht entsprechende Werte von x und y, d. h. durch acht Erzeugende der Fläche bestimmt etc.

Ist die Gleichung der Fläche in dieser Weise gegeben, so können wir die in irgend einem Punkt α_n von $\varDelta_1$ sich schneidenden Erzeugenden e', e'' dadurch fixiren, dass wir die, der dem Punkte α_n zukommenden Coordinate x entsprechenden zwei Werte der Coordinaten y aus I) berechnen und ihr Vorzeichen berücksichtigend, die ihnen zugeordneten Punkte β_n von $\varDelta_1$ bestimmen und mit α_n verbinden.

Umgekehrt entsprechen jedem y zwei x, wie wir aus der Auflösung der Gl. I), nämlich:

$$\text{II)} \quad x = \frac{-(a_2y^2+b_2y+c_2)\pm\sqrt{(a_2y^2+b_2y+c_2)^2-4(a_1y^2+b_1y+c_1)(a_3y^2+b_3y+c_3)}}{2(a_1y^2+b_1y+c_1)}$$

sehen; es schneiden sich also auch in jedem Punkte von $\varDelta_2$ zwei Erzeugende.

Wie wir der Gl. II) entnehmen können, gibt es auch Werte von y, deren zwei entsprechende Werte von x identisch sind.

Um sie zu bestimmen setzen wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, welchen wir kurz mit V bezeichnen, gleich Null. Er ist nach y vom vierten Grade, hat daher die Form:

$$\text{III)} \quad V = A_1y^4+A_2y^3+A_3y^2+A_4y+A_5.$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung sind also, wenn wir sie gleich Null setzen, die Coordinaten jener vier Punkte von $\varDelta_2$, deren jeder die Eigenschaft hat, dass die ihm in $\varDelta_1$ zugeordneten Punkte coincidiren. Diese Gleichung liefert uns demnach die vier Verzweigungspunkte der Reihe $\varDelta_2(\beta)$ bzhw. die vier auf $\varDelta_2$ liegenden Cuspidalpunkte, und mithin in Verbindung mit II) die vier auf $\varDelta_1$ gelegenen Inflexionspunkte der Regelfläche φ^4.

Wir könnten nun auch die in Art. 3. bewiesene Eigenschaft der Cuspidalpunkte, die Doppelgeraden in eigentliche und ideelle Strecken

zu teilen, mit Hilfe der Gl. II) und III) analytisch nachweisen; da aber die dazu notwendige Discussion der Gleichung vierten Grades zu viel Raum erfordern würde, begnügen wir uns, dies an der Regelfläche φ^4 mit zwei Doppelgeraden Δ_1, Δ_2 und einer Doppelerzeugenden Δ zu zeigen.

Um die Untersuchung recht einfach zu gestalten, wählen wir die als bekannt vorausgesetzte Doppelerzeugende Δ zur Coordinatenaxe T. Diese Annahme hat zur Folge, dass die beiden $y_0 = 0$ entsprechenden Werte von x auch gleich Null sind, d. h. dass für

$$y = 0 \quad \text{auch} \quad x_0' \equiv x_0'' \equiv 0 \text{ ist.}$$

Führen wir dies in die Gleichung II) ein, so erhalten wir als Folge:

$$c_3 = 0, \quad c_2^2 - 4c_1 . c_3 = 0$$

also:

$$c_3 = 0 \quad \text{und} \quad c_2 = 0.$$

Es ist demnach der Coefficient von x in der ersten Potenz und das absolute Glied gleich Null.

Würden wir die Gl. I) nach x auflösen und die ebenfalls bestehende Bedingung:

$$x_0 = 0, \quad y_0' \equiv 0 \equiv y_0''$$

einführen, so erhielten wir analog:

$$b_3 = 0 \quad \text{und} \quad c_3 = 0,$$

d. h. der Coefficient von y in der ersten Potenz ist auch Null.

Die Gleichung der Regelfläche $\mathfrak{f}^4$, bezogen auf ihre Doppelerzeugende Δ als Axe, lautet daher:

$$\text{IV)} \quad x^2(a_1y^2 + b_1y + c_1) + x(a_2y^2 + b_2y) + a_3y^2 = 0.$$

Sie hat fünf unabhängige Coefficienten, woraus das bereits synthetisch nachgewiesene Ergebniss, dass $\mathfrak{f}^4$ durch Δ_1, Δ_2, Δ und fünf Erzeugende bestimmt ist, resultirt.

Lösen wir IV) nach x auf und heben y als gemeinschaftlichen Factor heraus, so ergibt sich die Gleichung:

$$\text{V)} \quad x = y . \frac{-(a_2y + b_2) \pm \sqrt{(a_2^2 - 4a_1a_3)y^2 + 2(a_2b_2 - 2a_3b_1)y + (b_2 - 4a_3c_1)}}{2(a_1y^2 + b_1y + c_1)}$$

Der Ausdruck V ist quadratisch, hat demnach die Form:

$$\text{VI)} \quad V = A_1y^2 + A_3y + A_3,$$

er liefert uns, gleich Null gesetzt, die auf $\varDelta_2$ befindlichen zwei Cuspidalpunkte der Fläche $\mathfrak{f}^4$; die Realität derselben knüpft sich daher an die Relation:

$$\alpha) \quad A_2^2 - 4A_1A_3 > 0.$$

Unter dieser Voraussetzung untersuchen wir nun jene Werte der y und der diesen zugeordneten x, welche durch die Gleichung:

$$V = C > 0$$

oder

$$A_1y^2 + A_2y + A_3 - C = 0 \quad \text{bedingt sind.}$$

Zu dem Zwecke bilden wir die Discriminante der letzten Gleichung, sie ist: $A_2^2 - 4A_1(A_3 - C)$ und wegen der Voraussetzung α) immer grösser als Null, d. h. es ist:

$$\alpha') \quad A_2^2 - 4A_1(A_3 - C) > 0.$$

Aus dieser Relation sehen wir, dass die der Gl. $V = C > 0$ entsprechenden Werte von y immer reell sind, und zwar gleichzeitig mit den ihnen zugeordneten, aus Gl. V) resultirenden Werten von x.

Ist hingegen

$$V = C < 0, \quad \text{oder} \quad V = -C' \text{ (wobei } C' \text{ positiv)}$$

also:

$$A_1y^2 + A_2y + A_3 + C' = 0,$$

so kann

$$\alpha'') \quad A_2^2 - 4A_1(A_3 + C') > 0,$$

aber auch

$$\alpha''') \quad A_2^2 - 4A_1(A_3 + C') < 0$$

sein, wie man aus dem Vergleich dieser Discriminante mit Relation α) sieht.

Nun ist aber, wie aus $V = -C'$ und Gl. V) ersichtlich ist, x immer imaginär (eig. complex), während y, wenn α'') besteht, reell, wenn hingegen α''') erfüllt wird, imaginär ist.

Es gibt daher auch reelle y, welchen imaginäre x entsprechen, oder geometrisch ausgesprochen: es gibt reelle Punkte auf $\varDelta_2$, deren entsprechende auf $\varDelta_1$ imaginär sind, d. h. wenn die auf $\varDelta_2$ liegenden Cuspidalpunkte von φ^4 reell sind, so existiren auf dieser Doppelgeraden reelle Punkte, in welchen sich imaginäre Erzeugende schneiden.

Weil für $V > 0$ jedem reellen y auch reelle x, für $V < 0$ aber auch reellen y imaginaäre x entsprechen, und für $V = 0$ die den y zugeordneten x coincidiren; sehen wir, dass die Cuspidalpunkte es sind, welche $\varDelta_2$ in einer eigentlichen und ideellen Strecke teilen.

In derselben Weise könnten wir zeigen, dass unter der Voraus-

setzung $A_2^2 - 4A_1A_3 < 0$, reellen y immer reelle x und imaginären y auch immer imaginäre x zugeordnet sind, d. h. dass, wenn die auf $\varDelta_2$ befindlichen Cuspidalpunkte imaginär sind, diese eine ihrer ganzen Ausdehnung nach eigentliche Doppellinie ist. Dasselbe gilt von $\varDelta_1$.

Art. 11. Ein durch drei Erzeugende der φ^4 gelegtes Hyperboloid h^2 enthält die beiden Doppelgeraden $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ der Regelfläche und schneidet demnach diese immer noch in einer Erzeugenden. Umgekehrt kann wie in Art. 7. gezeigt werden, dass jedes durch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ gelegte Hyperboloid die Fläche in vier windschiefen Erzeugenden $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_4$ schneidet.

Die zwei Doppelgeraden $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ und zwei beliebige Punkte p_1, p_2 des Raumes bestimmen ein Büschel von windschiefen Hyperboloiden. Jedes enthält die durch p_1, p_2 gehenden zwei Transversalen s_1 und s_2 der zwei Doppelgeraden und schneidet die Regelfläche in vier Erzeugenden. Coincidiren zwei dieser Erzeugenden, so wird das betreffende Hyperboloid h^2 zum Berührungshyperboloid längs einer Erzeugenden der Fläche. Um die Anzahl dieser Hyperboloide zu bestimmen, legen wir durch einen beliebigen Punkt π von s_1 und durch s_2 die Ebene E; sie schneidet φ^4 in einer Curve C_8^4, vierter Ordnung und achter Classe, an welche man aus π acht Tangenten t_1, $t_2 \ldots t_8$ ziehen kann. Eine dieser Tangenten, etwa t_1 bestimmt auf s_2 den Punkt π_1 und berührt φ^4 in einem Punkt b_1, welcher wieder mit $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ eine Erzeugende $\mathfrak{e}_1$ der Regelfläche fixirt.

Von den unendlich vielen Berührungshyperboloiden der Fläche, welche diese längs $\mathfrak{e}_1$ berühren, bilden jene, welche durch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ gehen ein Büschel h_2'. Jedes Hyperboloid dieses Büschels ist durch Angabe eines Punktes vollkommen bestimmt. Jenes, welches durch den Punkt π geht, muss t_1 zur Erzeugenden haben, weil diese Gerade die einzige durch π laufende, die φ^4 in einem Punkt von $\mathfrak{e}_1$ berührende Tangente ist. Da es aber der Voraussetzung nach als dem untersuchten Büschel h_2' angehörig auch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ enthält, wird es auch s_1 und s_2 zu Erzeugenden haben, da jede dieser Geraden $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ und t_1 schneidet.

Die Tangente t_1 durchläuft also, wenn π sich auf s_1 fortbewegt ein Hyperboloid h_2', welches die Regelfläche φ^4 in der, von dem Berührungspunkt b_1 beschriebenen Erzeugenden $\mathfrak{e}_1$ berührt und durch s_2 sowie auch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ geht. Da dies für jede der acht Tangenten gilt, sehen wir, dass, wenn wir aus einem Punkte π einer Transversale s_1 von $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ jene acht Tangenten an φ^4 legen, welche eine zweite Transversale genannter Art schneiden; die Berührungspunkte der acht Tangenten ebensoviele Erzeugende von φ^4 durchlaufen, wenn sich π auf s_1 fortbewegt.

„Durch zwei Punkte des Raumes und die beiden Doppelgeraden der Regelfläche φ^4 gehen acht Berührungshyperboloide derselben, d. h. acht Hyperboloide, welche φ^4 längs je einer Erzeugenden berühren.“ [1])

Ist s_2 eine Erzeugende der Regelfläche φ^4, liegt also p_2 auf derselben; so schneidet die Ebene $E \equiv (\pi s_2)$ die φ^4 in einer Curve C_6^3, dritter Ordnung, sechster Classe. An diese kann man aus π nur sechs Tangenten $t_1, t_2 \ldots t_6$ legen, welche, wenn sich π auf s_1 fortbewegt, jene sechs durch Δ_1, Δ_2, s_2 und s_1 gehenden Berührungshyperboloide beschreiben, deren keines φ^4 längs s_2 berührt. Dieses Hyperboloid ist doppelt zu zählen, gibt daher mit den andern die Zahl Acht, und wird durch jene aus π an φ^4 gelegte Tangente beschrieben, welche die Fläche in einem Punkte von s_2 tangirt. Liegt auch p_1 auf φ^4, ist also s_1 auch eine Erzeugende der Fläche, so kann man aus π, ausser der Tangente t von C_6^3 in π vier Tangenten ziehen. Durch zwei Erzeugende der Regelfläche gehen vier Berührungshyperboloide, jene in den festen Erzeugenden nicht gerechnet.

„Durch einen Punkt des Raumes und eine Erzeugende der Regelfläche φ^4 gehen sieben Berührungshyperboloide derselben, das φ^4 längs der bezeichneten Erzeugenden berührende Hyperboloid mitgezählt.

Durch zwei Erzeugende $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ von φ^4 gehen sechs Berührungshyperboloide, wobei auch die zwei φ^4 längs $\mathfrak{e}_1$ bzhw. $\mathfrak{e}_2$ berührenden Hyperboloide gezählt sind.“ [2]).

Ein Schmiegungshyperboloid der Regelfläche φ^4 hat mit ihr die benachbarte Erzeugende gemein, enthält also auch die beiden Doppelgeraden:

---

1) Durch zwei Punkte des Raumes und die $m$fache und $n$fache Gerade einer Regelfläche $(m+n)$ter Ordnung gehen, wie in obiger Weise bewiesen werden kann, $2m.n$ Berührungshyperboloide. Hat die Regelfläche eine $p$fache Erzeugende, so ist die Anzahl der genannten Hyperboloide $2m.n - p(p-1)$. Für $m = 2$, $n = 1$ ist $z = 4$ etc.

Statt der zwei Punkte können reciprok zwei Ebenen gegeben werden, welche die Hyperboloide zu berühren haben.

2) Wenn $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ benachbart sind, gilt das Gesagte natürlich auch; der Satz specialisirt sich folgendermassen: „Von den unendlich vielen Hyperboloiden, welche φ^4 längs einer Erzeugenden berühren, berühren sie viere auch noch längs je einer andern Erzeugenden.“

Von den Tangenten einer Fläche φ^4 in einem Punkte, berühren sie viere auch an anderer Stelle.

„Alle Schmiegungshyperboloide der Regelfläche φ^4 gehen durch die beiden Doppelgeraden."

Ein Schmiegungshyperboloid besteht aus den Haupttangenten der Regelfläche in Punkten seiner Berührungserzeugenden $\mathfrak{e}$, es schneidet die Regelfläche in noch einer Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, welche als der geometrische Ort des Schnittpunktes p, einer die φ^4 in einem Punkt von $\mathfrak{e}$ berührenden Haupttangente τ, durch Angabe einer solchen eindeutig bestimmt ist.

Der aus einem Punkt P des Raumes der φ^4 umschriebene Kegel K_4^8 hat zwölf Rückkehrtangenten $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots \tau_{12}$; jede derselben ist zugleich eine Haupttangente der Fläche. Denn legen wir durch eine derselben, etwa τ_1 eine Ebene E, so schneidet diese K_4^8 ausser in τ_1, die als Rückkehrtangente im Schnitt doppelt zu zählen ist, in noch sechs Kanten, deren jede eine aus P an den Schnitt C_8^4, von E und φ^4 gelegte Tangente ist. Von den acht aus P an C_8^4 zu ziehenden Tangenten coincidiren also zwei mit τ_1, die demnach, weil sie nur einen Berührungspunkt b_1 besitzt, eine Inflexionstangente von C_8^4 und daher auch von φ^4 ist. Das Schmiegungshyperboloid der Fläche in der durch b_1 gehenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_1$ enthält auch die Haupttangente τ_1, geht also durch P und hat die, diesen Punkt enthaltende Transversale von Δ_1 und Δ_2 zur Erzeugenden. Da dies von jeder der zwölf Haupttangenten zu sagen ist, gilt der Satz:

„Durch einen Punkt des Raumes gehen zwölf Schmiegungshyperboloide der Regelfläche φ^4." [1])

Liegt P in einer Doppelebene δ_1' eines erzeugenden Ebenenbüschels, etwa von $\Delta_1(\delta\delta')$, so hat der aus ihm der φ^4 umschriebene Kegel K_4^8 nur 11 Rückkehrkanten, welchen eigentliche Schmiegungshyperboloide entsprechen, während die zwölfte durch den in δ_1' liegenden Cuspidalpunkt c_1' laufend, anzeigt, dass δ_1' auch als Schmiegungsebene anzusehen ist.

Der aus einem Punkt P der Regelfläche φ^4 ihr umschriebene Kegel K_6^3 hat neun Rückkehrkanten $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_9$. Diese bestimmen

---

1) In derselben Weise kann man beweisen, dass durch einen Punkts des Raumes $z = 3(m(n-1) + n(m-1) - p(p-1))$ Schmiegungshyperboloide einer Regelfläche $\mathfrak{f}^{m+n}$, $(m+n)$ter Ordnung, mit einer m-fachen und einer n-fachen Geraden und einer p-fachen Erzeugenden, gehen. Für $\mathfrak{f}^3 (m = 2, n = 1)$ ist $z = 3$; für $\mathfrak{f}^4 (m = 3, n = 1)$ ist $z = 6$; und für $\mathfrak{f}^4 (m = 2, n = 2, p = 2)$, $z = 6$.

Ebenso kann man die Anzahl der durch einen Punkt gehenden Schmiegungshyperboloide irgend einer andern, auch allgemeinern Fläche als $\mathfrak{f}^{m+n}$ bestimmen.

jene neun Schmiegungshyperboloide, welche durch die, durch P laufende Erzeugende $\mathfrak{e}$ gehend, sich φ^4 längs anderer Erzeugenden anschmiegen.

„Durch eine Erzeugende $\mathfrak{e}$ der Regelfläche φ^4 gehen zehn Schmiegungshyperboloide, das sich φ^4 längs $\mathfrak{e}$ anschmiegende Hyperboloid mitgezählt.“ [1])

Ein gewöhnlicher Punkt der Regelfläche φ^4 ist hyperbolisch, d. h. die Indicatrix desselben ist eine Hyperbel; von den beiden Haupttangenten im genannten Punkt ist blos die eine eigentlich, während die andere durch die durchgehende Erzeugende repräsentirt wird. Die eigentliche Haupttangente τ in P ist die Tangente jener ebenen Curve C_6^3, in welcher φ^4 von der Tangentialebene des Punktes P geschnitten wird.

Nehmen wir nun an, P wäre ein Punkt einer singulären Erzeugenden e von φ^4 und legen wir an diese im genannten Punkt die Tangentialebene. Diese ist, wie wir aus Art. 2. wissen, eine Verzweigungsebene v; sie berührt φ^4 längs der ganzen Erzeugenden e und schneidet diese Fläche ausser in e nur noch in einer Doppelgeraden $\varDelta_1$ oder $\varDelta_2$. Die Tangente an die Schnittcurve $(e\varDelta)$ in P coincidirt demnach mit e selbst, möge P irgend ein Punkt dieser Geraden sein. Jeder Punkt einer singulären Erzeugenden ist also parabolisch und das Schmiegungshyperboloid längs derselben ist die Erzeugende selbst, da die Haupttangenten der φ^4 längs e mit dieser sämmtlich zusammenfallen.

Der aus einem Punkt P des Raumes der Regelfläche φ^4 umschriebene Kegel K_4^8 besitzt acht Doppelkanten $d_1, d_2, d_3 \ldots d_8$. Jede berührt die Fläche in zwei Punkten, so d_1 in b_1 und b_1'. Die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden seien bzhw. $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1'$. Von den unendlich vielen Hyperboloiden, welche φ^4 längs $\mathfrak{e}_1$ berühren und die Doppelgeraden $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ zu Erzeugenden haben, ist irgend eines durch die Angabe noch einer mit $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ windschiefen Erzeugenden, welche jedoch φ^4 in einem Punkt von $\mathfrak{e}_1$ berühren muss, eindeutig gegeben. So bestimmt d_1 ein durch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ gehendes Berührungshyperboloid

---

1) Die Anzahl der durch die p-fache Erzeugende $\varDelta$ der Regelfläche $\mathfrak{f}^{m+n}$ (siehe l. Anmkg.) gehenden Schmiegungshyperboloide, die p sich $\mathfrak{f}^{m+n}$ längs $\varDelta$ anschmiegenden Hyperboloide nicht gerechnet, ist:

$z' = 3[m(n-1)+n(m-1)-2p(p-1)]$ für $m=2$, $n=2$ und $p=2$, also für die rationale Regelfläche φ^4 ist $z'=0$.

Es ist noch zu bemerken, dass reciproke, eine beliebige Ebene E des Raumes von 12 Schmiegungshyperboloiden der φ^4 berührt wird, welche den 12 Inflexionstangenten des Schnittes von E und φ^4 entsprechen etc.

h_1^2 der Erzeugenden $\mathfrak{e}_1$ vollkommen. Diese Gerade bestimmt aber auch ein Δ_1, Δ_2 enthaltendes Berührungshyperboloid h_2^2 der Erzeugenden $\mathfrak{e}_1'$, weil sie φ^4 in dem Punkte b_1' von $\mathfrak{e}_1'$ auch tangirt. Ueberdies hat h_1^2 auch $\mathfrak{e}_1'$ sich zur Erzeugenden, weil diese d_1, Δ_1 und Δ_2 schneidet und ebenso enthält h_2^2 auch $\mathfrak{e}_1$; $h_1 z$ und h_2^2 haben also Δ_1, Δ_2, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1'$ und d_1 gemein, sind daher identisch. Jede der acht Doppelkanten von K_4^8 fixirt also mit Δ_1 und Δ_2 ein φ^4 doppelt berührendes Hyperboloid.

„Durch jeden Punkt gehen acht die Regelfläche φ^4 doppelt berührende, d. h. längs zweier getrennter Erzeugenden berührende Hyperboloide.“ [1]).

Unter den Berührungsflächen der Regelfläche φ^4 verdient die Asymptotenfläche noch besondere Erwähnung.

Sie besteht aus den Tangentialebenen der Fläche in den Punkten der unendlich fernen (ebenen) Curve C_8^4; ist daher der Berührungscurve B^8 eines φ^4 umschriebenen Kegels K_4^8 reciprok:

„Die Asymptotenfläche der Regelfäche φ^4 ist eine developpable Fläche achter Classe und sechszehnter Ordnung. Sie berührt die Verzweigungsebene längs der singulären Erzeugenden.“

Von den weitern Eigenschaften der Fläche φ^4 wäre noch zu erwähnen, dass sie acht cyklische ebene Curven dritter Ordnung, sechster Classe besitzt; welche den vier reellen Verbindungslinien der acht Schnittpunkte von φ^4 mit dem imaginären Kugelkreis, und zwar paarweise zugeordnet sind.

Art. 12. Eine interessante Specialität der behandelten Fläche φ^4 ist das Erzeugniss γ^4, zweier projectivischer, quadratischer Involutionen $\Delta_1(\alpha\alpha')$ und $\Delta_2(\beta\beta')$ auf zwei windschiefen Axen Δ_1 und Δ_2.

Fassen wir vorerst zwei Punkt-Involutionen genannter Art ins Auge, so haben wir als entsprechende Elemente ein Punkepaar α, α' von Δ_1 und ein solches β, β' von Δ_2 anzusehen. Die in α sich schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ bestimmen auf Δ_2 die Punkte β, β'. Sowol durch den einen, als auch durch den andern läuft noch eine Erzeugende $\mathfrak{e}_1'$ bzhw. $\mathfrak{e}_1''$, welche sich in einem Punkte α' von Δ_1,

---

1) Für die Fläche $\mathfrak{f}^{m+n}$ ist die Anzahl dieser Hyperboloide $z = 2[m^2n^2 - 5mn + 2m + 2n]$. Hat $\mathfrak{f}^{m+n}$ μ Doppel- und ν Cuspidalerzeugende; so ist von z die Zahl $z' = (2\mu + 3\nu)[(m + n^2 - (m+n) - 6] - 2\mu(\mu - 1) - \frac{9}{2}\nu(\nu - 1) - 6\mu.\nu$ abzuziehen. Eine p-fache Erzeugende gilt hierbei für $\frac{1}{2}p(p-1)$ Doppelerzeugende.

und zwar in jenem schneiden, welcher dem α in $\Delta_1(\alpha\alpha')$ conjugirt ist. Die vier Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_1''$ sind conjugirt, und zwar derart, dass eine von ihnen die drei andern vollkommen bestimmt; sie bilden ein Quadrupel.

Aus dieser Lagen-Relation folgt, dass, wenn β' mit β coincidirend, einen Doppelpunkt d_1'' der Involution $\Delta_2(\beta\beta')$ bildet, nicht nur α sondern α' zum Verzweigungspunkt wird.

In einem der zwei Doppelpunkte d_1'', d_2'' der Involution $\Delta_2(\beta\beta')$ — dasselbe gilt von $\Delta_1(\alpha\alpha')$ — schneiden sich zwei singuläre Erzeugende der Regelfläche γ^4. Jeder derartige Doppelpunkt ist daher ein Doppel-Inflexionspunkt [1]) der Fläche; ihm entsprechen zwei Cuspidalpunkte, welche auf Δ_1 liegen und durch die auf dieser Doppelgeraden befindlichen Doppel-Inflexionspunkte d_1', d_2' harmonisch getrennt werden.

„Das Erzeugniss zweier quadratischer Punkt-Involutionen auf zwei windschiefen Geraden Δ_1, Δ_2 ist eine Regelfläche vierten Grades γ^4, welche Δ_1 und Δ_2 zu Doppellinien besitzt. Die vier Doppelpunkte genannter Involutionen sind Doppel-Inflexionspunkte der Regelfläche, die ihnen entsprechenden Punkte sind die acht Cuspidalpunkte derselben, sie werden durch die Doppel-Inflexionspunkte paarweise harmonisch getrennt."

Je einem derartigen Paar der einen Doppelgeraden entspricht ein Doppel-Inflexionspunkt der andern.

Dem Gesagten zufolge berührt eine durch Δ_1 gelegte Ebene δ die γ^4 in zwei Punkten α, $\alpha_{,}$, welche ein conjugirtes Paar der erzeugenden Punkt-Involution $\Delta_1(\alpha\alpha')$ bilden, also durch die auf Δ_1 befindlichen Doppel-Inflexionspunkte d_1', d_2' harmonisch getrennt werden. Die in δ liegenden Erzeugenden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ schneiden Δ_1 in α bzhw. α' und Δ_2 in β; construiren wir die dem Punkte d_1' bezüglich $\mathfrak{e}$ und und $\mathfrak{e}'$ harmonisch conjugirte Gerade $\mathfrak{f}$, so läuft diese daher nicht nur durch β sondern auch d_2'; beschreibt demnach, wenn δ sich um Δ_1 dreht, oder β die Gerade Δ_2 durchläuft, das durch d_2' und die Ebene $(d_2'\Delta_2)$ bestimmte Strahlenbüschel.

---

1) D. h. in einem jeden coincidiren zwei Inflexionspunkte der Fläche (siehe Art. 2.). Legen wir durch einen solchen Punkt eine Ebene, so schneidet diese γ^4 in einer Curve $C_8{}^4$, die im genannten Punkt einen Doppelpunkt besitzt, der Inflexionstangenten zu Doppelpunktstangenten hat, d. h: ein Doppel-Inflexionspunkt ist.

Irgend eine durch d_1' gehende Gerade g, z. B. eine in der Ebene δ liegende schneidet γ^4 in zwei weitern Punkten (ge) und (ge'), welche durch d_1' und den Schnittpunkt (gf) von g mit der Ebene $(d_2'\Delta_2)$ harmonisch nicht getrennt werden. Nimmt g nach einander alle möglichen Lagen ein, so erfüllt (gf) die Ebene $(d_2'\Delta_2)$; diese ist die Polarebene des Doppel-Inflexionspunktes d_1' beogen auf die Regelfläche γ^4.

„Die durch eine Doppelgerade Δ_2 und einer auf der andern Doppelgeraden Δ_1 liegenden Doppel-Inflexionspunkt d_2' gelegte Ebene $(\Delta_2 d_2')$ ist die Polarebene des zweiten auf Δ_1 befindlichen Doppel-Inflexionspunktes bezogen auf die Regelfläche γ^4."

Eine durch d_1' gelegte Ebene E schneidet γ^4 in einer Curve C_8^4, die in d_1' einen Doppel-Inflexionspunkt, und in dem Schnitt β von E und Δ_2 einen einfachen Doppelpunkt hat. Die Ebene E schneidet die Ebene $(d_2'\Delta_2)$ in einer durch β laufenden Geraden p, welche den gemachten Auseinandersetzungen zufolge, die Polare von d_1' bezüglich γ^4, also auch bezüglich C_8^4 selbst ist. Diese Gerade hat die Eigenschaft, mit dem Punkte d_1', je zwei auf einem Strahl von d_1' liegende Curvenpunkte harmonisch zu trennen.

Dieselbe Beziehung besteht zwischen irgend einem andern Doppel-Inflexionspunkt und der ihm in angegebener Weise zugeordneten Ebene jenes Büschels, auf dessen Axe er nicht liegt.

So ist auch $(\Delta_1 d_2'')$ die Polarebene des Doppel-Inflexionspunktes d_1'' bezogen auf γ^4. Daraus folgt aber, dass irgend eine durch $\overline{d_1'd_1''}$ gehende Ebene E, deren Schnittpunkt mit der Schnittlinie $\overline{d_2'd_2''}$ der zwei Polarebenen $(\Delta_3 d_2')$ und $(\Delta_1 d_2'')$ wir mit Ω bezeichnen, die letztgenannten Ebenen in zwei Geraden $\overline{\Omega d_1''}$ und $\overline{\Omega d_1'}$ schneidet, welche die Polare d_1' bzhw. d_1'' bezüglich γ^4, also auch der durch E auf γ^4 bestimmten Curve C_8^4 sind.

Die Curve C_8^4 hat d_1' und d_1'' zu Doppel-Inflexionspunkten und die Eigenschaft, dass eine durch einen solchen Punkt z. B. d_1' laufende Gerade g ihrer Ebene sie in zwei Punkten p und p' schneidet, welche durch d_1' und den Schnitt m_1 von g_1 und $\overline{d_1''\Omega}$ harmonisch geteilt werden. Sowol $\overline{d_1''p}$ als auch $\overline{d_1''p'}$ bestimmt auf C_8^4 noch einen Punkt p bzhw. p', deren jeder durch $\overline{d_1'\Omega}$ von d_1'' harmonisch getrennt wird, die also eine durch d_1' gehende Verbindungslinie $\overline{p_1p_1'}$ haben. Diese Gerade bildet mit $\overline{pp'}$, $\overline{d_1'\Omega}$ und $\overline{d_1'd_1''}$ ein harmonisches Strahlenbüschel, welches mit dem ebenfalls harmonischen Vier-

strahl $\overline{d_1''d_1'}$, $\overline{d_1''\Omega}$, $\overline{p_1p}$, $\overline{p_1'p'}$ die Gerade $\overline{d_1'd_1''}$ gemeinschaftlich hat. Aus dieser Construction ersehen wir, dass sich die Geraden $\overline{p_1p'}$, $\overline{pp_1'}$ im Punkte Ω schneiden, und dass p_1 und p', sowie p und p_1' mit Ω und bzhw. den Schnittpunkten Ω', Ω_1' ihrer Träger und $\overline{d_1'd_1''}$ eine harmonische Reihe bilden.

Die vier Curvenpunkte p, p', p_1 und p_1' bestimmen ein Viereck, welches d_1', d_1'', Ω zum Diagonaldreieck hat; sie bilden ein Punkt-Quadrupel der Curve und liegen, wie leicht zu beweisen ist, auf einem Erzeugenden-Quadrupel der Regelfläche.[1])

Ist also p ein Punkt der Curve C_8^4, so ist auch der ihm bezüglich Ω und dem Schnittpunkt Ω' von $\overline{p\Omega}$ und $\overline{d_1'd_1''}$ harmonisch conjugirte, ein solcher. Es schneidet demnach jede Gerade $\overline{\Omega\Omega'}$ des Büschels Ω die Curve in vier Punkten, welche paarweise mit Ω und Ω' eine harmonische Reihe bilden.

Bemerken wir, dass C_8^4 eine beliebige durch d_1' und d_1'' gehende ebene Curve von γ^4, und $\overline{\Omega\Omega'}$ eine willkürliche Transversale der Geraden $\overline{d_1'd_1''}$ und $\overline{d_2'd_2''}$ ist, durch deren Annahme C_8^4 (zweideutig) bestimmt erscheint; so können wir das Resultat der Untersuchung folgendermassen zusammenfassen:

„Irgend eine Transversale zweier windschiefer Verbindungslinien der vier Doppel-Inflexionspunkte der Regelfläche γ^4 schneidet diese in vier Punkten, welche

---

1) Die durch p gehende Erzeugende $\mathfrak{e}$ schneidet Δ_1 in α und Δ_2 in β. Legen wir durch $\mathfrak{e}$ und Δ_1 die Ebene, so schneidet diese γ^4 noch in einer Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, welche durch β und p' laufen muss, weil sich $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ in β schneiden müssen, und β als auf $\mathfrak{e}$ nicht liegend, ein Punkt der zweiten in genannter Ebene befindlichen Erzeugenden sein muss. Dass sich p' wirklich in der Ebene $(\mathfrak{e}\Delta_1)$ befindet, folgt daraus, dass $\overline{pp'}$ durch d_1' geht. In derselben Weise lässt sich zeigen, dass die zweite in $(\mathfrak{e}\Delta_2)$ liegende Erzeugende $\mathfrak{e}_1$ durch α und p_1 geht, sie schneidet Δ_2 in β_1. Die durch p_1' bestimmte Erzeugende $\mathfrak{e}_1$ muss sowol mit $\mathfrak{e}_1$ in einer Ebene des Büschels Δ_2 liegen, also durch β_1 laufen; als auch der Ebene $(\mathfrak{e}'\Delta_2)$ angehören, d. h. sich mit $\mathfrak{e}'$ in einem Punkt α' von Δ_1 schneiden. Weil nämlich die erste Ebene Δ_2 in β_1 trifft, und p_1', p_1 und α_1' in einer Geraden liegen; ebenso schneidet $(\mathfrak{e}\Delta_2)$ die Δ_1 in α' und geht $\overline{p_1p_1'}$ durch d_1''.

„Ein Punkt-Quadrupel einer C_8^4, deren Ebene E durch irgend zwei Doppel-Inflexionspunkte geht, liegt immer auf einem Erzeugenden-Quadrupel von γ^4, und umgekehrt schneidet jede Ebene E ein Erzeugenden-Quadrupel in einem Punkt-Quadrupel ihrer C_8^4."

durch die genannten Geraden paarweise harmonisch getrennt werden."

Von den sechs windschiefen Verbindungslinien der vier Doppel-Inflexionspunkte haben selbstverständlich nur die zwei Paare $\overline{d_1'd_1''}$, und $\overline{d_1'd_2''}$, $\overline{d_2'd_1''}$ die besprochene Eigenschaft, weil Δ_1 und Δ_2 Bestandteile der Fläche sind.

Lassen wir $\overline{\Omega\Omega'}$ an $\overline{d_1'd_1''}$ und $\overline{d_2'd_2''}$ an einer Erzeugenden $\mathfrak{e}$ von γ^4 gleiten, so erzeugt sie ein Hyperboloid h^2, welches auch Δ_1 und Δ_2 enthält und demnach γ^4 in noch drei Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$ schneidet. Alle vier Erzeugenden gehören einer Schaar von h^2 an, sind also windschief und schneiden $\overline{\Omega\Omega'}$ in allen Lagen. Die vier paarweise durch $\overline{d_1'd_1''}$ und $\overline{d_2'd_2''}$ harmonisch getrennten Schnittpunkte der Geraden $\overline{\Omega\Omega'}$ und γ^4 beschreiben daher die vier windschiefen Erzeugenden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$. Je zwei derselben gehören einem Erzeugenden-Quadrupel von γ^4 an und bilden mit $\overline{d_1'd_1''}$ und $\overline{d_2'd_2''}$ vier harmonische Erzeugende von h^2. Da $\mathfrak{e}$ beliebig gewählt wurde, gilt der Satz:

„Jedes durch zwei windschiefe Verbindungslinien der vier Doppel-Inflexionspunkte und die zwei Doppelgeraden gelegte Hyperboloid h^2 schneidet die Regelfläche γ^4 in vier Erzeugenden, welche paarweise mit den genannten Verbindungslinien vier harmonische Erzeugende des Hyperboloides bilden. Jedes derartige Paar gehört einem Erzeugenden-Quadrupel von γ^4 an."

Art. 13. Wir haben gezeigt, dass durch zwei windschiefe Transversale der Doppelgeraden acht Hyperboloide gehen, welche die Regelfläche berühren. Soll ein durch $\overline{d_1'd_1''}$ und $\overline{d_2'd_2''}$ gelegtes Hyperboloid h^2 die Regelfläche γ^4 berühren, so kann dies nur dadurch geschehn, dass zwei nicht zusammengehörige, der vier auf h^2 befindlichen Erzeugenden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$ coincidiren; da zwei ein Paar bildende, d. h. einander bezüglich $\overline{d_1'd_1''}$, $\overline{d_2'd_2''}$ conjugirte Erzeugende einem Quadrupel angehören, und in einem solchen im Allgemeinen nicht unendlich nahe Erzeugende vorkommen.

Fallen aber zwei kein Paar bildende Erzeugende $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}''$ zu einer Erzeugenden $\mathfrak{e}_I$ zusammen, d. h. vielmehr rücken sie unendlich nahe, so muss dies auch mit den zwei andern, den ersten conjugirten Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}'''$ geschehen, weil diese an die Gleichung:

$$(\overline{d_1'd_1''}, \overline{d_2'd_2''}\ \mathfrak{e}_I, \mathfrak{e}') = (\overline{d_1'd_1''}, \overline{d_2'd_2''}, \mathfrak{e}_I, \mathfrak{e}''') = -1$$

gebunden sind, welche dann erfüllt wird, wenn $\mathfrak{e}''' \equiv \mathfrak{e}' \equiv \mathfrak{e}_{II}$ wird.

Jedes Hyperboloid des untersuchten Büschels, welches die Regelfläche längs einer Erzeugenden e_I berührt, berührt sie auch längs der e_I, bezüglich $\overline{d_1'd_1''}$, $\overline{d_2'd_2''}$ harmonisch conjugirten Erzeugenden e_{II}; welche mit e_I einem Erzeugenden-Quadrupel angehört, also doppelt. Jedes derartige Hyperboloid ist als Berührungshyperboloid doppelt zu zählen, woraus folgt, dass in dem Büschel Δ_1, Δ_2, $\overline{d_1'd_1''}$, $\overline{d_2'd_2''}$ vier solche Hyperboloide existiren. Es ist auch leicht zu beweisen, dass von den acht Berührungserzeugenden dieser vier Hyperboloide je viere ein Quadrupel bilden. [1])

---

1) Um dies schnell zu beweisen, fassen wir wieder eine jener unendlich vielen Curven C_8^4 auf, deren Ebene $\overline{d_2'd_2''}$ in einem beliebigen Punkt Ω schneidend durch $\overline{d_1'd_1''}$ geht, die also in d_1' und d_1'' Doppel-Inflexionspunkte hat. Wie gezeigt wurde, schneidet eine durch Ω gehende Gerade g die C_8^4 in vier Punkten p, p', — q, q' und die Gerade $\overline{d_1'd_1''}$ in einem Punkt Ω', so dass $(\Omega, \Omega', p, p') = (\Omega, \Omega', q, q') = -1$ ist. Aus Ω kann man an C_8^4 acht Tangenten legen, eine derselben sei t. Von ihren vier Schnittpunkten mit C_8^4 müssen zwei coincidiren. Es kann nun weder p mit p' noch q mit q' zusammenfallen, weil dann solche zwei Punkte entweder mit Ω oder mit Ω' coincidiren müssten, C_8^4 aber weder in dem ersten, d. h. Ω, noch auf $\overline{d_1'd_1''}$ ausser d_1', d_1'' Punkte hat. Es fällt also p mit q und daher nach obiger Gl., die nun folgend lautet: $(\Omega\Omega'pp') = (\Omega\Omega'pq') = -1$ auch auch p' mit q' zusammen. J e d e d e r (v i e r) a u s Ω a n C_8^4 g e l e g t e n T a n g e n t e n i s t e i n e D o p p e l t a n g e n t e d e r C u r v e, i h r e B e r ü h r u n g s p u n k t e w e r d e n d u r c h Ω u n d $\overline{d_1'd_1''}$ h a r m o n i s c h g e t r e n n t. Diese vier Doppeltangenten heissen t_1, t_1', t_2, t_2'; ihre Berührungspunkte a_1, a_1'; b_1, b_1'; a_2, a_2'; b_2, b_2' bilden, und zwar die ersten vier ein, die zweiten vier ein anderes Quadrupel, wie aus dem Folgenden ersichtlich ist. Es ist auch zu bemerken, dass $(\overline{\Omega d_1'}, \overline{\Omega d_1''}, t_1, t_1') = (\overline{\Omega d_1'}, \overline{\Omega d_1''}, t_2, t_2') = -1$ ist.

Ist g eine Gerade, welche C_8^4 in P_1, P_2, P_3, P_4 und $\overline{\Omega d_1''}$ in P schneidet, und g' die ihr bezüglich $\overline{d_1'd_1''}$ und $\overline{\Omega d_1''}$ harmonisch erzeugte Gerade; so sind die Schnitte von $\overline{d_1'P_1}$, $\overline{d_1'P_2}$, $\overline{d_1'P_3}$, $\overline{d_1'P_4}$ mit g' nämlich P_1', P_2', P_3', P_4' auch Punkte von C_8^4. (d_1' kann mit d_1'' oder Ω und $\overline{\Omega d_1''}$, dem entsprechend mit $\overline{\Omega d_1'}$ oder $\overline{d_1'd_1''}$ vertauscht werden). Fällt nun P_1 mit P_2 zusammen, so geschieht dies auch mit P_1' und P_2', d. h. ist g eine Tangente, so ist es auch g' und jede der andern 4 g zugeordneten Geraden g'', g_1, g_1', g_1''. Fällt P_1 und P_2 mit P_3 zusammen; so sind g und auch g', sowie g'' etc. Inflexionstangenten. Coincidirt P_1 mit P_2 und P_3 mit P_4, so ist jede der Geraden eine Doppeltangente. Nun lässt sich das oben zu Beweisende, sowie die Richtigkeit der folgenden Sätze leicht zeigen:

„D i e T a n g e n t e n d e r C_8^4 i n P u n k t e n e i n e s Q u a d r u p e l s b i l d e n e i n V i e r s e i t, w e l c h e s $\Omega d_1'd_1''$ z u m D i a g o n a l d r e i s e i t h a t; a l s o e i n Q u a d r u p e l."

„Jedes der vier durch zwei windschiefe Verbindungslinien ($\overline{d_1'd_1''}$), $\overline{d_2'd_2''}$ oder $\overline{d_1'd_2''}$, $\overline{d_1''d_2'}$) der vier Doppel-Inflexionspunkte gehende Berührungshyperboloide der Regelfläche γ^4 berührt diese doppelt, d. h. längs zweier getrennter Erzeugenden; welche aber einem Erzeugenden-Quadrupel angehören. Diese zwei Erzeugenden bilden mit den genannten zwei Verbindungslinien vier harmonische Erzeugeude des Hyperboloides.

Die Regelfläche γ^4 besitzt acht derartige doppelberührende Hyperboloide; die sechszehn Berührungserzeugenden derselben bilden vier Erzeugenden-Quadrupel der Fläche."

Eine Erzeugende e bestimmt mit Δ_1 und Δ_2 zwei Ebenen δ bzhw. ε, welche, wenn e die Fläche γ^4 durchläuft, zwei projectivische quadratische Ebenen-Involutionen $\Delta_1(\delta\delta')$ und $\Delta_2(\varepsilon\varepsilon')$ bilden.

Diese beiden Involutionen erzeugen auch die Regelfläche γ^4 und liegen mit den erzeugenden Punkt-Involutionen, und zwar die erste mit $\Delta_2(\beta\beta')$, die zweite mit $\Delta_1(\alpha\alpha')$, also wechselweise perspectivisch.

Ein conjugirtes Ebenenpaar der Involution $\Delta_1(\delta\delta')$ berührt diese Fläche in demselben Punkt α von Δ_1 und schneidet daher die Gerade Δ_2 in zwei Punkten β und β', welche auch ein Paar, und zwar von $\Delta_2(\beta\beta')$ bilden.

Der Punkt α liefert mit β und β' verbunden jene Erzeugenden e, e', in welchen die Ebene $(\Delta_2\alpha) \equiv \varepsilon$ die ihr zugeordneten Ebenen δ und δ' schneidet. Die Doppelebenen δ_1', δ_2' der Involution $\Delta_1(\delta\delta')$ gehen durch die auf Δ_2 liegenden Doppel-Inflexionspunkte d_1'' resp. d_2'' und berühren γ^4 in je zwei auf Δ_1 liegenden Cuspidalpunkten c_1',

---

Die Berührungspunkte der vier in Ω sich schneidenden Doppeltangenten bilden zwei Quadrupel. $C_8{}^4$ besitzt noch 4 Doppeltangenten, welche auch ein Quadrupel bilden. Ihre 8 Berührungspunkte bilden 2 Punkt-Quadrupel.

Die Curve $C_8{}^4$ hat ausser d_1', d_1'' acht Inflexionspunkte, welche zu vieren i_1, i_2, i_3, i_4 — i_1', i_2', i_3', i_4' sich zu Quadrupeln vereinigen. Ihre Tangenten (Inflexionstangenten) bilden die zugeordneten Quadrupel; sie schneiden $C_8{}^4$ in acht Punkten, für welche dasselbe bezüglich der Lage gilt.

Lassen wir $C_8{}^4$ sich um $\overline{d_1'd_1''}$ drehend deformiren; so beschreiben die acht Inflexionstnngenten die acht durch $\overline{d_1'd_1''}$ gehenden Schmiegungshyperboloide der γ^4. Ihre Inflexionspunkte durchlaufen die Schmiegungskanten derselben; welche zwei Erzeugende-Quadrupel der Fläche γ^4 bilden; weil, wie wie schon erwähnten, jedes Punkt-Quadrupel der $C_8{}^4$, wenn sich ihre Ebene um $\overline{d_1'd_1''}$ dreht, an einem Erzeugenden-Quadrupel von γ^4 gleitet etc.

c_2' bzhw. c_3', c_4', welche wieder durch die auf $\varDelta_1$ befindlichen Doppel-Inflexionspunkte d_1', d_2' in angegebener Reihenfolge harmonisch getrennt werden.

Die Verzweigungsebenen v_1', v_2', v_3', v_4' des Büschels $\varDelta_1$ gruppiren sich ebenfalls zu conjugirten Paaren; je ein Paar stellt die Tangentialebenen der Fläche in einem Doppel-Inflexionspunkt d_1', d_2' vor, und bestimmt auf $\varDelta_2$ ein Cuspidalpunktepaar etc.

Eine durch einen Doppel-Inflexionspunkt d_1' gelegte Ebene E bestimmt auf γ^4 eine Curve $C_8{}^4$, die in d_1' Inflexionstangenten zu Doppelpunktstangenten hat. Die letztern sind die Schnittlinien t_1, t_2 von E und den γ^4 in d_1' berührenden Verzweigungsebenen c_1' und c_2'.

Aus dem Gesetze der Reciprocität folgt nun unmittelbar, dass der aus einem Punkt P einer Doppelebene δ_1' der γ^4 umschriebene Kegel $K_4{}^8$ die Ebene δ_1' zur D o p p e l - R ü c k k e h r t a n g e n t e n e b e n e hat; d. h. für den δ_1' eine Doppeltangentenebene ist, welche Rückkehrkanten des Kegels zu Berührungskanten besitzt. Die letztern zielen nach den auf δ_1' liegenden Cuspidalpunkten c_1', c_2'. (Siehe Art. 5.).

Jede der vier windschiefen Verbindungslinien der Doppel-Inflexionspunkte hat also nicht nur die Eigenschaft, dass eine beliebige durch sie gelegte Ebene die Fläche γ^4 in einer Curve $C_8{}^4$ mit zwei Doppel-Inflexionspunkten schneidet; sondern auch die, dass der aus einem ihrer Punkte umschriebene Kegel $K_4{}^8$ zwei Doppel-Rückkehrtangentenebenen besitzt. Diese sind die durch $\overline{d_1'd_1''}$ bestimmten Doppelebenen der Büschel $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$; die Berührungskanten zielen nach den vier in ihnen gelegenen Cuspidalpunkten und sind Rückkehrkanten des Kegels $K_4{}^8$.

Die andern acht Rückkehrtangenten sind, wie wir in Art. 11. zeigten, Haupttangenten der Regelfläche; sie bestimmen die in der letzten Anmerkung erwähnten acht durch $\overline{d_1'd_1''}$ gehenden Schmiegungshyperboloide. An bezeichneter Stelle erwähnen wir auch, dass die acht Schmiegungserzeugenden, sowie die acht Schnitterzeugenden der Hyperboloide mit γ^4, und zwar jede Gruppe für sich zwei Erzeugenden-Quadrupel der Fläche bilden.

„D u r c h j e d e V e r b i n d u n g s l i n i e z w e i e r D o p p e l - I n f l e x i o n s p u n k t e g e h e n a c h t S c h m i e g u n g s h y p e r b o l o i d e d e r F l ä c h e γ^4. I h r e a c h t S c h m i e g u n g s e r z e u g e n d e n b i l d e n z w e i Q u a d r u p e l. J e d e s H y p e r b o l o i d s c h n e i d e t γ^4 i n n o c h e i n e r E r z e u g e n d e n; a u c h d i e s e a c h t E r z e u g e n d e n z e r f a l l e n i n z w e i E r z e u g e n d e n - Q u a d r u p e l v o n γ^4.“

Der Schnitt $C_8{}^4$ einer durch $\overline{d_1'd_1''}$ gelegten Ebene E hat ausser den vier in Ω sich schneidenden Doppeltangenten (siehe 1. Anmrkg.) vier Doppeltangenten τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, welche ein Tangenten-Quadrupel von C_8^4 constituiren. Die acht Berührungspunkte vereinigen sich in folgender Ordnung zu Quadrupeln: b_1, b_2, b_3, b_4 — b_1', b_2', b_3', b_4', wobei Berührungspunkte einer Doppeltangente den mit dieser gleichen untern Index haben. Dreht sich E um $\overline{d_1'd_1''}$, so beschreiben die vier Doppeltangenten ebensoviele durch $\overline{d_1'd_1''}$ gehende, die Fläche γ^4 doppelt berührende Hyperboloide.

Obwohl dies schon aus der in Art. 11. gemachten Untersuchung erhellt, lässt es sich auch direct zeigen. Es ist nämlich an sich klar, dass, weil die Berührungspunkte b_1 und b_1' der Doppeltangente τ_1 nicht einem Punkt-Quadrupel angehören, auch die durch sie gehenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1'$ nicht einem Quadrupel angehören können, also jedenfalls windschief sind. Die Gerade τ_1, welche an $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1'$ und $\overline{d_1'd_1''}$ gleitet, erzeugt demnach ein Hyperboloid h^2, welches auch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ zu Erzeugenden hat. Nun ist unter den unendlich vielen γ^4 längs $\mathfrak{e}_1$ berührenden Hyperboloiden, welche durch $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ gehen, eines durch Angabe einer weitern Erzeugenden [1]), im vorliegenden Fall durch τ_1 bestimmt. Dieses Hyperboloid ($\mathfrak{h}^2$) berührt aber γ^4 längs $\mathfrak{e}_1'$, weil der Voraussetzung nach τ_1 die Fläche γ^4 in dem auf $\mathfrak{e}_1'$ befindlichen Punkt b_1' tangirt. Das Hyperboloid $\mathfrak{h}^2$ berührt daher γ^4 längs $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$, hat $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ und demnach auch $\overline{d_1'd_1''}$ zu Erzeugenden, ist also, was zu beweisen war, mit dem durch Gleiten von τ_1 an $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1'$, $\overline{d_1'd_1''}$ erzeugten Hyperboloid h^2 identisch.

„Die acht Berührungserzeugenden der vier, blos durch eine Verbindungslinie zweier Doppel-Inflexionspunkte (und nicht auch die ihr conjugirte) gehenden, die Fläche γ^4 doppelt berührenden Hyperboloide bilden zwei Erzeugenden-Quadrupel von γ^4. Die Berührungserzeugenden eines dieser Hyperboloide gehören diesen zwei Quadrupeln einzeln an.“

Von den weitern Eigenschaften der Regelfläche γ^4 wäre noch zu erwähnen, dass die zwei Doppelebenen δ_1', δ_2' (Doppel-Rückkehrtangentenebenen) eines erzeugenden Büschels, etwa $\varDelta_1(\delta, \delta')$, die Fläche in zwei harmonische Teile trennen.

---

1) Welche wenn sie mit $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ windschief ist, immer γ^4 in einem Punkt von $\mathfrak{e}_1$ berühren muss.

Denn sind δ und δ' irgend zwei bezüglich δ_2', δ_2' einander harmonisch conjugirte Ebenen des Büschels Δ_1, β, β' ihre Schnittpunkte mit Δ_2 und α einer ihrer (gemeinschaftlichen) Berührungspunkte mit γ^4; so sind $\overline{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{e}$ und $\overline{\alpha\beta'} \equiv \mathfrak{e}'$ die zwei sich in α begegnenden Erzeugenden. Nun ist leicht einzusehen, dass irgend eine in der Ebene $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}')$ befindliche Gerade g die Erzeugenden $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ in zwei Punkten p bzhw. p' schneidet, die durch die Schnitte von g mit δ_1', δ_2' harmonisch getrennt werden. Einer Erzeugenden $\mathfrak{e}$ entsprechen in dieser Weise zwei Erzeugende $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$, welche mit der ersten einem Quadrupel angehören, und gegen die vierte Erzeugende desselben dieselbe Lagen-Relation haben.

Der geehrte Leser vergleiche bezüglich der Resultate diesen Aufsatz und die später folgende Abhandlung: „Ueber rationale Regelflächen vierten Grades“ mit den über denselben Gegenstand von Chasles, Cayley und Cremona veröffentlichen Arbeiten, welche in den Quellen-Nachweisungen der analytischen Geometrie von Salmon-Fiedler erwähnt sind, und sich beziehungsweise in den „Comptes rendus“ (1861, Bd. 53); den „Philos. Transactions“ (1863—1869, Bd. 153, 154, 159), „Cambridge Transactions“ (1868, Bd. 11) und in „Mem. d. R. Ist. di Bologna“ (1868, Bd. 8) befinden.

Halas, den 31. März 1880.

A. Ameseder,
cand. prof.

VI.

Miscellen.

1.

Directe Bestimmung des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, \partial x$$

Nach dem 7ten Bande der Fortschritte der Mathematik hat Wolstenholme eine directe Entwickelung dieses Integrals mit Hülfe des $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x \, dx$ gegeben.

Im Jahre 1856 legte Professor Dr. Lehmus seinen Collegen das oben genannte Integral vor und der Unterzeichnete gab die folgende Lösung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{x}{2} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos x \, dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx,$$

also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

Kiel 1879. Ligowski.

2.

Eine merkwürdige Eigenschaft des Integrals der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{y^2 - \cos 2x}$$

Ich habe bewiesen, dass alle Werte, welche die Function y für

$$x = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{3\pi}{4}; \quad \frac{5\pi}{4}; \quad \ldots \quad (2n-1)\frac{\pi}{4} \quad \ldots$$

annimmt, algebraisch auf einander zurückgeführt werden können; welches auch immer die in y eintretende Constante sein mag. Um diese Relationen allgemein darzustellen, sei A der Wert, welchen y für $x = \frac{\pi}{4}$ annimmt; $y = f(x, a)$, so ist stets:

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}, a\right) = A \cdot \left(\frac{e^{\frac{n\pi}{2}} + \cos n\pi \,.\, e^{\frac{-n\pi}{2}}}{2}\right)$$
$$+ \sqrt{\frac{1}{2} + A^2} \,.\, \left(\frac{e^{\frac{n\pi}{2}} - \cos n\pi \,.\, e^{\frac{-n\pi}{2}}}{2}\right); \quad n \text{ ganz}$$

Ich habe ferner bewiesen, dass wenn $f(0, a) = 1$ ist,

$$f\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}, a\right) = \frac{e^{\frac{n\pi}{2}} + \cos n\pi \,.\, e^{\frac{-n\pi}{2}}}{2\sqrt{2}} \text{ wird.} \quad \binom{n \text{ ganz}}{> -1}$$

Mir ist bis jetzt kein Fall bekannt, dass man bei Differentialgleichungen ohne vorherige Trennung der Variabeln für besondere Werte der Argumente algebraische Beziehungen zwischen den entsprechenden Functionen aufgefunden oder letztere in geschlossener Form dargestellt hat.

Den Beweis werde ich an anderer Stelle mitteilen.

Kiel, den 4. Februar 1878. Meissel.

3.

Neue Herleitung der Kreistangentengleichung.

Sind

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=S=0$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\varrho^2=\Sigma=0$$

die Gleichungen zweier Kreise, so ist

$$S-\Sigma=0$$

die Gleichung der Radicalaxe beider Kreise. Für $\varrho=0$ reducirt sich der Kreis Σ auf einen Punkt. Die Gleichung der Radicalaxe wird dann:

$$2x(a-\alpha)+2y(b-\beta)+\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2+r^2=0$$

Liegt nun Σ auf dem Kreise S, so ist

$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2=r^2$$
$$\alpha^2+\beta^2=r^2+2a\alpha+2b\beta-a^2-b^2$$

Die Radicalaxe zwischen S und dem Nullkreise Σ hat also die Gleichung:

$$(x-a)(\alpha-a)+(y-b)(\beta-b)-r^2=0$$

Da diese Gerade durch die Schnittpunkte von S und Σ geht, diese aber einander unendlich nahe liegen; so geht sie in die Tangente des Kreises S im Punkte Σ desselben über. — Liegt der Punkt Σ nicht auf S, so erhalten wir als Radicalaxe eine Gerade $\mathfrak{G}$, deren jeder Punkt P die Eigenschaft hat, dass die Tangente von P an S ebenso lang ist als $P\Sigma$. Bewegt sich Σ auf einer Geraden, so hüllt $\mathfrak{G}$ einen Kegelschnitt ein.

Wien, Januar 1880. Emil Hain.

VII.

Ueber die Anziehung von Massenpunkten insbesondere mit Rücksicht auf die Lotstörungen.

Von

Herrn Dr. **Winterberg**
in Rom.

In Nr. 2167 der „Astronomischen Nachrichten" wurde der Einfluss eines nicht im Erdcentrum, sondern anderswo im Innern der Erde befindlichen Massenpunkts und der durch ihn veranlassten Anziehung, auf die Gestalt der Niveaufläche untersucht, unter der Annahme, dass seine Dichtigkeit die mittlere Erddichte übertrifft. Jene Untersuchung hatte wesentlich den Zweck, zu zeigen, wie sich unter Umständen gewisse Erscheinungen der Localattraction als Folge der Anziehung eines solchen Massenpunkts erklären lassen, und wie man demnach auch im Stande ist, aus den Beobachtungen Lage und Masse eines solchen Ablenkungs-Centrums zu bestimmen. Es wurde dabei, wie es für den genannten Zweck ausreichend war, die Anziehung der homogen gedachten Erde als constant betrachtet, oder, was dasselbe sagt, ihr Centrum als unendlich fern angesehen, so dass die Schwere der y-Axe parallel wirkte. Die auf jene Frage bezüglichen Untersuchungen führen indessen noch zu andern Ergebnissen, die nicht ohne Interesse sind. Ausser den damals besprochenen Niveauflächen repräsentirt nämlich die dort zu Grunde gelegte Gleichung noch eine zweite Gattung, die im Gegensatz zu jenen geschlossene sind. Auf diese Fälle soll hier zunächst nochmals etwas genauer eingegangen werden, als es damals geschehen, und namentlich der Zusammenhang untersucht werden, in welchem diese verschiedenen Arten von Flächen, die sich je nach der Wahl der Constanten ergeben, unter einander stehen.

Es sind ferner alle jene Fälle in sofern einer Verallgemeinerung fähig, als statt des unendlich fernen Centrums ein in beliebiger Entfernung befindliches, oder statt der Kugel von unendlich grossem Radius eine solche von beliebiger Grösse zu Grunde gelegt werden kann, und da sich gewisse Probleme der Attraction nur unter dieser Annahme erledigen lassen, so sollen auch diese Fälle hier näher untersucht werden.

An einem praktischen Beispiele wird schliesslich gezeigt, wie man durch Annahme solcher Ablenkungs-Centra den Einfluss der allgemeinen Lotstörung bezüglich der Punkte eines Meridians der Erdkugel in ähnlicher Art bestimmen kann, wie solches hinsichtlich der Punkte des Aequators durch Herrn Bruns (Gestalt der Erde) dargelegt worden.

§ 1.

Geht man von zwei Massenpunkten m_1, m_2 aus, die im Abstande a von einander liegen, bezeichnen r_1, r_2 die Abstände von einem beliebigen Punkte P, so wird die Gleichung der, durch ihn gelegten Niveaufläche dargestellt durch:

$$1) \qquad \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = \text{const.}$$

Wählt man die Verbindungslinie $m_1 m_2$ zur x-Axe, so ergibt sich für o als Coordinatenursprung, wenn

$$o m_1 = x$$
$$o m_2 = a - x$$

ferner ϱ, φ die bezüglichen Polar-Coordinaten sind:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{2x}{r}\cos\varphi + \frac{x^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{2(a-x)}{r}\cos\varphi + \frac{(a-x)^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Für solche Punkte der Niveaufläche, deren Abstand ϱ sowohl grösser als x wie $a-x$ ist, folgt hieraus durch Reihenentwickelung:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{x}{\varrho}\cos\varphi - \frac{x^2}{2\varrho^2}(1 - 3\cos^2\varphi) - \frac{x^3}{2\varrho^3}\cos\varphi(3 - 5\cos^2\varphi)\ \ldots\right)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{a-x}{\varrho}\cos\varphi - \frac{(a-x)^2}{2\varrho^2}(1 - 3\cos^2\varphi)\right.$$
$$\left. + \frac{(a-x)^3}{2\varrho^3}\cos\varphi(1 - 5\cos^2\varphi)\ \ldots\right)$$

Wählt man den gemeinsamen Schwerpunkt von m_1, m_2 zum Coordinatenursprung, so ist:

$$m_1 x + m_2(a - x) = 0$$

daher ergibt sich, wenn die vorstehenden Entwickelungen in 1) eingesetzt werden, unter dieser Voraussetzung:

$$\text{const.} = \frac{m_1 + m_2}{\varrho} - \frac{m_1 m_2 a^2}{2(m_1 + m_2)\varrho^3}(1 - 3\cos^2\varphi) - \frac{m_1 m_2 a^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{(m_2 - m_1)\cos\varphi(3 - 5\cos^2\varphi)}{2\varrho^4}.$$

Hieraus ersieht man, dass mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in erster Annäherung stets

$$\frac{m_1 + m_2}{\varrho} = \text{const.}$$

ist, d. h. die Wirkung beider Massen kann durch eine ihrer Summe gleichen im Schwerpunkt ersetzt werden. Andrerseits zeigt sich, dass, wenn beide Massen wenig verschieden, der Fehler der durch Abbrechen bei einem Gliede ungrader Ordnung entsteht, im Allgemeinen geringer ist als der im entgegengesetzten Falle, da die letzteren Glieder ihre Differenz als Factor enthalten, die ersteren dagegen die Summe.

Jenes Gesetz bezüglich der Vereinigung der Massen im Schwerpunkte, welches bekanntlich für die Punkte ausserhalb einer beliebig gestalteten Masse gilt, lässt sich nach den Principien der Zusammensetzung von Kräften auf beliebig viele Punkte ausdehnen.

Für drei nicht in grader Linie liegende Punkte m_1, m_2, m_3 findet man als Gleichung der Niveaufläche den früheren Bezeichnungen analog:

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} = \text{const.}$$

Sind $m_1 o$, $m_2 o$, $m_3 o$ die Abstände der Ecken des, durch sie gebildeten Dreiecks vom Coordinatenursprung, und bezeichnet resp.

$$\psi = \text{Wkl. } m_1 o P,$$

wo P ein Punkt der Niveaufläche,

$$\omega = \text{Wkl. } m_1 o m_2$$
$$\omega' = \text{Wkl. } m_1 o m_3$$

so erhält man durch Reihenentwickelung der bezüglichen Ausdrücke von r_1, r_2, r_3 nach Potenzen von ϱ unter der Annahme, dass ϱ stets

grösser als die drei Abstände $m_1 o$, $m_2 o$, $m_3 o$, die Gleichung der Niveaufläche:

$$\text{const} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\varrho} + \frac{m_1 o \,.\, \cos\psi + m_2 o \,.\, \cos(\omega - \psi) + m_3 o \,.\, \cos(\omega' + \psi)}{\varrho^2} + \cdots$$

Verlegt man den Coordinatenursprung so, dass das zweite Glied rechts verschwindet, so folgen daraus, da ψ beliebig ist, die zwei Bedingungsgleichungen:

$$m_1 o + m_2 o \cos\omega + m_3 o \cos\omega' = 0$$
$$m_2 o \sin\omega - m_3 o \sin\omega' = 0$$

welche zeigen, dass der Coordinatenanfang im Durchschnitt der 3 Winkelhalbirenden des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ liegt. Denn bezeichnen Q, R, S die Punkte, wo diese die Gegenseiten des Dreiecks treffen, so ergibt sich aus der zweiten Gleichung leicht die Relation:

$$\frac{m_1 Q \,.\, m_2 R \,.\, m_3 S}{m_1 R \,.\, m_2 S \,.\, m_3 Q} = 1$$

Dieselbe Relation gilt aber andrerseits auch für den gemeinsamen Schwerpunkt der 3 Massenpunkte, wenn man unter Q, R, S die resp. Schwerpunkte von $m_1 m_2$, $m_1 m_3$, $m_2 m_3$ versteht. Daraus folgt die Richtigkeit des Satzes für 3 Punkte. Man sieht wie sich derselbe ohne Schwierigkeit weiter ausdehnen lässt.

Die übrigen Reihenentwickelungen gelten nicht mehr, wenn der Abstand a beider Centra im Vergleich zum Radiusvector gross ist. Ein solcher Fall würde vorliegen, wenn es sich um den Einfluss eines Massenpunkts innerhalb oder ausserhalb der Erdoberfläche handelt, wie solches früher untersucht. Er würde ferner vorliegen, wenn z. B. der Einfluss der Sonnen-Attraction auf die Gestalt der Niveaufläche der Erde untersucht werden sollte, abgesehen von der durch die Bewegung hervorgebrachten Veränderung. Denn in diesen Fällen kann a als unendlich gross gegen ϱ betrachtet werden.

Verlegt man im Falle, wo $a > \varrho$, den Coordinatenursprung in das Centrum der kleineren Masse — im letztgenannten also in den Erdmittelpunkt — so ergibt sich mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen die Gleichung der Niveaufläche:

$$\frac{m_1}{\varrho} + \frac{m_2}{r_2} = \text{const.}$$

wo:

$$r_2^2 = \varrho^2 + a^2 - 2a\varrho\cos\varphi$$

Entwickelt man $\frac{1}{r_2}$ nach absteigenden Potenzen von a, so folgt in erster Annäherung:

$$\frac{m_1}{\varrho} + \frac{m_2}{a}\left(1 + \frac{\varrho}{a}\cos\varphi\right) = \text{const.}$$

woraus man sofort erkennt, dass diese Gleichung sich auf die Form der früher aufgestellten bringen lässt. Denn, da $\varrho\cos\varphi = x$, so ergibt sich mit Vertauschung der x- und y-Axe:

$$\frac{1}{\varrho} + ky = c \tag{3}$$

Hierdurch ist allgemein nachgewiesen, dass man in erster Annäherung die Anziehung eines der beiden Massenpunkte stets als constant betrachten kann, so lange es sich um Punkte in der Nähe des einen oder des andern von beiden handelt.

Es ist also nicht sowohl der Massenunterschied, als vielmehr der Abstand beider Punkte für die Probleme der angegebenen Art von Bedeutung.

Dem Vorherigen gemäss kann in den Problemen der Local- wie auch der allgemeinen Lotstörung die ablenkende Masse m sowohl positiv wie negativ gedacht werden, jenachdem ihre Dichtigkeit die mittlere Erddichte übertrifft, oder geringer ist. Es verhält sich im letzteren Falle das Ablenkungs-Centrum gleichsam repulsiv, weil alle umgebenden Massenteile auf die Punkte der Niveaufläche eine stärkere Attraction ausüben als jenes.

Die Niveauflächen werden ferner im Allgemeinen verschieden sein, jenachdem sie beide Centra, oder nur eins umgeben.

In dem früher behandelten Probleme wurde die Gestalt der Niveaufläche wesentlich durch die Gleichung:

$$gy = \text{const.}$$

d. h. durch eine Reihe unbegrenzter Ebenen senkrecht zur y-Axe dargestellt, während der, in Folge der Attraction des Punkts m hinzutretende Teil $\frac{m}{r}$ die Abweichung von jener Gestalt ergibt.

Soll hingegen der Einfluss der Sonnenattraction auf die kugelförmig gedachte Meeresfläche ermittelt werden, so stellt die Gleichung

$$\frac{m}{r} = \text{const.}$$

d. h. eine Reihe concentrischer Kugeln wesentlich die, die Erde umgebenden Niveauflächen dar, während die, durch den unendlich fernen Sonnenkörper erzeugte Abweichung von dieser Form durch das Glied gy ausgedrückt wird.

Um daher aus der Gleichung 3) sowohl die, dem einem wie dem andern Probleme entsprechenden Niveauflächen ableiten zu können, müssen die, jedem einzelnen zukommenden speciellen Bedingungen gegeben sein, die für das erste darin bestehen, dass zu jedem x zwischen 0 und ∞ zwei reale Werte y existiren, wovon der eine dem Problem genügt. Für den zweiten Fall hingegen dürfen nur bis zu einem bestimmten Grenzwerte von x die, dem Probleme entsprechenden Werte von y existiren, da die Curve eine geschlossene.

Aus der Gleichung 3) ergibt sich die rationale Form:

4) $$(y-c)^2(x^2+y^2)-k^2=0$$

wo, wie früher angegeben, die Bedeutung der Constanten für das erste Problem hervorgeht aus

$$y_0 = c$$
$$y_1(y_1-y_0) = k$$

wenn y_0 die dem Werte $x=\infty$, y_1 die $x=0$ entsprechende Ordinate bezeichnet.

Transformirt man 4) auf Polar-Coordinaten, so folgt:

5) $$r^2 \sin\varphi - cr - k = 0$$

welche zeigt, dass zu jedem φ zwei reale Werte von r gehören, von denen der mit dem positiven Wurzelzeichen dem Probleme entspricht, da alle grösser als y_0 sein müssen. Man erhält daher, von einem bestimmten Werte von φ, z. B. von $\varphi = 90^0$, welchem der Wert $r = y_1$ entspricht, beginnend, durch successive Aenderung dieses Winkels eine stetige Folge von r, die in ihrem Zusammenhange die Curve ergeben.

Ihre Construction ist jedoch wie früher angegeben, einfacher aus der Form

$$(y-y_0)r = k$$

abzuleiten, wonach zu jedem $y > y_0$ ein bestimmtes r sich als dritte Proportionale zwischen $y-y_0$ und $\sqrt{k}$ ergibt, welche letztere Grösse sich geometrisch darstellen lässt, zufolge der durch die Relation $k = \frac{m}{g}$ ausgedrückten Bedeutung.

Im Falle m abstossend wirkt, wie bei Höhlungen im Innern der Erde, ist die Curve nach unten statt nach oben convex, wie sich schon durch mechanische Betrachtung ergibt, da die Resultante der Anziehung stets senkrecht zur Niveaufläche stehen muss. Daher hat man in diesem Falle zur Construction die Form zu Grunde zu legen:

$$(c-y)\,r=k$$

wo die Werte von y kleiner als c zu nehmen, während das Minimum von y sich ausdrückt durch

$$y=\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-k}$$

wo das positive Wurzelzeichen genommen, weil für $k=0$ $y=c$ resultiren muss. Soll in diesem Falle die ganze Curve real sein, so muss die Bedingung

$$c^2-4k \geqq 0$$

erfüllt sein.

Für die zweite Art von Flächen hat man die Bedingung auszudrücken, dass sie geschlossen sein sollen. Bezeichnet man demgemäss die Axenabschnitte der y-Axe resp. durch r_2, r_3, den der x-Axe mit r_1, so ergibt sich, wenn man der bessern Uebereinstimmung des Folgenden wegen die Constante c negativ also statt 5) die Form

$$r^2\sin\varphi+cr-k=0 \tag{5a}$$

wählt, für die Werte $\varphi=0^0, 90^0, 270^0$:

$$r_1=\frac{k}{c}$$

$$r_2^2+cr_2-k=0 \tag{6}$$
$$r_3^2-cr_3+k=0$$

woraus für k, c die Werte folgen:

$$c=\frac{r_2^2+r_3^2}{r_3-r_2} \tag{7}$$

$$k=\frac{r_2r_3(r_2+r_3)}{r_3-r_2}$$

mit der Bedingung:

$$r_1=\frac{r_2r_3(r_2+r_3)}{r_2^2+r_3^2}$$

wo, wie man sieht, r_1 ein Mittelwert von r_2, r_3 ist, so dass man hat:

$$r_3>r_2>r_1$$

Umgekehrt lassen sich aus diesen Relationen die Axenabschnitte r_2, r_3 eindeutig bestimmen. Denn der Bedingung $r_2 > r_3$ können, da beide nur positive Werte haben, nur die Ausdrücke entsprechen:

$$r_2 = \frac{-c+\sqrt{c^2+4k}}{2}$$

$$r_3 = \frac{c-\sqrt{c^2-4k}}{2}$$

Die Forderung $r_3 > r_2$ wird erfüllt, solange $c^2 \geqq 4k$ ist, welches zugleich die Realitätsbedingung der Curve ist.

Unter dieser Bedingung finden sich zufolge 5a) auch für diesen Fall zu jedem Werte von φ zwischen 0^0 und 360^0 je zwei reale Werte von r, wovon einer dem Problem genügt. Denn geht man auch hier von einem bestimmten Anfangswerte von φ, z. B. von $\varphi = 0$, welchem der Wert r_1 entspricht, aus, und lässt φ successive wachsen, so ergibt sich dadurch eine stetige Folge von $r < r_1$ die successive bis zum Werte r_2 abnehmen; deren Zusammenhang somit diesen Teil der Curve darstellt.

Für die Construction ist wiederum die Form bequemer:

$$(c+y)r = k \tag{8}$$

worin für y alle positiven Werte zwischen 0 und r_2, resp. alle negativen zwischen 0 und r_3 zu nehmen sind, um den obern, resp. untern Flächenteil, in derselben Art wie für das erste Problem angegeben, zu construiren, vorausgesetzt, dass man nach 6) die Axenabschnitte bestimmt, und $\sqrt{k}$ als geometrische Grösse dargestellt hat.

Die Figur 1., welche die Construction verdeutlichen soll, bedarf hiernach wohl keiner weitern Erläuterung.

Es kann nun noch ein dritter Fall eintreten, der gewissermassen den Uebergang der beiden vorigen bildet, wenn nämlich m oberhalb des allgemeinen Niveaus der Erdoberfläche liegt, wie z. B. der Fall, wenn man die Attraction eines Gebirges durch eine ihm gleiche im Schwerpunkt vereinigte Masse ersetzt denkt. Hierbei werde zunächst vorausgesetzt, dass die Niveaufläche beide Centra, das ∞ ferne Erdcentrum, wie den Punkt m umgebe. Alsdann hat man, wenn wie bisher in m der Coordinaten-Ursprung und die Axen wie vorher gewählt werden, im Gegensatz zum ersten Probleme die Bedingung, dass jetzt sowohl positive wie negative Werte von y zulässig sind. Es wird demnach (s. Fig. 2.) der obere Teil der Curve ganz ebenso construirt, wie für die geschlossene Fläche angegeben, so dass sich die Axenabschnitte der x- und y-Axe ergeben aus

$$r_1 = \pm \frac{k}{c}$$

$$r_2^2 + cr_2 - k = 0$$

woraus wiederum folgt:

$$c = \frac{r_2^2}{r_1 - r_2}$$

$$k = \frac{r_1 r_2^2}{r_1 - r_2}$$

Da c im oberen wie im unteren Teile denselben Wert hat, so sieht man wie letzterer zu construiren, indem die Länge mo die der Abscisse $x = \infty$ entspricht gleich dem vorstehend durch r_1, r_2 ausgedrückten Werte von c zu nehmen, und im Uebrigen wie beim ersten Probleme zu verfahren ist.

Um zu erkennen, in welchen Zusammenhange die verschiedenen Arten von Flächen stehen, ist eine Untersuchung ihrer Singularitäten erforderlich.

Zunächst erhält man das Maximum oder Minimum der Ordinaten zufolge:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{kx}{ky \pm r^3}$$

wo das positive oder negative Vorzeichen dem jedesmaligen Probleme entsprechend zu wählen. Die fraglichen Werte ergeben sich daher für $x = 0$ resp. $x = \infty$, wo dies zulässig.

Untersucht man ferner die Stellen, wo $\frac{dy}{dx}$ ein Maximum wird, oder wo die Curve den Sinn ihrer Krümmung ändert, so ergeben sich aus der Bedingung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

die in der vor. Abh. dem ersten Probleme entsprechend, abgeleiteten Relationen:

$$x = \frac{2y - c}{\sqrt{2}}$$

$$(y - c)^2 (6y^2 - 4cy + c^2) - 2k^2 = 0 \tag{9}$$

Dass ein solches Maximum von $\frac{dy}{dx}$ existirte, zeigte der Charakter der dem Problem entsprechenden Curve. Denn da dieselbe von 0 bis ∞ stetig verläuft, im Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ den Wert

$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ besitzt, so musste auf der Strecke von $0 \ldots \infty$ offenbar eine Stelle der verlangten Art liegen. In der Tat zeigt sich auch algebraisch, dass die Gleichung 9) innerhalb des Intervalls $y = c \ldots y = y_1$ stets eine reale Wurzel besitzt.

Denn bezeichnet man die linke Seite von 9) mit V und bildet daraus die vier ersten Ableitungen nach y, so findet man daraus die Reihe der Vorzeichen:

1) für $y = c$: $- \quad \pm 0 \quad + \quad + \quad +$
2) „ $y = y_1$: $+ \quad + \quad + \quad + \quad +$

woraus, dem Sturm'schen Satze zufolge, da 2) einen Zeichenwechsel weniger als 1) ergibt, hervorgeht, dass eine reale Wurzel in diesem Intervall sich befindet.

Bei den Flächen der zweiten Art existirt dagegen ein solches Maximum nicht. Denn transformirt man 9), welche sich dem Vorherigen entsprechend, auf den unteren Teil bezieht, auf Polar-Coordinaten und eliminirt dann φ mittelst der diesem Flächenteil entsprechenden Gleichung, so folgt die Relation:

$$2r^4 . 3r^2 c^2 + 8r . ck - 6k^2 = 0 \tag{10}$$

Bildet man wie vorher die Sturm'sche Reihe aus den 4 ersten Ableitungen der linken Seite von 10) nach r, so findet sich die Reihe der Vorzeichen:

1) für $r = r_1$: $- \quad + \quad - \quad + \quad +$
2) „ $r = r_3$: $- \quad + \quad - \quad + \quad +$

also es gibt, da die Zahl der Zeichenwechsel dieselbe, im Intervall $r_1 \ldots r_3$ keine reale Wurzel von 10).

Ganz analog leitet man dasselbe Resultat für das Intervall $r_1 \ldots r_2$ bezüglich des oberen Teils ab, wofür dieselbe Gleichung 10) gilt, so dass also bei dieser Art von Flächen die Krümmung stets convex nach Aussen bleibt.

Bei den, den Uebergang bildenden Curven können dementsprechend solche Stellen nur in dem Intervalle von 0 bis c liegen. In der Tat ergibt sich algebraisch auf dieselbe Art wie vorher, dass die Gl. 9) in diesem Intervalle stets reale Wurzeln besitzt.

Die geschlossenen Flächen werden dagegen stets Stellen haben, wo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$$

Diese Bedingung ergibt, dem Ausdrucke von $\frac{\partial y}{\partial x}$ zufolge, die Relation:

$$ky \pm r^3 = 0 \tag{11}$$

wo das doppelte Vorzeichen dem oberen, resp. unteren Teile der Fläche entspricht.

Auch hier zeigt sich algebraisch, dass eine reale Wurzel dieser Gleichung, und zwar im Intervalle $r_1 \ldots r_3$, d. h. also dem unteren Teile der Fläche entsprechend, stets existirt. Denn transformirt man die Gl. 11), wo das untere Zeichen zu nehmen, mittelst der entsprechenden Flächengleichung:

$$y = \frac{cr - k}{r}$$

so erhält man:

$$r^4 - r.ck + k^2 = 0$$

Setzt man hier die Grenzwerte $r_1 \ldots r_3$ ein, so folgt, wenn wie früher die linke Seite dieser Gleichung mit A bezeichnet wird

1) für $r = r_1 \quad A = r_1^4 > 0$
2) „ $r = r_3 \quad A = r_3^2 (r_3^2 - k)$

zufolge 6), woraus, wenn man für k seinen ebenda berechneten Wert setzt, folgt:

$$A = (r_3 + r_2)(r_3 - r_2) - 2r_2r_3 < 0$$

woraus das Behauptete hervorgeht.

Auch mechanisch ist leicht einzusehen, dass die fraglichen Stellen nur im unteren Teile der Curve liegen können. Denn denkt man sich ober- wie unterhalb m die Resultanten der Anziehung construirt, so werden sie die y-Axe stets unterhalb des Attractions-Centrums m treffen, folglich auch dann, wenn ihre Richtung parallel zur x Axe.

Die Curven der ersten Art können naturgemäss nur dann solche Stellen haben, wo $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird, wenn m oberhalb des allgemeinen Niveaus der Erdoberfläche liegt, und um diesen Punkt sich eine schon teilweise geschlosse Fläche gebildet hat. Denn offenbar können solche Stellen nur dann vorkommen, wenn die vorher untersuchten Maxima von $\frac{dy}{dx}$ den Wert ∞ entweder erreicht, oder ihn bereits überschritten haben, d. h. wenn die Tangenten in den Inflexionspunkten, statt sich auf der positiven Seite der y-Axe zu schneiden, entweder dieser parallel geworden, oder sich bereits auf der negativen Seite der y-

Axe treffen. Die Curve, welche dem ersten Falle entspricht, ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung, wenn man die Constanten k, c so bestimmt, dass gleichzeitig 9) und 12) befriedigt werden. Die Bedingung, dass die Resultante dieser Gleichungen verschwindet, ergibt alsdann die Relation:

$$27c^8 + 16^3k^4 - 16.43k^2c^4 = 0$$

welche aufgelöst zu den zwei Relationen führt:

$$1) \quad c^4 = 16k^2$$

$$2) \quad c^4 = \frac{256}{27}k^2$$

Die erste Bedingung kann, wie sich im Folgenden zeigen wird, dem vorgelegten Falle nicht entsprechen, denn es wird unter dieser Bedingung nicht nur der Nenner, sondern zugleich der Zähler von $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu Null, die Tangente selber also unbestimmt, oder mehrdeutig. Daher bleibt blos die letzte Bedingung, oder:

$$c^2 = 3,08k$$

Während also (s. Fig. 3.) die Curven, bei denen c^2 kleiner als dieser Wert ist, die Form 1), die, wo es grösser, die Form 3) haben, bezeichnet 2) die Curve des Uebergangs, wo c^2 grade den vorstehenden Wert besitzt.

Es handelt sich nun noch um einen ferneren Grenzfall, wo nämlich die beiden Inflexionspunkte A, A zusammenfallen. Dies kann natürlich, der Symmetrie wegen, nur in der y-Axe geschehen. Aus der ersten der Relat. 9) folgt für $x = 0$

$$y = \frac{c}{2}$$

woraus wiederum hervorgeht, dass nur, wenn m oberhalb der Erdoberfläche liegt, dieser Fall eintreten kann, da entgegengesetzten Falls alle y stets grösser als c sind. Sollen diese Werte von x, y der Fläche genügen, so muss, wie sich leicht aus Gl. 4) ergibt, die Bedingung stattfinden:

$$c^2 = 4k$$

Dieselbe Bedingung findet sich andererseits auch, wenn man den Fall untersucht, unter welchen Umständen die Gl. 4) einen isolirten Punkt darstellt. Denn setzt man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{kx}{ky \pm r^3} = \frac{0}{0}$$

so ergibt sich $x = 0$, $y = \sqrt{k}$, welches in die Gl. 4) gesetzt, zu derselben Bedingung führt. Daraus folgt, dass der fragliche Punkt kein isolirter, sondern ein mehrfacher sein muss. In der Tat findet man, wenn man nach bekannter Methode die Werte von $\frac{\partial y}{\partial x}$ in diesem Punkte ermittelt, dass sie real sind. Bezeichnet man dazu die linke Seite von 4) mit $F(xy)$ und bildet die ersten und zweiten Ableitungen dieses Ausdrucks nach x und y, so muss, wenn zwei Tangenten im fraglichen Punkte stattfinden, die Relation erfüllt sein:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

wie sich auf bekannte Art findet. Diese geht im vorgelegten Falle für $x = 0$, $y = \frac{c}{2}$ über in:

$$c^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{c^2}{2} = 0$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Der fragliche Punkt (s. Fig. 4.) ist daher ein Doppelpunkt, worin sich die beiden Tangenten unter einem Winkel von $129^0\, 48'\, 38''$ schneiden.

Es bildet somit in dem gedachten Falle die Curve eine Schleife, der obere Teil ist geschlossen, der untere erstreckt sich in's Unendliche ohne Wendepunkte. Beide hängen im Punkte $x = 0$, $y = \frac{c}{2}$ zusammen. Wird der Abstand $c^2 = 4k$ von m überschritten, so reissen beide Teile aus einander, der obere bildet für sich eine geschlossene Fläche der zweiten Art, der untere eine solche der ersten, wo wiederum reale Wendepunkte existiren, nur ist in diesem Falle, dem ersten Problem entgegen, für die Construction die Form:

$$(c - y)\,r = k$$

zu wählen, weil jetzt alle Ordinaten kleiner als c sein müssen.

Hiernach ergibt sich eine vollkommen klare Vorstellung über den Zusammenhang der verschiedenen Arten von Niveauflächen resp. deren Meridiancurven:

1) Liegt der Punkt m im Innern der Erde, so umhüllt die Niveaufläche beide, das unendlich ferne Erdcentrum wie m selber, und erstreckt sich ins Unendliche, indem an zwei bestimmten Stellen der Sinn ihrer Krümmung sich ändert. Bewegt m sich aufwärts, so

nähern sich jene Stellen, es wachsen die Maxima der Tangenten, während die Fläche immer noch beide Centra umgibt, und sich in's Unendliche erstreckt. Entfernt sich m soweit, dass $c^2 = 3{,}08k$ wird, so bilden sie mit der x-Axe einen Winkel von 90^0, und es beginnt sich um m eine geschlossene Fläche zu bilden. Wenn $c^2 = 4k$ geworden, so schliesst sie sich vollständig, und hängt mit dem übrigen Flächenteile nur in einem Punkte noch zusammen. Bei noch grösserer Entfernung trennen sich beide Teile.

Die Curven, die entstehen, wenn m als abstossend gedacht wird, sind von denen, wo m anzieht, nicht verschieden. Liegt ein solches abstossendes Centrum im Innern der Erde, so wird (s. Fig. 5) die erzeugte Curve 1) dieselbe sein wie 2), die von m_1 im Falle der Anziehung erzeugte, wo m sich in solcher Distance befindet, dass $c^2 > 4k$ ist. Denn beide gehen aus derselben Gleichung unter denselben Bedingungen hervor. Ebenso wird die Curve 2') der Anziehung, wobei m_1' im Innern der Erde liegt, dieselbe sein wie 1'), welche ein über der Erdoberfläche gedachtes abstossendes Centrum erzeugen würde.

Was die Kraftlinien betrifft, so ist ihr Charakter bereits in der vor. Abh. als algebraische Curven dargelegt. Es ist hierbei ein Versehen zu berichtigen, insofern dieselben nicht wie dort angegeben, ebenfalls vom 4ten, sondern vom 6ten Grade sind. Die zu Grunde gelegte Differentialgleichung lautet nämlich nach Substitution von $y = xt$:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{x}{k}\sqrt{(1+t^2)^3}$$

welche durch Integration ergibt:

$$(x^2 - c')^2 (x^2 + y^2) = 4k^2 y^2$$

wonach sich die weitern Resultate, wenn auch nur unwesentlich, modificiren.

Hinsichtlich der praktischen Anwendungen, wo es sich um Ermittelung der Constanten k, c aus Betrachtungen handelt, würde dem bereits in der ersten Abhandlung Gesagten noch Folgendes hinzuzufügen sein.

Offenbar kann man, von einer bestimmten Niveaufläche resp. deren Meridian-Curve ausgehend, deren höchsten Punkt Q man als gegeben ansehen darf, durch praktische Beobachtungen eine Reihe von Punkten Q', Q'' ... der Curve dadurch bestimmen, dass man deren Abscissen x, von Q aus wie vorher im horizontalen Sinne gezählt, sowie die in ihnen stattfindenden Lotablenkungen feststellt.

Bezeichnet man die den resp. Punkten Q entsprechenden Elemente mit Δx, Δy, $\operatorname{tg}\varepsilon$ so folgt; dass man durch Beobachtung folgende Bestimmungen für die Werte eines Coordinatenpaares erhält:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta x \operatorname{tg}\varepsilon \\ \Delta y' &= \Delta x' \operatorname{tg}\varepsilon' \\ &\vdots \\ \hline y &= \Sigma \Delta x . \operatorname{tg}\varepsilon \\ x &= \Sigma \Delta x \end{aligned}$$

Durch zwei so gefundene Coordinatenpaare zweier Punkte Q', Q'' der Curve bestimmt man sodann die Constanten k, c mittelst der ihr entsprechenden Gleichung. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass sich die vorigen Gleichungen auf Punkt m als Coordinatenursprung bezogen, die durch Beobachtung gefundenen Coordinaten aber auf Punkt Q. Daher hat man, um sie einsetzen zu können, zuvor die Flächengleichung auf letzteren Punkt zu transformiren *).

Dieselbe erhält durch die Substitution

$$y = y_1 - y'$$

die Form:

$$(y_1 - c - y')^2 (x^2 + (y_1 - y')^2) = k^2$$

1) Man kann der Einfachheit wegen nun zuerst annehmen, dass man den Grenzwert $y_1 - y_0$ der Ordinate, d. h. ihren Wert für die Stelle ermittelt habe, wo die Lotablenkung beginnt, die streng genommen im Unendlichen liegen müsste. Bezeichnet man diesen Wert mit d, so hat man nach dem Früheren:

$$\begin{aligned} c &= y_1 - d \\ k &= y_1 - d \end{aligned}$$

folglich geht die obige Flächengleichung über in:

$$(d - y')^2 (x^2 + (y_1 - y')^2) = y_1^2 d^2$$

Es seien nun für einen zweiten Punkt die Coordinaten a, b gefunden, so ergibt sich durch Einsetzen derselben:

$$(d - b)^2 (a^2 + (y_1 - b)^2) = y_1^2 d^2$$

worin noch y_1 zu bestimmen.

---

*) In der erwähnten Abh. wurde der Maximalwert der Ordinate y_1 irrtümlich anstatt der Grösse $y_1 - y_0$ als direct messbar angenommen. Unter Zugrundelegung der letzteren Grösse modificiren sich daher die dort gegebenen Relationen, wie aus dem Folgenden ersichtlich.

Vernachlässigt man in der Klammer links die Grösse b gegen y_1, was ohne erheblichen Fehler geschehen darf, so ergibt sich:

$$y_1 = \frac{a(d-b)}{\sqrt{b(2d-b)}}$$

folglich:

$$k = \frac{ad(d-b)}{\sqrt{b(2d-b)}}$$

2) Wenn statt d die Coordinaten eines beliebigen andern Punkts bestimmt wären, so hätte man für diesen Fall die zwei Relationen:

$$(d-b)^2(a^2 + (y_1-b)^2) = y_1^2 d^2$$
$$(d-b')^2(a'^2 + (y_1-b')^2) = y_1^2 d^2$$

wo a', b' die Coordinaten des zweiten Punkts bezeichnen.

Unter Voraussetzung derselben Approximation wie vorher, ergibt sich daraus:

$$y_1 = \frac{a(d-b)}{\sqrt{b(2d-b)}} = \frac{a'(d-b')}{\sqrt{b'(2d-b')}}$$

woraus d zu bestimmen.

Schreibt man diese Gleichung nach Beseitigung der Wurzeln in der Form:

$$a^2b'(d-b)^2(d-b') - a'^2b(d-b')^2(d-b) = a'^2bd(d-b')^2 - a^2b'd(d-b)^2$$

so kann angenähert die linke Seite vernachlässigt werden, weil sie die kleinen Grössen $d-b$, $d-b'$ in dritter Ordnung enthält, die rechte nur in zweiter. Daraus folgt der genäherte Wert von d

$$d = \frac{\sqrt{bb'}\,(a\sqrt{b} - a'\sqrt{b'})}{a\sqrt{b'} - a'\sqrt{b}}$$

Ferner ergibt sich unter dieser Voraussetzung:

$$y_1 = \frac{a(d-b)}{\sqrt{bd}} = \frac{a'(d-b')}{\sqrt{db'}} = \frac{aa'(b-b')}{(a\sqrt{b'} - a'\sqrt{b})\sqrt{d}}$$

Wenn man nun b, b' so wenig verschieden nimmt, dass man den Factor von $\sqrt{bb'}$ im Ausdrucke für d gleich Eins setzen, d. h. $b = b' = \sqrt{bb'}$ nehmen darf, so ergibt sich:

$$d = \sqrt{bb'}$$

$$y_1 = \frac{aa'(b-b')}{\sqrt{bb'}(a-a')}$$

folglich:

$$k = \frac{aa'(b-b')}{a-a'}$$

welches letzte Resultat sich auch direct ergibt, wenn man in der Gleichung der Curve die Grösse $(y_1-b)^2$ gegen a^2 vernachlässigt.

3) Hat man statt der beiden Coordinaten x, y nur die Abscisse x und den im resp. Punkte stattfindenden Lotablenkungswinkel ε bestimmt, so ergeben sich aus zwei solchen Daten ebenfalls die Constanten. In diesem Falle hat man, da die Abscisse bei dem nach Q verschobenen Coordinatensystem unverändert geblieben, die ursprüngliche Curvengleichung beizubehalten.

Bezeichnen a, ε die für den ersten Punkt bestimmten Grössen, so hat man dem Vorherigen zufolge:

$$(y-c)^2(a^2+y^2) = k^2$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{ka}{ky+\sqrt{(a^2+y^2)^3}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Elimination von k:

$$2y^2\operatorname{tg}\varepsilon - y(c\operatorname{tg}\varepsilon + a) + a(a\operatorname{tg}\varepsilon + c) = 0$$

Der hieraus folgende Wert von y^2, in die erste eingesetzt, liefert alsdann eine zweite nach x quadratische Gleichung:

$$y^2(a^2-2ac\operatorname{tg}\varepsilon-3c^2\operatorname{tg}^2\varepsilon)-2cy(a^2+2a^2\operatorname{tg}^2\varepsilon-2ac\operatorname{tg}\varepsilon-c^2\operatorname{tg}^2\varepsilon)$$
$$-a(a\operatorname{tg}^2\varepsilon(a^2-2c^2)-2c^3\operatorname{tg}\varepsilon-ac^2) = 4k^2\operatorname{tg}^2\varepsilon$$

die sich angenähert, mit Vernachlässigung kleiner Grössen 3ter Ordnung schreiben lässt:

$$y^2-2cy-\left(a^2\operatorname{tg}^2\varepsilon-c^2+\frac{4k^2\operatorname{tg}^2\varepsilon}{a^2}\right) = 0$$

woraus:

$$y = \frac{ac \pm \sqrt{a^4+4k^2}.\operatorname{tg}\varepsilon}{a}$$

Diesen Wert in die Curvengleichung eingesetzt, erhält man:

$$y^2 = \frac{a^2(k^2-\operatorname{tg}^2\varepsilon(a^4+4k^2))}{(a^4+4k^2)\operatorname{tg}^2\varepsilon}$$

Durch nochmaliges Einsetzen dieser Werte von y, y^2 in die Curvengleichung ergibt sich nach Fortschaffung der Wurzelgrössen:

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon[a^4k^2-\operatorname{tg}^2\varepsilon(a^4+4k^2)(a^4(1+\operatorname{tg}^2\varepsilon)-a^2c^2+4k^2\operatorname{tg}^2\varepsilon)]^2$$
$$= 4a^6c^2[k^2-(a^4+4k^2)\operatorname{tg}^2\varepsilon][a^4+4k^2]$$

woraus sich mit Vernachlässigung kleiner Grössen 4ter Ordnung findet:

$$a^2 k^2 \mathrm{tg}^2 \varepsilon = 4c^2(a^4 + 4k^2)$$

Bezeichnen ferner a', ε' die beobachteten Grössen für den zweiten Punkt, so hat man analog:

$$a'^2 k^2 \mathrm{tg}^2 \varepsilon' = 4c^2(a'^4 + 4k^2)$$

Beide Relationen liefern:

$$k^2 = a^2 a'^2 \cdot \frac{(a^2 \mathrm{tg}^2 \varepsilon' - a'^2 \mathrm{tg}^2 \varepsilon)}{4(a^2 \mathrm{tg}^2 \varepsilon - a'^2 \mathrm{tg}^2 \varepsilon')}$$

$$c^2 = a^2 a'^2 \cdot \frac{(a^2 \mathrm{tg}^2 \varepsilon' - a'^2 \mathrm{tg}^2 \varepsilon)}{a^4 - a'^4}$$

Waren speciell die beiden Stellen so gewählt, dass die Lotablenkungen einander gleich, so ergibt sich von letzteren unabhängig:

$$k = \frac{aa'}{2}$$

$$c = \frac{aa'}{\sqrt{a^2 + a'^2}}$$

4) Die einfachste Bestimmung würde die sein, wobei nur eine Beobachtung erforderlich. Eine solche Möglichkeit ergibt sich, wenn man die Stelle wählt, wo $\frac{dy}{dx}$ sein Maximum erreicht. In diesem Falle müssen wiederum die Coordinaten auf Q als Ursprung übertragen werden. Durch die Substitution von $y = y_1 - y'$, $k = y_1 d$ in die Gleichungen 9) erhält man, wenn zugleich statt x, y' die Beobachtungswerte a, b gesetzt werden:

$$(d-b)^2[6(y_1-b)^2 - 4(y_1-d)(y_1-b) + (y_1-d)^2] = 2y_1^2 d^2$$
$$2a^2 = (y_1 - 2b + d)^2$$

wo y_1, d zu bestimmen.

Die zweite Gleichung lässt sich schreiben:

$$a\sqrt{2} - (y_1 - b) - (d - b) = 0$$

Betrachtet man wieder $d-b$ als klein gegen a, so hat man genähert:

$$y_1 = a\sqrt{2} + b$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt:

$$(d-b)^2(6a^2 - 2a\sqrt{2}(b-d) + (b-d)^2) = d^2(a\sqrt{2}+b)^2$$

Vernachlässigt man wiederum in der zweiten Klammer links $d-b$ gegen a, so ergibt sich aus der entstehenden Relation

$$(d-b)\,a\sqrt{6} = d(a\sqrt{2}+b)$$

der genäherte Wert:

$$d = \frac{ab\sqrt{6}}{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)-b} = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1},$$

somit:

$$k = \frac{ab\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$$

$$c = a\sqrt{2} - \frac{b}{\sqrt{3}-1} = a\sqrt{2}$$

Wäre statt der Ordinate der Winkel ε beobachtet, so hätte man jetzt zur Bestimmung der Constanten:

$$2a^2 = (2y-c)^2$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{ka}{ky+\sqrt{(a^2+y^2)^3}}$$

wozu die Gleichung der Curve:

$$k^2 = (y-c)^2(a^2+y^2)$$

welche 3 Gleichungen zur Bestimmung von y, k, c dienen. Die zweite und dritte ergeben, wie vorher, im entsprechenden Falle:

$$\operatorname{tg}\varepsilon(2y^2-cy+a^2) = a(y-c)$$

woraus durch Elimination von y mittelst der ersten Relation:

$$c = \frac{a\sqrt{2}(1-\sqrt{2}\operatorname{tg}\varepsilon)}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\varepsilon},$$

somit:

$$y = \frac{a\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\varepsilon}.$$

folglich nach der dritten Relation:

$$k = 4a^2\operatorname{tg}\varepsilon\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}\operatorname{tg}\varepsilon+2\operatorname{tg}^2\varepsilon}}{(1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\varepsilon)^2}$$

oder für kleine ε:

$$k = 4a^2\sqrt{3}\operatorname{tg}\varepsilon$$

$$c = a\sqrt{2}$$

Die obigen Resultate wurden für den Fall abgeleitet, dass m im Innern der Erde liegt und anziehend wirkt. In den Fällen, wo er oberhalb der Erdoberfläche sich befindet, oder wo er statt anzuziehen, repulsiv wirkt, modificiren sie sich natürlich. Da diese Fälle sich jedoch ohne Schwierigkeit aus dem Vorherigen ergeben, so soll davon Abstand genommen werden.

Wenn man statt zweier Beobachtungen deren eine ganze Reihe hat, so kann man nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung die wahrscheinlichsten Werte von k, c dadurch berechnen, dass man die beobachteten Coordinatenwerte in die Gleichung der Fläche einsetzt, und so eine Reihe von Relationen zu ihrer Bestimmung erhält.

Hat man speciell eine vom Punkte Q aus in einer Meridiancurve beobachtete stetige Folge von gleichen Abständen Δx und die zugehörigen Ablenkungswinkel, so kann man nach dem Taylor'schen Satze daraus diejenige Curve bestimmen, welche diese Werte am genausten darstellt. Man hat somit als Gleichung derselben:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x + \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots$$

wo:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta y}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon' - \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\Delta^2 y}{\Delta x}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon'' - 2\operatorname{tg}\varepsilon' + \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\Delta^3 y}{\Delta x}$$

so dass die Coefficienten der vorstehenden Reihe bekannt sind.

Bildet man andrerseits die entsprechende Reihe aus der auf Q bezogenen Gleichung der Curve:

$$(d-y)^2 (x^2 + (y_1 - y)^2) = y_1^2 d^2$$

so erhält man:

$$y = \frac{d}{y_1(y_1+d)} \cdot \frac{x^2}{2!} - \frac{d(3y_1^2 - d^2)}{4y_1^3(y_1+d)} \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Bleibt man beim zweiten Gliede stehen, so ergibt der Vergleich mit der vorherigen Reihe die zur Bestimmung der Constanten y_1, d erforderlichen Relationen. Bezeichnet man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha; \qquad \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \beta$$

so ergibt sich:

$$\alpha = \frac{d}{y_1(y_1 + d)}$$

$$\beta = \frac{d(3y_1^2 - d^2)}{4y_1^3(y_1 + d)^3}$$

woraus hervorgeht, dass α, β kleine Grössen im Vergleich zu y_1, d sind. Setzt man den aus der ersten Relation folgenden Wert von d in die zweite, so erhält man:

$$4\beta y_1^2 = \alpha(1 - \alpha y_1)^2 (3(1 - \alpha y_1)^2 - \alpha^2 y_1^2$$

oder, wenn man setzt:

$$\frac{y_1}{1 - \alpha y_1} = z$$

$$3\alpha = z^2(\alpha^3 + \beta^3(1 + az)^2)$$

Vernachlässigt man rechts αz gegen die Einheit, was zulässig, da α klein, so folgt:

$$z = \sqrt{\frac{3\alpha}{\alpha^3 + 4\beta}}$$

folglich:

$$y_1 = \frac{\sqrt{\frac{3\alpha}{\alpha^3 + 4\beta}}}{1 + \alpha\sqrt{\frac{3\alpha}{\alpha^3 + 4\beta}}} = \sqrt{\frac{3\alpha}{\alpha^3 + 4\beta}}$$

somit nach der ersten Relation:

$$d = \frac{\frac{3\alpha^2}{\alpha^3 + 4\beta}}{1 - \alpha\sqrt{\frac{3\alpha}{\alpha^3 + 4\beta}}} = \frac{3\alpha^2}{\alpha^3 + 4\beta}$$

woraus:

$$k = \alpha\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{\alpha^3 + 4\beta}\right)^3}$$

Wäre k, d statt aus zwei, aus einer ganzen Reihe von Relationen gebildet, welche sich durch die Hinzunahme der Glieder höherer Ordnung in den beiden Reihen für y ergeben, so würden, nachdem die so erhaltenen wahrscheinlichsten Werte k_0, d_0 in die zweite jener Reihen substituirt und zugleich für x, y die beobachteten Wertpaare eingeführt worden, die so erhaltenen Relationen Identitäten ergeben; oder, die Reihe auf Null gebracht, müsste identisch verschwinden. Die Abweichungen davon dienen daher als Massstab der Beurteilung ob die gemachte Annahme, die Beobachtungen durch einen Massen-

punkt zu erklären, zulässig oder nicht. — Im Vorhergehenden wurde vorausgesetzt, dass die Beobachtungen im Meridian gemacht seien, worin das Centrum gelegen. Entgegengesetzten Falls modificiren sich, dem Frühern gemäss, die Resultate nur unwesentlich und kann daher von diesen Fällen hier Abstand genommen werden.

§ 2.

Die im vorigen § unter Voraussetzung eines unendlich grossen Abstandes beider Centra abgeleiteten Resultate genügen für die in Rede stehenden Probleme vollkommen. In andern praktischen Fällen, wo es sich nicht um den Einfluss der Localattraction, sondern der allgemeinen, d. h. durch die ungleiche Verteilung von Land und Wasser auf der Erdoberfläche erzeugten Attraction handelt, oder auch bei der Ermittelung der durch die Anziehung des Mondes erzeugten Veränderung der Niveaufläche des Meeres — wenn von der Bewegung abgesehen wird — kann der Abstand a nicht als unendlich vorausgesetzt werden. Alsdann bestände der nächste Grad von Annäherung darin, die Erde als kugelförmig zu betrachten, welche Annahme im Folgenden zu Grunde gelegt werden soll.

Im Wesentlichen zeigt sich der Charakter der auf diese Art entstehenden Flächen mit dem der vorherigen übereinstimmend, und nur in sofern verschieden, als jetzt keine ∞ fernen Elemente mehr vorkommen. Es entstehen daher in diesem Falle zwei wesentlich verschiedene Gruppen, jenachdem die Fläche beide Centra, oder nur eins umgibt. Auch hier genügt es, da die Flächen Rotationsflächen sind, die Meridian-Curven zu untersuchen.

Man betrachte zuerst den Fall der Anziehung, wo beide Punkte im Abstand $2a$ von einander liegen, und wo die Fläche beide umgibt, oder, um auf das Frühere zurück zukommen, sei M die Masse der Erde im Mittelpunkt, m die eines ablenkenden Centrums im Innern der Erde. Bezeichnet man

$$\frac{m}{M} = k$$

so kann die Gleichung der Niveaufläche in der Form geschrieben werden:

$$1) \qquad \frac{1}{\varrho} + \frac{k}{r} = \frac{1}{R}$$

wo ϱ, r die bezüglichen Abstände eines beliebigen Punkts der Fläche von M resp. m, R eine beliebige Constante bezeichnet. Legt man

den Coordinatenursprung in M, und bezeichnet φ den Winkel des Radiusvectors ϱ mit der positiven x-Axe Mm, so hat man als Gleichung der Curve:

$$2)\qquad \frac{1}{\varrho}+\frac{k}{\sqrt{4a^2+\varrho^2-4a\varrho\cos\varphi}}=\frac{1}{R}$$

wo das positive Wurzelzeichen zu nehmen. Denn da die Fläche beide Centra umgibt, so werden an den Stellen, wo $x=2a\cos\varphi$ grösser als $2a$ ist, die x-Componenten beider Punkte mit gleichen, da wo $x<2a$, mit entgegengesetzten Vorzeichen erhalten, wie es sein muss.

Um den Zusammenhang der Constanten a, R, k mit den die Fläche bestimmenden geometrischen Grössen zu erkennen, führe man, wie vorher, die Axenabschnitte r_2, r_3 der Abscissenaxe ein, so erhält man aus 2), wenn φ resp. $=0^0$ und 180^0 gesetzt wird:

$$3)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{r_2}+\frac{k}{r_2-2a}&=\frac{1}{R}\\ \frac{1}{r_3}+\frac{k}{r_3+2a}&=\frac{1}{R}\end{aligned}$$

Man könnte auch noch den Abschnitt r_1 der y-Axe für $\varphi=90^0$ bestimmen, was jedoch hier ohne Bedeutung. — Die Grösse R ist, wie man aus 1) ersieht, der Radius der Kugel, in welche die Fläche übergeht, wenn $m=0$ wird.

Die Relationen 3) genügen, die Axenabschnitte r_2, r_3 eindeutig für ein bestimmtes Problem durch die Constanten a, R, k zu bestimmen. Um auch das Umgekehrte zu erkennen, dass letztere sich eindeutig durch die die Curve bestimmenden geometrischen Grössen ausdrücken, verlege man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte von Mm. Man erhält alsdann, wenn r'_2, r'_3 die resp. Axenabschnitte, von der Mitte aus, und r_0' den Abschnitt der Ordinate im Mittelpunkt bezeichnet, aus 1) die Relationen:

$$4)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{r'_2+a}+\frac{k}{r'_2-a}&=\frac{1}{R}\\ \frac{1}{r'_3-a}+\frac{k}{r'_3+a}&=\frac{1}{R}\\ r'^2_0+a^2&=R^2(1+k)^2\end{aligned}$$

Eliminirt man darin R und bezeichnet

$$\frac{1-k}{1+k}=\lambda$$

so erhält man:

$$(r'_2-\lambda a)^2(r'^2_0+a^2)=(r'^2_2-a^2)^2$$
$$(r'_2-\lambda a)(r'^2_3-a^2)=(r'_3+\lambda a)(r'^2_2-a^2)$$

Aus der zweiten dieser Relationen folgt:

$$1)\qquad \lambda=\frac{(r'_3-r'_2)(r'_2r'_3+a^2)}{a(r'^2_2+r'^2_3-2a^2)}$$

Setzt man diesen Wert in die erste, so ergibt sich:

$$a^4-\frac{a^2(4(r'^2_2+r'^2_3)+(r'_2+r'_3)^2)}{4}=\frac{(r'^2+r'_3)^2r'^2_0-(r'^2_2+r'^2_3)^2}{4}$$

woraus:

$$2)\quad a^2=\frac{r'^2_2+r'^2_3}{2}$$
$$+\frac{r'_2+r'_3}{8}\left[r'_2+r'_3-\sqrt{(r'_2+r'_3)^2+8(r'^2_2+r'^2_3)+16r'^2_0}\right]$$

wo das negative Wurzelzeichen der Bestimmung gemäss genommen ist, dass für $r'_2=r'_3=r'_0$, $a=0$ werden soll. Hat man somit a^2 bestimmt, so ergibt sich λ aus 1), sodann R aus:

$$3)\qquad R=\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\frac{(r'^2_2+r'^2_3-2a^2)}{r'_2+r'_3}$$

welcher Wert eindeutig, da λ positiv genommen werden muss.

Für $k=1$, $\lambda=0$ ergibt sich speciell; da jetzt $r_2=r_3$:

$$a^2=\frac{r_2(3r_2-\sqrt{4r_0^2+5r_2^2}}{2}$$

$$R=\frac{r_2+\sqrt{4r_0^2+5r_3^2}}{2}$$

Auf ganz analoge Art würde man die Constanten a, R, k, die hier unter der Voraussetzung zweier, innerhalb der Fläche gelegener Anziehungs-Centra bestimmt worden, für jeden andern Fall berechnen können.

Die Gleichung 1) ist, wie man leicht übersicht, nach Beseitigung der Wurzelgrössen vom 8ten Grade nach x und y. Transformirt man dieselbe auf Polar-Coordinaten, so erhält sie die Form:

$$(\varrho^2+4a^2-4a\varrho\cos\varphi)(\varrho-R)^2-k^2R^2\varrho^2=0$$

Diese, als algebraische Gleichung 4ten Grades nach ϱ aufgefasst, ergibt für jeden Wert von φ mindestens einen realen Wert von ϱ der

im Intervalle $r_2 \ldots r_3$ liegt. Denn für einen beliebigen Wert φ_0 ergibt sich, wenn die linke Seite der vorstehenden Gleichung für diesen Fall mit A bezeichnet wird, unter Berücksichtigung der Relationen 3) nach Reduction:

$$1) \quad \text{für } \varrho = r_2 \quad A = 8ar_2(r_2 - R)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} > 0$$

$$2) \quad ,, \quad \varrho = r_3 \quad A = -8ar_3(r_3 - R)^2 \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} < 0$$

Geht man daher wieder von einem bestimmten Werte von φ, z. B. $\varphi = 0$ aus, welchem der Wert $r = r_2$ entspricht, so erhält man durch successiv wachsende Werte von φ eine stetige Folge successive abnehmender Werte von r, die in ihrem Zusammenhange den Curventeil zunächst in der Umgebung des Ausgangspunktes construiren, soweit auf dieser Strecke keine Unstetigkeiten liegen.

Zum Zwecke der Construction müssen wiederum die Axenabschnitte aus den Relationen 3) eindeutig bestimmt werden, wie es den Bedingungen des Problems entspricht.

Für den vorgelegten Fall muss man demnach haben:

$$r_2 = \frac{2a + R(1+k)}{2} + \sqrt{\frac{(2a + R(1+k))^2 - 8aRk}{4}}$$

$$r_3 = -\frac{(2a - R(1+k))}{2} + \sqrt{\frac{(2a - R(1+k))^2 + 8aRk}{4}}$$

wobei, für $k = 0$, $r_1 = r_2 = r_3 = r$ resultirt.

Für $k = 1$ folgt, im Falle beide Punkte umhüllt werden:

$$r_2 = a + R + \sqrt{a^2 + R^2}$$
$$r_3 = -a + R + \sqrt{a^2 + R^2}$$

während der Wert r_0 zufolge des Vorherigen ist:

$$r_2 = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

welcher zeigt, dass die Fläche nur solange Punkte umgibt, wie

$$4R^2 > a^2$$

ist, während zugleich die Bedeutung von R für diesen Fall als halbe Hypotenuse des von den Katheten a, r_0 gebildeten rechtwinkligen Dreiecks hervorgeht.

In der Praxis wird man gewöhnlich nicht die Grösse R als gegeben ansehen, sondern es wird ausser a, k noch ein willkürlicher Punkt gegeben sein, durch den die Fläche gelegt werden soll. Aus den Coordinaten desselben bestimmt man alsdann zuerst die Radienvectoren r, ϱ, und aus diesen zufolge 1) die Grösse R.

Nachdem die Axenabschnitte ermittelt, kann die Curve in derart dargestellt werden, dass man unter Zugrundelegung der aus 1) folgenden Relation:

$$r = \frac{k \,.\, R\varrho}{\varrho - R}$$

von einem Axenschnitte, $\varrho = r_3$ beginnend, für ϱ successive wachsende Werte setzt, und die entsprechenden r als 4te Proportionalen aus vorstehender Relation bildet, wodurch sich je 1 Curvenpunkt bestimmt. Je nachdem man r durch ϱ, oder ϱ durch r ausdrückt, erkennt man, dass mit wachsenden ϱ die r abnehmen, und umgekehrt, während andrerseits beide stets grösser als R resp. Rk bleiben, weil unendlich ferne Elemente ausgeschlossen. Daraus folgt, dass innerhalb der Strecke $r_2 \dots r_3$ die Summe beider Radienvectoren irgendwo ein Minimum erreichen muss. Liegt, von dem Punkte gerechnet, wo die Construction beginnt, bis zu dieser Stelle keine Unstetigkeit, so kann dieser Teil der Curve ohne Unterbrechung dargestellt werden. Für $k = 1$ kann also, da, wie das Folgende zeigt, jenes Minimum in der Mitte liegt, unter dieser Voraussetzung die Curve in einem Zuge verzeichnet werden. Jene Unstetigkeitsstellen sind daher zunächst zu untersuchen. Dabei hat die Stelle, wo $r + \varrho =$ Min. in sofern eine gewisse Bedeutung, als sie jene Stellen trennt, und somit dazu dient, in jedem speciellen Falle Aufschluss über die Gestalt der Curve zu geben.

Untersucht man zunächst die Stellen, wo die Ordinate ein Maximum resp. Minimum erreicht, so finden sich dieselben durch Differentiiren von 2) nach x, wenn man diese Grösse statt $\varrho \cos\varphi$ einführt, durch die Relation ausgedrückt:

$$5) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{r^3 x + k\varrho^3 (x - 2a)}{y(r^3 + k\varrho^3)} = 0$$

woraus:

$$6) \qquad r^3 x + k\varrho^3 (x - 2a) = 0$$

Eliminirt man hier x mittelst der Relation:

$$x = \frac{4a^2 + \varrho^2 - r^2}{4a}$$

sodann r mittelst 1), so erhält man:

$$\{(\varrho^2+4a^2)[k^2R^3+(\varrho-R)^3]-8a^2(\varrho-R)^3\}(\varrho-R)^2$$
$$-k^2R^2\varrho^2[k^2R^3-(\varrho-R)^3]=0$$

Diese, als algebraische Gleichung nach ϱ betrachtet, zeigt, dass innerhalb des Intervalles $r_2 \ldots r_3$ entweder ein Maximum oder zwei Maxima und ein Minimum der Ordinate liegen müssen. Denn es ergibt sich, wenn die linke Seite dieser Gleichung mit A bezeichnet wird:

1) für $\varrho = r_2 \quad A = 4akRr_2[(r_2-R)^2+k^2R^2] > 0$
2) „ $\varrho = r_3 \quad A = -4akRr_3[(r_3-R)^2+k^2R^2] < 0$

wie sich unter Zuziehung der Relationen leicht findet.

Es liegt folglich eine ungerade Anzahl Wurzeln im fraglichen Intervalle. Da indessen die Fläche nur 8ten Grades ist, so können auf jeder Seite nicht mehr als 3 Stellen existiren.

Um diese im letzteren Falle zu trennen, bestimme man die Stelle, wo $r+\varrho =$ Min. wird.

Man erhält durch Differentiiren dieses Summenausdrucks

$$r+\varrho=\varrho+\frac{kR\varrho}{\varrho-R}=\text{Min.}$$

die Relation:

$$1+\frac{kR}{\varrho-R}-\frac{kR\varrho}{(\varrho-R)^2}=0$$

woraus:

$$\varrho=R(1+\sqrt{k})$$
$$r=R\sqrt{k}(1+\sqrt{k})$$

folglich:

$$r+\varrho=R(1+\sqrt{k})^2$$

Dass dieser Wert wirklich ein Minimum, ergibt die nochmalige Differentiirung des vorherigen Ausdrucks, welche liefert:

$$-\frac{2kR}{(\varrho-R)^2}+\frac{2kR\varrho}{(\varrho-R)^3}=\frac{2kR^2}{(\varrho-R)^3}>0$$

Setzt man speciell $k=1$, so ergibt sich $\varrho = r = 2R$ übereinstimmend mit dem Vorherigen. Die fragliche Stelle liegt also in diesem Falle in der Mittelpunkts-Ordinate.

Führt man den vorstehenden Wert von ϱ in 6) ein, so ergibt sich nach Reduction:

$$A=(R\sqrt{k})^5(1-\sqrt{k})(R^2(1+\sqrt{k})^4-4a^2)$$

Dieser Wert ist positiv, denn da der Minuendus in der letzten Klam-

mer den Minimalwert von $r+\varrho$ bezeichnet, und andererseits die Fläche beide Punkte umhüllen soll, so muss

$$7)\qquad R(1+\sqrt{k})^2 \geqq 2a$$

sein. Da folglich $A>0$, so liegt zwischen der Stelle $r+\varrho=$ Min. bis $\varrho=r_3$ stets ein reales Maximum von y; dagegen im andern Intervalle von jener Stelle bis r_2 entweder ein Maximum und ein Minimum oder keines von beiden. Die Bedingungen, wenn das erstere oder letztere eintritt, ergeben sich durch Untersuchung der Stellen, wo die Curve den Sinn ihrer Krümmung ändert. Aus der Bedingung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

folgt durch Differentiiren des Ausdrucks 5) unter Berücksichtigung des Wertes von x:

$$8)\quad 4(r^3+k\varrho^3)(r^3+k\varrho^3-4a^2kR)-3kr\varrho(16a^2\varrho^2-(4a^2+\varrho^2-r^2)^2)=0$$

Eliminirt man mittelst 1) die Grösse r, so folgt:

$$4\varrho(k^2R^3+(\varrho-R)^3)(k^2R^3\varrho^3+(\varrho-R)^3\varrho^3-4a^2R(\varrho-R)^3)$$
$$-3R(\varrho-R)\{16a^2\varrho^2(\varrho-R)^4-[4a^2(\varrho-R)^2+\varrho^2((\varrho-R)^2-k^2R^2)]^2\}=0$$

Bezeichnet man wieder die linke Seite dieser Gleichung nach ϱ mit A, und substituirt für ϱ die Grenzwerte r_2, r_3, so ergibt sich:

1) für $\varrho=r_2\quad A=4r_2(r_2-R)^2(k^2R^3+(r_2-R)^3)(r_2{}^4-4ar_2{}^2+4a^2R^2)>0$

2) ,, $\varrho=r_3\quad A=4r_3(r_3-R)^2(k^2R^3+(r_3-R)^3)(r_3{}^3+4ar_3{}^2+4a^2R^2)>0$

Daraus geht in Verbindung mit dem vorher über die Maxima der Ordinate gefundenem Resultate hervor, dass entweder zwei oder keine realen Wendepunkte existiren. Um sie im ersten Falle zu trennen, führe man wieder die Stellen $r+\varrho=$ Min. ein. Für den bezüglichen Wert von ϱ ergibt sich alsdann nach gehöriger Reduction:

$$A=R^6k^2\sqrt{k}(R^2(1+\sqrt{k})^4-4a^2)((3-2\sqrt{k}+3k)(1+\sqrt{k})^2R^2-12a^2)$$

Der erste Klammerausdruck rechts ist positiv, wie vorher gezeigt. Die zweite drückt somit, je nachdem er positiv oder negativ ist, die Bedingung aus, unter der die Wendepunkte real oder imaginär sind. Denn da dieselben sich auf verschiedenen Seiten der fraglichen Stelle befinden müssen, so können sie nur unter der Bedingung:

$$9)\qquad R^2(1+\sqrt{k})^2(3-2\sqrt{k}+3k)\leqq 12a^2$$

vorhanden sein, entgegengesetzten Falls nicht.

Für $k = 1$ ergibt sich speciell:

$$4R^2 \lesseqgtr 3a^2$$

Währeed also in den zuerst, § 1. untersuchten Fällen, wo beide Punkte von der Fläche umhüllt werden, stets reale Wendepunkte existiren, sind sie hier nur unter besonderen Bedingungen vorhanden.

Ihr Vorhandensein bedingt allein noch nicht die Existenz zweier Ordinaten-Maxima. Um für letztere die Bedingung der Realität zu erkennen, hat man den Fall zu untersuchen, wo gleichzeitig:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

weil die, dieser Bedingung entsprechenden Curven offenbar den Uebergang von einem zu zwei Maxima bilden.

Führt man in 6) und 7), nachdem in 6) vorher x durch r und ϱ ausgedrückt, die Grösse z ein durch die Relation:

$$\frac{\varrho}{r} = z$$

wonach aus 1) folgt:

$$r = \frac{R(1+kz)}{z}$$

$$\varrho = R(1+kz)$$

so gehen daraus, nachdem die zunächst erhaltenen Gleichungen in geeigneter Art reducirt worden, die folgenden hervor:

$$\text{10)} \qquad \begin{aligned} (1+kz)(1+kz^3)^3 &= 3mkz^5 \\ (1+kz^3)(1+kz^3)^2 &= 3kz^3(1+kz)(1-z^2) \end{aligned}$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$m = \frac{4a^2}{R^2}$$

Man erkennt hieraus, dass die fragliche Bedingung, ebenso wie dies auch schon hinsichtlich der durch die Relationen 7) und 9) ausgedrückten Bedingungen der Fall war, von der Grösse von a und R ganz unabhängig, dass vielmehr nur ihr Verhältniss, ebenso wie hinsichtlich der Massen in Betracht kommt.

Durch weitere Combination reduciren sich die zwei Gleichungen 9) auf 2 solche 7 ten Grades:

$$5k^3z^7+8k^2z^6-3k(m+k^2-1)z^5-2k^2z^4+kz^3+2kz+2=0$$
$$2k^2z^7-5k^3z^6-3k^2z^5+kz^4(3m+3k^2+1)-z^3(3m+k^2+3)+3kz+5z-2k=0$$

$$0=\begin{vmatrix} k^4(16+25k^2), & -k(2m-3k^2-2), & -3k(5m+5k^2+3), \\ & 0 & -3(m+k^2-1), \\ & & 3[3m(m+2k^2+2)+4k^2+7], \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

wo der Kürze wegen nur die Hälfte des Quadrats ausgefüllt, da die andere sich symmetrisch ergänzt. Diese Determinante, als algebraische Gleichung nach m aufgefasst, ist wie man sich leicht überzeugen kann, vom 9 ten Grade, hat also stets eine reale Wurzel. Denkt man sich diesen Wert von m als Function von k dargestellt, so liegt er der Grösse nach offenbar zwischen den aus 7) und 9) sich ergebenden Werten derselben Grösse, so dass für solche Werte von m zwischen dem aus 9) folgenden bis zu dem hier sich ergebenden nur ein reales Maximum, für solche zwischen letzterem und dem aus 7) hervorgehenden zwei solche liegen.

Eine Vereinfachung des Falles tritt für $k=1$ ein, weil alsdann offenbar $z=1$ sein muss. In der Tat tritt für diesen Fall der Factor $z-1$ aus der zweiten Gleichung 10) heraus. Dieser Wert von z, in die erste gesetzt, führt alsdann zu der Bedingung:

$$4R^2-3a^2=0$$

welches dem Vorherigen gemäss dem Uebergange der Wendepunkte vom Imaginären zum Realen entspricht.

Es handelt sich nunmehr noch um den Uebergang der Curven, die beide, zu denen, die nur ein Centrum umgeben.

Untersucht man zu diesem Zwecke, wie im § 1. die Bedingungen, wo die Gleichung 1) einen singulären resp. einen mehrfachen Punkt besitzt, indem wie dort $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ gesetzt wird, so folgt aus 5):

$$1]\qquad r^3x+k\varrho^3(x-2a)=0$$
$$y=0$$

Die Bedingung, dass beide für denselben Wert von z erfüllt sein müssen, ergibt sich durch das Verschwinden der Resultante, welche sich in der Bézout'schen Form als symmetrische Determinante nach Fortlassung gemeinsamer Factoren darstellt:

$$\begin{array}{rrrr|}
k^3(15m+5k^2+17), & -15k^4, & -7k^3, & 5k^2+2 \\
4(2m-k^2+2) & -15k, & -4, & k \\
-3[(3m+k^2)(m+k^2)-5k^2-3], & k(9m-k^2-49), & 5(m+k^2-1), & -3k(m+k^2) \\
2k^2(3m+5k^2-7), & 15k(m+k^2-1), & 4k^2, & k(3m+k^2+1) \\
 & 3k^2(2m+2k^2+3), & 3k, & -3(m+1) \\
 & & -2(m-k^2+1), & k \\
 & & & 2k^2+5
\end{array}$$

Führt man die entsprechenden Werte $\varrho = x$, $r = 2a - x$ in 1] ein, so ergibt sich

$$x = \frac{2a}{1+\sqrt{k}}$$

Damit die entsprechenden Werte von ϱ, r der Curve genügen, folgt durch Einsetzen in 1) die Bedingung:

$$R(1+\sqrt{k})^2 = 2a$$

welches nach dem Vorherigen dem Grenzfalle entspricht, wo die Curve noch beide Punkte umgibt. Der fragliche Punkt ist somit kein singulärer, sondern ein Curvenpunkt, der dadurch entsteht, dass die beiden Wendepunkte zusammenfallen. Denn wegen der Symmetrie kann dies zunächst nur in der x-Axe geschehen. In der Tat ergibt sich, wenn man in 8) den Wert $y = 0$ einführt, daraus wiederum 1]. Der Punkt ist somit ein mehrfacher, dessen beide Tangenten sich unter einem Winkel schneiden, den man durch das im § 1. angegebene Verfahren erhält. Aus der auf rationale Form gebrachten Gleichung 1):

$$F(xy) = [\varrho^2(r^2 - k^2R^2) + r^2R^2]^2 - 4r^4\varrho^2R^2$$

wo der Kürze wegen $\varrho^2 + r^2$ beibehalten, statt ihrer Werte in x, y ergibt sich durch Bildung der ersten und zweiten Ableitungen von $F(xy)$ zufolge der im § 1. gegebenen Formel:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 8R^4a^2k^2 - 16R^4a^2k^2 = 0$$

woraus:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

identisch mit dem im § 1. gefundenen Resultate, wo die x- und y-Axe umgekehrt bezeichnet waren.

Hieraus folgt somit allgemein, dass die Lage des Doppelpunkts zwar von k, a abhängt, die Richtungen der Tangenten jedoch unabhängig davon, stets einen Winkel von $129^0\,48'\,38''$ mit einander bilden.

Dasselbe erkennt man übrigens auch durch Reihenentwickelung der in 1) enthaltenen Wurzelgrössen. Verlegt man den Coordinatenursprung an die Stelle der Abscissenaxe, welche dem Doppelpunkte entspricht, und entwickelt für diejenigen Flächenteile, wofür die Abstände dieses Punkts von M resp. m, nämlich:

$$\alpha = \frac{2a}{1+\sqrt{k}}$$

$$2a-\alpha = \frac{2a\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}$$

grösser sind, als die von ihm aus gezählten Radienvectoren, nach absteigenden Potenzen jener Grössen, so wird der Factor von $\cos\varphi$ Null, so dass sich, wenn man beim zweiten Gliede stehen bleibt, nach einiger Reduction die Relation ergibt:

$$\frac{2a-R(1+\sqrt{k})^2}{R}+\frac{\varrho^2(1+\sqrt{k})^4(1-3\cos^2\varphi)}{8a^2\sqrt{k}}=0$$

Setzt man x, y statt der Polar-Coordinaten, so ergibt sich:

$$y^2-2x^2=\frac{(R(1+\sqrt{k})^2-2a)\,8a^2\sqrt{k}}{R(1+\sqrt{k})^4}$$

d. i. eine Hyperbel, welche event. in zwei sich unter einem Winkel

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

schneidende gerade Linien degenerirt, wenn

$$R(1+\sqrt{k})^2-2a=0$$

und die die y- resp. x-Axe zur Hauptaxe hat, jenachdem die linke Seite dieses Ausdrucks positiv oder negativ ist.

Es existiren daher nur im ersteren Falle, oder wo die Fläche beide Punkte umgibt, reale Wendepunkte, im Falle nur 1 Punkt umhüllt wird, keine solchen. Die letzteren Curven können somit auch nur ein Ordinaten-Maximum enthalten, wodurch sich ihre Construction vereinfacht.

Das Gesetz des Ueberganges der hier untersuchten Curven gilt also, mit Ausnahme der, auf die Wendepunkte bezüglichen Resultate auch für die früheren Fälle.

Man kann übrigens die Stellen, wo Singularitäten stattfinden, sobald man ihre Existenz nachgewiesen, durch die Taylor'sche Reihe näherungsweise bestimmen. Denn da k stets $\overline{\overline{<}} 1$, während andererseits entweder z, oder sein reciproker Wert als echter Bruch betrachtet werden kann, so lässt sich innerhalb dieser Grenzen die eine Grösse als stetige Function der andern ansehen, deren Beziehung durch die, den singulären Stellen entsprechende Gleichung ausgedrückt wird. Man kann daher (cf. Weierstrass, Theorie der Functionen) die eine als Potenzreihe der andern nach dem Taylor'schen Satze entwickeln.

Um zuerst dasjenige Maximum der Ordinate zu bestimmen, welches real ist, so hat man dafür offenbar $z < 1$.

Führt man diese Grösse z in 6) ein, so ergibt sich:

$$11) \qquad 4a^2z^2(1-kz^3) = R^2(1+kz)^2(1+kz^3)(1-z^2)$$

woraus die Reihe hervorgeht:

$$1) \quad z = \frac{R}{\sqrt{4a^2+R^2}}\left(1 - \frac{R^5}{(4a^2+R^2)^{\frac{5}{2}}} . k \ldots\right)$$

Um auch das Minimum von y zu erhalten, wenn ein solches existirt, so sieht man leicht, dass jetzt $z > 1$, also statt dessen $\frac{1}{z} = z'$ zu setzen. Da ferner dieser Fall nicht den, wo $k = 0$, sondern den, wo $k = 1$, zur Grenze hat, so hat man statt nach k nach $1 - k = k'$ zu entwickeln, wobei für $k' = 0$ $z = 1$ zu nehmen. Aus der so transformirten Gleichung 11):

$$11a) \quad 4a^2z'^2(z'^3 - 1 + k') = R^2(z'^2 + 1 - k')^2(z'^2 - 1)(z'^3 + 1 - k')^2$$

ergibt sich demnach die Reihe:

$$2) \quad z' = 1 - \frac{a^2}{3a^2 - 4R^2}k' \ldots$$

wo der Nenner des zweiten Gliedes positiv, als Bedingung, dass Wendepunkte vorhanden.

Für das zweite Maximum von y würde man ebenfalls aus 11a) eine Reihenentwickelung herleiten, sobald man den, dem Werte $k' = 0$ entsprechenden von z' kennt, der sich nach Absonderung des Factors $z' - 1$ aus der Relation

$$4a^2z'^2(1+z'+z'^2) = R^2(1+z')^3(1+z'^3)^2$$

ergibt. Vernachlässigt man, um eine erste Annäherung zu erhalten, z' und die höheren Potenzen gegen die Einheit, so erhält man:

$$z' = \frac{R}{2a}$$

welchem Werte zufolge 11a) mit demselben Grade der Approximation die Reihe entspricht:

$$3) \quad z' = \frac{R}{2a}(1-\tfrac{3}{2}k' \ldots)$$

Um auch die Stellen der Wendepunkte näherungsweise zu bestimmen, so hätte man analog in 8) $1-k'$ statt k zu setzen, während z zunächst < 1 vorausgesetzt werden kann, da das Minimum von $r+\varrho$ beide Stellen trennt. Dabei müsste wiederum der Wert von z für $k=1$ bekannt sein, der sich für diesen Fall aus 8) näherungsweise berechnen lässt. Statt dessen kann man, um eine erste Näherung zu erhalten, auch folgendermassen verfahren:

Vernachlässigt man in 8) zunächst die Potenzen von z in den Klammern gegen die Einheit, so erhält man die Gleichung:

$$12) \qquad 4R^2(R^2-4a^2kz^3)+3zk(4a^2z^2-R^2) = 0$$

Indem man diese zuerst statt 8) der Berechnung von z zu Grunde legt, kann man man nach den, in der Astronomie gebräuchlichen Methoden leicht einen ersten Näherungswert von z finden, indem man sich die lineare Potenz von z zuerst durch die höheren ausdrückt, für diese einen schon bekannten Näherungswert einsetzt, und mittelst des hierdurch erhaltenen Wertes von z dasselbe Verfahren beliebig oft wiederholt. Man erhält demgemäss aus (12) unter Einführung von $1-k=k'$ und mit Beibehaltung der ersten Potenz von k':

$$z = \frac{4R^2(a^2z^3-R^2)}{3(4a^2z^2-R^2)^2}\left(1+\frac{R^2}{R^2-4a^2z^3}k' \ldots\right)$$

Setzt man für die Potenzen von z rechts den Näherungswert $z=1$, so folgt:

$$z = \frac{4R^2}{3(4a^2-R^2)}\left(1-\frac{R^2}{4a^2-R^2}k' \ldots\right)$$

Ebenso würde man für den zweiten Wendepunkt den Näherungswert aus 12) durch Einsetzen von $z' = \frac{1}{z}$ erhalten, wonach:

$$z' = \frac{4R^2}{3(4a^2-R^2)}\left(1+\frac{R^2}{4a^2-R^2}k' \ldots\right)$$

In dem Vorherigen wurde der Fall vorausgesetzt, dass m anziehend wirkt, oder dass seine Dichtigkeit grösser als die mittlere Dichtigkeit der Hauptmasse sei. Ist sie geringer als letztere, also k negativ, so übersieht man leicht, dass alsdann nur die zuerst besprochenen Singularitäten, dagegen keine Wendepunkte existiren, da die bezüglichen Ausdrücke imaginär werden, während die Stellen, wo $r + \varrho =$ Min., jetzt in die Abscissenaxe fallen. Ebenso ist ein Uebergang von den beide Centra umgebenden zu den nur ein solches umhüllenden unmöglich.

Von praktischen Fällen dieser Art kommt übrigens nur der eine in Betracht, wo das abstossende Centrum im Innern der Hauptmasse liegt. Die Curven sind den früheren insofern entgegengesetzt, als jetzt das Minimum der Krümmung in der Abscissenaxe dem Punkte m zunächst liegt, während dort früher das Maximum stattfand, wie sich schon durch mechanische Betrachtung ergibt.

Die Kraftlinien, welche den hier untersuchten Curven entsprechen, sind wie die früheren algebraische Curven. Sie erstrecken sich ins Unendliche, und haben je eine gemeinschaftliche Asymptote zu beiden Seiten der x-Axe. Es zeigt sich dabei, dass die ihnen angehörigen Differentialgleichungen nicht blos für den Fall zweier, sondern für beliebig viele auf gerader Linie liegender Centra integrirbar sind.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen ergibt sich, wenn X, V die Componenten nach x, y sind, die Differentialgleichung:

$$13)\qquad \frac{V}{X} = \frac{dy}{dx} = \frac{y\left(\frac{1}{\varrho^3} + \frac{k}{r^3}\right)}{\frac{x}{\varrho^3} + \frac{k(x-2a)}{r^3}}$$

Dieselbe lässt sich auf die Form bringen:

$$\frac{xdy - ydx}{\varrho^3} + k\left(\frac{(x-2a)\,dy - ydx)}{r^3}\right)$$

Um die Integration auszuführen, kann man allgemein folgendermassen verfahren.

Hat man eine Reihe anziehender Punkte m, m', m'' ... auf derselben geraden Linie, die der Einfachheit wegen wie bisher die Abscissenaxe sei, bezeichnen x, x', x'' ... die Abstände eines beliebigen Punkts der Kraftlinie von resp. m, m', m'' ... auf die Abscissenaxe, und k, k', k'' ... die Verhältnisse $\frac{m'}{m}$, $\frac{m''}{m}$, ... so wird, dem Vorherigen analog, die Differentialgleichung der Kraftlinien die Form haben:

$$\frac{xdy - ydx}{r^3} + \frac{k(x'dy - y\,dx')}{r'^3} + \frac{k'(x''dy - y\,\partial x'')}{r''^3} + \ldots = 0$$

wo r, r', r'' ... die entsprechenden Radienvectoren bezeichnen, also

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$r'^2 = x'^2 + y^2$$
$$r''^2 = x''^2 + y^2$$

Führt man neue Variable ein durch die Relationen:

$$y = xt = x't' = x''t'' \ldots$$

so erhält man durch Bildung der Differentiale und Einsetzen in die vorstehende Differentialgleichung:

$$\frac{x^2dt}{r^3} + \frac{kx'^2dt'}{r'^3} + \frac{k'x''^2dt}{r''^3} + \ldots = 0$$

Durch Elimination von r, r', r'' und x, x', x'' erhält man hieraus:

$$\frac{tdt}{\sqrt{(1+t^2)^3}} + \frac{kt'dt'}{\sqrt{(1+t'^2)^3}} + \frac{k't''dt''}{\sqrt{(1+t''^2)^3}} + \ldots$$

welche Gleichung integrirbar.

Durch Integration ergibt sich für den vorliegenden Fall zweier Centra:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{k}{\sqrt{1+t'^2}} = \text{const.}$$

woraus nach Einsetzen der Coordinatenwerte x, y folgt:

$$\frac{x}{\varrho} + \frac{k(x-2a)}{r} = c \tag{14}$$

Diese repräsentirt eine algebraische Gleichung 8ten Grades, die sich in rationaler Form schreiben lässt:

$$(r^2x^2 + k^2\varrho^2(x-2a)^2 - c^2r^2\varrho^2) = 4k^2r^2\varrho^2x^2(x-2a)^2 \tag{14a}$$

wo der Kürze wegen die Bezeichnungen r^2, ϱ^2 beibehalten sind.

Um die Gestalt der Curve näher zu untersuchen, so hat man:

1) für $x = 0$ $\quad y^4(4a^2k^2 - c^2(4a^2+y^2))^2 = 0$

wo nur der Wert:

$$y = \pm\frac{2a}{c}\sqrt{k^2 - c^2}$$

der Curve entspricht, weil für den andern Wert $y = 0$ sich aus 13) ergeben würde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

d. h. es müssten sich im Anfangspunkte mehrere Aeste kreuzen, was dem Sinne des Problems entspricht. Als Realitätsbedingung folgt aus obigem Werte von y:

$$k^2 > c^2$$

2) für $y = 0$ folgt ferner:

$$x^4(x-2a)^4((1+k^2-c^2)^2-4k^2) = 0$$

woraus hervorgeht, dass die x-Axe ebenfalls zu den Curven gehört, denn unter der Bedingung:

$$(1+k^2-c^2)^2 = 4k^2$$

bleiben die Werte von x willkürlich. Da ferner, wie angegeben, der Wert $x = 0$, und aus demselben Grunde auch $x = 2a$ unzulässig, so folgt, dass die Curve die x-Axe nicht schneiden kann. Andererseits ist klar, dass sie nicht gleichzeitig die y-Axe und die ihr parallelen in m schneiden kann. Daher entspricht der Wert von y für $x = 2a$, nämlich

$$y = \frac{2a\sqrt{1-c^2}}{c}$$

einer andern Curve, als der für $x = 0$. Die letztere erstreckt sich von m aus rechts, die erste von M aus nach links.

Daraus folgt, dass irgendwo zwischen der Strecke $2a$ die Curven einen Grenzwert der Coordinaten erreichen.

Um dies deutlicher zu erkennen, führe man in 14) die Winkel φ, φ' ein, welche r, ϱ mit der positiven x-Axe bilden, wodurch sich jene Gleichung transformirt in:

14a) $$\cos\varphi + k\cos\varphi' = c$$

Diese ist zunächst von den Werten des Radiusvectors ganz unabhängig. Dieser kann somit, wie an sich klar, unendlich gross werden. Zugleich erkennt man die Bedeutung der Constante c, indem man $\varphi' = 90^0$ setzt, woraus, wenn φ_0 der entsprechende Wert von φ ist:

$$c = \cos\varphi_0$$

Die Bedeutung von k ergibt sich aus dem Spätern. Man sieht ferner, dass φ, φ' nur dann beide $= 0$ resp. gleich 0 und 180^0 werden können, wenn: $1 + k = c$ resp. $1 - k = c$, d. i. nach dem Vorherigen der Fall, welchem die x-Axe als Curve entspricht. Im Allgemeinen schneidet daher die Curve die x-Axe nicht. Da andererseits φ nicht

den Wert 90^0 erreichen kann, weil sonst $\cos\varphi' = \frac{c}{k}$, während er negativ sein muss, so sieht man auch hier, dass die Curve einen Grenzpunkt innerhalb der Strecke $2a$ haben muss.

Aus dem Ausdrucke von $\frac{dy}{dx}$ in 13) folgt ferner, dass derselbe nur für gewisse Grenzwerte von x positiv bleibt, darüber hinaus aber negativ wird. Dieser Uebergang vom Positiven zum Negativen kann aber nicht durch Null hindurch erfolgen, weil zufolge 13) für $\frac{dy}{dx} = 0$ auch $y = 0$ sein müsste, was unzulässig; ebenso wie auch der andere Fall, der noch stattfinden könnte:

$$\frac{1}{\varrho^3} + \frac{k}{r^3} = 0$$

wenn k als negativ angenommen wird. Denn dieser Fall führt auf die dem Problem widersprechende Gleichung:

$$k^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} > 1,$$

während k wie $c < 1$ sein müssen. Es bleibt daher nur der Uebergang durch's Unendliche zu untersuchen. Die Stelle, wo dieser stattfindet, wird offenbar die Grenze bezeichnen, bis zu welcher die Curve dem Probleme entspricht. Denn ginge sie darüber hinaus, so könnte nach dem Vorherigen der Fall eintreten, dass ein und derselbe Radiusvector r oder ϱ die Curve in mehr als einem Punkte schnitte, während aus 14a) hervorgeht, dass zu jedem Werte von φ nur 1 solcher von φ' gehört, und umgekehrt. Aus demselben Grunde können ebenfalls keine Wendepunkte existiren, wie schon aus der Natur des Problems folgt.

Jenem Uebergange entspricht die aus 13) folgende Bedingung:

$$15) \qquad \frac{x}{\varrho^3} + \frac{k(x - 2a)}{r^3} = 0$$

welche zugleich mit 14) erfüllt sein muss. Diese Gleichung, welche man sich nach Elimination von x auch in der Form dargestellt denken kann:

$$(r^2 - \varrho^2)(r^3 + k\varrho^3) = 4a^2(r^3 - k\varrho^3)$$

drückt den geometrischen Ort der Endpunkte der in Rede stehenden Curven aus.

Unter Anwendung der früheren Bezeichnung $z = \frac{\varrho}{r}$ erhält man aus 14) und 15), nachdem vorher x eliminirt, die Relation:

$$(1-z^2)^3 = \left(\frac{c}{k}\right)^2 (1-k^2z^6)$$

d. h. eine kubische Gleichung nach z^2, die also stets eine reale Wurzel hat. Bezeichnet man darin:

$$z^2 + \frac{1}{1-c^2} = z'$$

so geht sie über in:

$$z'^3 + 3az' - b = 0$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$a = \frac{c^2}{(1-c^2)^2}$$

$$b = \frac{(1+c^2)(c^2-c'^2-c^2c'^2)}{(1-c^2)^3}$$

wo wiederum $c' = \frac{c}{k}$ genommen.

Nach der Cardani'schen Formel ergibt sich hieraus, wenn man näherungsweise die kleine Grösse c^2 gegen die Einheit vernachlässigt, und für a, b resp. setzt:

$$a = c^2$$

$$b = c^2 - c'^2$$

$$z = \frac{\sqrt{k^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}}{k^{\frac{1}{3}}}$$

woraus folgt, dass z im Unendlichen $= 1$, von da aus stetig wächst bis zum vorstehenden Grenzwerte. Ferner ergibt sich die zugehörige Strecke x zufolge 15) aus

$$x = \frac{2a \cdot kz^3}{1+kz^3} = \frac{2a\sqrt{(k^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}})^3}}{1+\sqrt{(k^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}})^3}}$$

Im speciellen Falle $c = 0$ hat man daraus:

$$x = \frac{2ak}{1+k}$$

woraus man sieht, dass, wenn k hinreichend klein, die Resultante der Anziehung auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt gerichtet ist, da der Nenner alsdann $= 1$ gesetzt werden darf.

Im Falle, wo $k = 1$, reducirt sich die obige kubische Gleichung in z^2 auf eine quadratische:

$$z^4 - \frac{2+c^2}{1-c^2}z^2 + 1 = 0$$

woraus annäherungsweise:

$$z = \sqrt{1 + c\sqrt{3}}$$

Für $c = 0$ folgt daraus $z = 1$, welches besagt, da auch im Unendlichen $z = 1$, dass diesem Falle die im Mittelpunkte der y-Axe parallele Gerade als Curve entspricht, wie schon der vorher gegebene Wert von x für $k = 1$ ergibt. Diese Gerade trennt somit die Curvenschaar links von der rechts.

Da aus dem Vorherigen hervorgeht, dass die Curve sich in's Unendliche erstreckt, so sind noch ihre Asymptoten zu untersuchen.

Bestimmt man nach bekannter Methode die Werte der Axenabschnitte x', y' der Tangente für den Fall, dass man die Coordinaten x, y des Berührungspunkts ∞ setzt, nach den Formeln

$$y' = y - x\frac{dy}{dx}$$

$$x' = x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$$

so folgt durch Einsetzen des Wertes von $\frac{dy}{dx}$ aus 13), da $\lim\left(\frac{r}{\varrho}\right)$ für $x = y = \infty$ der Einheit gleich ist:

$$\lim y'_{(x=y=\infty)} = \lim\left(\frac{-2aky}{(1+k)x}\right)$$

$$\lim x'_{(x=y=\infty)} = -\frac{2ak}{1+k}$$

Aus 14) findet sich aber $\frac{y}{x} = t$ gesetzt, nach Division mit x:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{k\left(1-\frac{2a}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{2a}{x}+z^2}} = c$$

woraus sich für $x = \infty$ der $\lim z$ ergibt:

$$\lim z = \frac{\sqrt{(1+k)^2 - c^2}}{c}$$

Aus diesem Werte ergibt sich die Tangente des Asymptoten-Winkels mit der x-Axe:

$$\operatorname{tg}\psi = \pm\frac{\sqrt{(1+k)^2 - c^2}}{c} = \lim\left(\frac{y'}{x'}\right)_{(x=y=\infty)}$$

Dieselben sind daher real, solange reale Curven existiren, und fallen zusammen für

$$(1+k)^2 = c^2$$

d. h. wenn die Curve in die x-Axe fällt.

Es ergibt sich aus dem Werte von $\operatorname{tg}\psi$ zugleich die Bedeutung von k. Denn es folgt daraus:

$$\cos\psi = \frac{c}{1+k}$$

folglich mit Berücksichtigung des Wertes von c:

$$1+k = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\psi}$$

Die Construction ergibt sich am einfachsten aus 14a).

Nachdem man die Grenzwerte von φ, φ' bestimmt hat, welche sich aus dem Vorherigen angenähert durch die Formeln ergeben

$$\cos\varphi = \sqrt[3]{c(k^2+c^2)}$$

$$\cos(180-\varphi') = \sqrt[3]{\frac{c}{k}}$$

so kann man, von diesen beginnend bis zu den durch die Asymptotenrichtungen gegebenen Grenzwerten von φ, φ' zu jedem Werte von φ' mittelst einer einfachen Construction durch einen um m geschlagenen Kreis vom Radius $=1$ den entsprechenden Wert von $\cos\varphi$ bestimmen, wie unmittelbar aus der Gleichung hervorgeht. Indem man diesen, dem $\cos\varphi'$ entgegengesetzt, aufträgt, wie Fig. 6. zeigt, und durch M eine Parallele zu der bezeichneten Richtung zieht, ergibt sich im Durchschnitt dieser mit dem freien Schenkel von φ' ein Curvenpunkt P.

Es verdient noch der im Vorherigen schon berührte Fall der Erwähnung, wo $c=0$. Alsdann geht die Curve in eine solche 4ten Grades über in der Form:

$$x^2(x-2a)^2(1-k^2) = y^2(k^2(x-2a)^2-x^2)$$

welche für $k=1$ in die x-Axe resp. in die im Mittelpunkt der y-Axe parallele Gerade übergeht. Die Gleichung

$$\cos\varphi = k\cos(180-\varphi')$$

zeigt zugleich, wie sich in diesem Falle auch die Construction vereinfacht.

§ 3.

Im Nachstehenden soll versucht werden, einige der vorhergegangenen Resultate an einem praktischen Beispiele anzuwenden, welches in gewissem Zusammenhange dazu steht, obgleich ihm nicht die vorher untersuchten Flächen entsprechen.

Da nach dem Vorhergegangenen alle die Fälle, wobei es sich um Localattraction handelt, sich durch die im § 1. gegebenen Resultate erledigen, so kann es hier nur auf einen, durch die allgemeine Attraction als Folge der ungleichen Verteilung von Continent und Ocean auf der Erdoberfläche bedingten Fall ankommen. In der schon erwähnten Abhandlung des Herrn Bruns wird von einem solchen Beispiele unter Annahme einer bestimmten Massenverteilung der Continente und Oceane auf der Erdkugel der Einfluss der durch sie erzeugten Anziehung auf die Punkte des Aequators erläutert. In ähnlicher Art wie dort geschehen, kann man nun auch verfahren, um den Einfluss der ungleichen Massenverteilung auf die Punkte der Meridiane zu ermitteln, wie im Folgenden versucht werden soll.

Dabei werde folgende Annahme gemacht. Offenbar sind, wie ein Blick auf den Globus zeigt, die Landmassen mehr um den Nordpol als um den Südpol concentrirt, so dass man etwa vom 40ten bis 70ten Grade nördl. Br. eine Zone annehmen kann, worin dem Flächeninhalte nach der Ueberschuss der anziehenden Landmasse ebenso gross ist, als unter denselben Graden südl. Br. der Ueberschuss an Wasser. Man kann sich daher die Anziehung vorstellen als das Potential der Oberfläche einer solchen Zone, deren Dichtigkeit das Product der mittleren Dichtigkeit der Erdoberfläche resp. des Wassers ist, mal der mittleren Höhe resp. Tiefe dieser Massen.

Diese Potentiale sollen, um auf das Vorherige zu kommen, wie für Aussenpunkte in erster Annäherung stets zulässig, durch 2 Massenpunkte ersetzt werden, die sich im Schwerpunkte der homogen gedachten Zonen befinden. Da jedoch jede derselben, wie man leicht übersieht, nicht vollständig mit Land resp. Wasser gefüllt sind, sondern etwa nur mit der Hälfte des ganzen Inhalts zur Wirksamkeit gelangen, so soll diese letzte Annahme festgehalten werden. Die Resultate können unter diesen Voraussetzungen nur für Aussenpunkte gelten, daher nicht über den 55ten Grad nördl. resp. südl. Breite hinaus angewandt werden. Sie umfassen indessen immerhin den grössten Teil des europäischen Gradmessungsgebiets, und sind somit geeignet, über die durch jene Einflüsse erzeugten Abweichungen der Niveaufläche von der kugelförmig gedachten Erde Aufschluss zu geben.

Man sieht, dass streng genommen dies Beispiel den vorherigen Problemen nicht mehr entspricht, weil es sich hier nicht um zwei sondern um 3 auf gerader Linie liegende Centra handelt.

Bei der relativen Kleinheit der ablenkenden Massen gegen die des Erdkörpers kann man jedoch in den Flächenteilen der nördlichen Halbkugel die ablenkenden Einflüsse des südlichen Centrums in erster Annäherung vernachlässigen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, sich die Erdmasse und die des südlichen Centrums im gemeinsamen Schwerpunkt, d. h. im Erdmittelpunkte selber vereinigt denken, und analog in den Teilen der südlichen Halbkugel bezüglich des nördlichen Centrums. Alsdann geben die vorherigen Resultate eine vollständige Vorstellung für jeden dieser Flächenteile.

In der Praxis indessen genügt schon eine angenäherte Darstellung derjenigen Grössen, worauf es für die Messungen hauptsächlich ankommt, wie sie in den nachstehenden Tabellen gegeben werden.

Es sei die mittlere Erddichte $= 5.55$, die an der Oberfläche $= 2.5$ und die Dichte des Wassers $= -1.5$, die mittlere Höhe der Landmasse $= 300^m$ und die mittlere Tiefe der Oceane $= 3000^m$, den Annahmen in der erw. Abh. analog.

Verlegt man den Coordinatenursprung in das Erdcentrum, und bezeichnen a, a', a'' die resp. Schwerpunktsabstände der Calotten zwischen 70^0 und 90^0 resp. 90^0 und 70^0, 90^0 und 40^0, und R den mittleren Erdradius, so erhält man den Abstand a nach der Formel:

$$a = \frac{a'\mathrm{Cal}\,(90^0 - 40^0) - a''\mathrm{Cal}\,(90^0 - 70^0)}{\mathrm{Segm}\,(70^0 - 40^0)}$$

Berechnet man ferner nach der Formel:

$$\mathrm{Cal} = 2\,R\pi k$$

die bezüglichen Flächeninhalte unter Annahme:

$$\log R = 6.80414$$

und ebenso die Abstände a', a'' nach der Formel:

$$a' = \frac{R}{2}(1 + \cos\varphi')$$

wo für φ' resp. 50^0 und 20^0 zu setzen, so ergibt sich zufolge der für a angegebenen Formel:

$$a = 5040590$$
$$\log a = 6.70248$$

Ferner erhält man für die im Schwerpunkt vereinigten Massen

$$\log m = 16.45313$$
$$\log m' = 17.23128n$$

I. Um hiernach zunächst die Höhenunterschiede von Punkten der Meridian-Curve und denen der Kreisperipherie vom mittleren Erdradius zu bestimmen, kann man sich der, in der erw. Abh. des Herrn Bruns gegebenen Formel bedienen, die, auf den vorliegenden Fall angewandt, ergibt:

$$h - h' = \frac{\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}}{\frac{4\pi RK}{3}}$$

wo $h - h'$ den gesuchten Höhenunterschied der Niveaufläche über der Kugel, K die mittlere Erddichte bezeichnet. Ferner ist:

$$r_1 = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi}$$
$$r_2 = \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\cos\varphi}$$

den Wkl. φ vom Nordpol aus gerechnet. Durch Einsetzen der Werte von φ im Intervalle von 5 zu 5⁰ erhält man für die Höhenunterschiede die folgende Tabelle:

⁰	$h-h'$	⁰	$h-h'$
0	+ 43·41	95	—125·36
5	+ 34·26	100	—133·49
10	+ 14·57	105	—142·61
15	— 5·27	110	—152·92
20	— 21·60	115	—164·67
25	— 34·49	120	—178·26
30	— 44·79	125	—194·12
35	— 53·22	130	—212·89
40	— 60·32	135	—235·40
45	— 66·72	140	—262·82
50	— 72·49	145	—296·82
55	— 77·93	150	—339·78
60	— 83·19	155	—395·08
65	— 88·42	160	—465·07
70	— 93·75	165	—561·35
75	— 99·27	170	—677·56
80	—105·07	175	—794·06
85	—111·28	180	—848·42
90	—117·99		

Man ersieht daraus, dass der Höhenunterschied am grössten bei 180⁰, und dass zwischen 10 und 15⁰, vom Nordpol aus, die Kugel und die Niveaufläche sich durchschneiden. Ferner ergibt sich, dass innerhalb der Breitengrade vom 55ten bis 36⁰ n. Br. die dem europäischen

Gradmessungsgebiet entsprechen, soweit dies unter obiger Voraussetzung möglich, die Abweichungen die Grösse von 78^m nicht überschreiten.

II. Berechnet man ebenso die Lotablenkungen nach den bekannten Formeln, wie sie u. A. von Pratt, Figure of the Earth S. 109. gegeben, und welche sich im vorliegenden Falle folgendermassen modificirt:

$$\sin \varepsilon = \frac{3a \sin \varphi}{2R\pi K} \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right)$$

so ergibt sich nachstehende Tabelle:

0	ε	0	ε
0	0″·00	95	5″·75
5	13 ·31	100	6 ·38
10	15 ·40	105	7 ·20
15	13 ·56	110	8 ·13
20	10 ·78	115	9 ·30
25	8 ·66	120	10 ·83
30	6 ·89	125	12 ·78
35	5 ·74	130	15 ·16
40	4 ·96	135	18 ·35
45	4 ·39	140	22 ·46
50	4 ·09	145	28 ·12
55	3 ·93	150	35 ·92
60	3 ·90	155	46 ·70
65	3 ·95	160	61 ·18
70	4 ·10	165	78 ·75
75	4 ·22	170	91 ·46
80	4 ·45	175	73 ·07
85	4 ·77	180	0 ·00
90	5 ·21		

Die Lotablenkung wächst also zuerst von 0^0 bis zwischen 10 und 15^0 und nimmt nachher ab bis zu einem Winkel zwischen 65 und 70^0. Sodann steigt sie wieder bis zu einem Winkel zwischen 165 und 170^0 und erreicht, von da abnehmend, bei 180^0 wieder den Wert 0. Innerhalb der für das europäische Gradmessungsgebiet in Frage kommenden Grenzen überschreitet sie die Grösse von 7″ nicht.

III. Bezeichnet γ die Schwere der Erdkugel, g die der Niveaufläche, und zwar erstere bezogen auf einen Punkt P, senkrecht über dem Punkte Q, auf welchen sich g bezieht, so wird die Differenz $g - \gamma$ nach der Formel des Herrn Bruns dargestellt, die sich hier folgendermassen modificirt:

$$g - \gamma = \frac{(R - a \cos \varphi) m_1}{r_1^3} - \frac{(R + a \cos \varphi) m_2}{r_2^3}$$

Will man die Schwere beidemale auf denselben Punkt Q bezogen haben, so hat man wie a. a. O. angegeben, den Unterschied $h\frac{d\gamma}{dR}$ zu γ hinzuzufügen, positiv oder negativ, jenachdem $h \gtrless 0$ ist. Die erste der beiden folgenden Tabellen enthält demgemäss die Differenz $g-\gamma$ allein, die zweite denselben Unterschied unter Hinzunahme der letztgenannten Aenderung. Der Ausdruck $\frac{d\gamma}{dR}$ ergibt sich zufolge des Ausdrucks $\gamma = \frac{4R\pi K}{3}$, woraus

$$\frac{d\gamma}{dR} = \frac{4\pi K}{3} = \frac{\gamma}{R}$$

0	$g-\gamma$	0	$g-\gamma$	0	$g-\gamma-h\frac{d\gamma}{dR}$	0	$g-\gamma-h\frac{d\gamma}{dR}$
0	+14824	95	— 1837	0	+13815	95	+ 1077
5	+11936	100	— 2001	5	+11140	100	+ 1102
10	+ 7427	105	— 2198	10	+ 7089	105	+ 1117
15	+ 4071	110	— 2430	15	+ 3948	110	+ 1125
20	+ 2130	115	— 2713	20	+ 2632	115	+ 1115
25	+ 1014	120	— 3044	25	+ 1815	120	+ 1100
30	+ 236	125	— 3479	30	+ 1277	125	+ 1034
35	— 85	130	— 4159	35	+ 1152	130	+ 790
40	— 375	135	— 4935	40	+ 1029	135	+ 538
45	— 586	140	— 6060	45	+ 964	140	+ 50
50	— 750	145	— 7590	50	+ 935	145	— 690
55	— 886	150	—10010	55	+ 926	150	— 2093
60	— 1020	155	—13924	60	+ 914	155	— 4740
65	— 1115	160	—20554	65	+ 941	160	— 7504
70	— 1220	165	—32274	70	+ 959	165	—19224
75	— 1327	170	—52482	75	+ 981	170	—36731
80	— 1437	175	—77484	80	+ 1006	175	—59024
85	— 1555	180	—96164	85	+ 1032	180	—76440
90	— 1687			90	+ 1056		

Die Zahlen der 1ten Tabelle zeigen eine regelmässige Abnahme von 0^0 bis 180, die der letztern eine periodische Abnahme von 0 bis 60^0, dann eine Zunahme bis ppt. zu 110^0 bis 115^0 und von da wiederum eine Abnahme bis 180^0. Für die in Frage kommenden Teile bezüglich des europäischen Gradmessungsgebiets ergeben sich im ersteren Falle Unterschiede zwischen $85-886^m$, im letzteren sind sie relativ grösser und variiren zwischen ppt. $1152-741^m$.

IV. Von Interesse für das Nivellement ist noch die Aenderung der Krümmung, insofern davon die Correcturen abhängen, welche

man den beobachteten Werten hinzuzufügen hat. Diese Aenderung zeigt die folgende Tabelle, welche die Krümmungsradien enthält.

Aus den Formeln des Herrn Bruns leitet man für den Krümmungsradius ϱ im vorliegenden Falle leicht die Formel ab

$$\frac{y}{\varrho} = \frac{\gamma}{R} + \frac{g-\gamma}{\varrho'}$$

wo ϱ' der Veränderung des Krümmungsradius entspricht, der sich durch das hinzu kommende Potential

$$T = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}$$

ergibt, und sich demnach dem vorigen § zufolge aus der für den Krümmungsradius der ihm entsprechenden Niveaufläche leicht abzuleitenden Formel findet:

$$\varrho' = \frac{\left[\left(\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}\right)\left(\frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3}\right) + \frac{4a^2 m_1 m_2}{r_1^3 r_2^3}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}\right)\left(\frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3}\right)^2 + \frac{4a^2 m_1 m_2}{r_1^3 r_2^3}\left(\frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3}\right) - \frac{12 m_1 m_2 a^2 R^2 \sin^2\varphi}{r_2^5 r_2^5}\left(\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}\right)\right]}$$

Auch hier könnte man, um beide Radien ϱ, R auf denselben Punkt Q zu beziehen, zu ϱ noch die vorher berechneten Höhenunterschiede $h - h'$ hinzufügen, was jedoch im Folgenden unterblieben ist, da die Unterschiede nur gering sein können.

Man erhält demnach die folgende Tabelle für $\log\varrho$:

0	$\log\varrho$	0	$\log\varrho$
0	6·80794	95	6·80812
5	6·80794	100	6·80812
10	6·80804	105	6·80812
15	6·80809	110	6·80812
20	6·80811	115	6·80812
25	6·80812	120	6·80812
30	6·80812	125	6·80812
35	6·80812	130	6·80813
40	6·80812	135	6·80813
45	6·80812	140	6·80814
50	6·80812	145	6·80814
55	6·80813	150	6·80815
60	6·80813	155	6·80818
65	6·80817	160	6·80823
70	6·80818	165	6·80833
75	6·80814	170	6·80854
80	6·80814	175	6·80891
85	6·80813	180	6·80903
90	6·80813		

Daraus ersieht man, dass die Aenderung der Krümmung im Allgemeinen nur sehr gering bleibt, von 0 bis gegen 80^0 stetig abnimmt, von da wieder wächst bis 130^0 und schliesslich bis zu 180^0 wieder abnimmt. Die Aenderungen $\log \varrho$, soweit sie sich auf die für die europäische Gradmessung in Betracht kommenden Teile beziehen, zeigen sich erst in der 5ten Decimalstelle.

Im Allgemeinen kann man daher aus dem Vorherigen das Resultat ziehen, dass der Einfluss der durch die ungleiche Massenverteilung nach den Polen hin bezüglich der Punkte des Meridians erzeugten Ablenkung nur gering ist im Vergleich zu der, bezüglich der Punkte des Aequators oder der Parallelkreise.

VIII.

Ueber den geometrischen Ort des Centrums der Collineation zwischen einer Nichtregelfläche zweiter Ordnung und einem System von Kugelflächen.

Von

Wenzel Jeřábek,

Professor an der Landes-Oberrealschule in Teltsch.

Durch nachfolgende Betrachtungen wollen wir den geometrischen Ort aller jener Collineationscentra bestimmen, von welchen aus ein System von Kugelflächen bei bestimmter Lage der Collineationsebene nach den Gesetzen der räumlichen Centralcollineation aus einer Nichtregelfläche zweiter Ordnung abgeleitet werden kann.

Zu diesem Zwecke sei f, f' die reelle Axe eines zweischaligen Hyperboloids (Fig. 1.), oder die grösste Axe eines elliptischen Ellipsoids (Fig. 2.), oder die Axe eines elliptischen Paraboloids (Fig. 3.).

Irgend eine zu den genannten Axen senkrecht gelegte Ebene E schneidet jede dieser Flächen nach einer Ellipse $\breve{E}$, und wenn wir jenen Hauptschnitt $\breve{H}$, welcher in der Ebene E_1 liegt, die durch f, f' und die kleinere Axe der erwähnten Ellipse bestimmt ist, der Einfachheit wegen in bestimmter Projectionsebene M liegend annehmen, — was durch die Construction des Kegelschnittes $\breve{H}$ (Fig. 1, 2, 3) in der Bildebene ersichtlich gemacht werden kann —, so ist es möglich jene zwei Stellungen von Ebenen zu bestimmen, welche die Nicht-

regelfläche zweiter Ordnung $\breve{F}$ nach Kreisen schneiden. Man erhält nämlich zwei solche Kreisschnitte als Durchdringungscurven der gegebenen Fläche $\breve{F}$ mit einer Kugelfläche $\breve{K}$, welche die Fläche $\breve{F}$ in den Scheiteln der grösseren Axe der erwähnten Ellipse $\breve{E}$ berührt. Ist also E_2 eine derartige Ebene, und schneidet sie die Fläche $\breve{F}$ nach einem Kreise und die Ebene $M \equiv E_1$ des Hauptschnittes $\breve{H}$ in der Geraden mn, so projicirt sich orthogonal der Kreisschnitt auf die Ebene M, — da dessen Ebene auf der Ebene M senkrecht steht —, als die Strecke $\overline{mn}$ der Spur mn. Wenn wir im Mittelpunkte u des Kreisschnittes eine Senkrechte $\overline{uo'}$ auf die Ebene E_2 errichten, so kann ein beliebiger Punkt o' dieser Senkrechten als Mittelpunkt einer Kugel $\breve{F}'$ betrachtet werden, welche durch den Kreisschnitt hindurchgeht. Die Flächen $\breve{F}$, $\breve{F}'$ sind bekanntlich collineare Flächen in perspectivischer Lage für die Ebene E_2 als Collineationsebene und die Scheitel c und c_1 jener Berührungskegelflächen $\breve{B}$, $\breve{B}_1$, welche beiden Flächen $\breve{F}$, $\breve{F}'$ umschrieben sind, als Collineationscentra, Aus dem Umstande, dass der Mittelpunkt o' der Kugel $\breve{F}'$ sich in der Ebene M des Hauptschnittes befindet, folgt, dass die Kugel $\breve{F}'$ von dieser Ebene M nach einem Kreise K', und die Berührungskegelflächen $\breve{B}$, $\breve{B}_1$ von derselben Ebene M in zwei Paaren von Erzeugenden geschnitten werden, die als gemeinschaftliche Tangenten der Curven $\breve{K}$ und $\breve{K}'$ erscheinen. Da aber die Curven $\breve{K}$, $\breve{K}'$ sich in zwei reellen Punkten m und n schneiden, so werden sie von zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten berührt. Die Schnittpunkte c und c_1 sowohl der reellen, als auch der imaginären Tangentenpaare sind reell und bilden die Scheitel c und c_1 der obenangeführten Berührungskegel $\breve{B}$, $\breve{B}_1$. Aus dem Vorigen ist auch ersichtlich, dass die Curven $\breve{K}$, $\breve{K}'$ als collineare Curven in perspectivischer Lage angesehen werden können, und zwar für die Spur mn als Collineationsaxe und für die Punkte c und c_1 als Collineationscentra.

Um nun die Construction der Punkte c, e_1 von der Bestimmung der gemeinschaftlichen Tangentenpaare der Curven $\breve{K}$, $\breve{K}'$ unabhängig zu machen, — was namentlich in dem Falle von Wichtigkeit ist, in welchem das imaginäre Tangentenpaar nicht graphisch construirbar ist —, bestimmen wir zuerst die Pole p und p' der Geraden mn bezüglich der Kegelschnitte $\breve{K}$ und $\breve{K}'$. Die Pole p, p' erscheinen dann als zwei entsprechende Punkte jener ebenen und collinearen Systeme, welche sich in perspectivischer Lage befinden und denen die Curven

$\breve{K}$, $\breve{K}'$ als entsprechende Curven angehören. Die Verbindungslinie der homologen Punkte p, p' muss also beide Collineationscentra c und c_1 enthalten. Die Lage der Punkte c und c_1 im Collineationsstrahle $\overline{pp'}$ kann man etwa dadurch erhalten, dass man zuerst die Punkte x, x' bestimmt, in welchen die Senkrechte $\overline{up'}$ die Kreislinie $\breve{K}'$ trifft, und dann jene Punkte v, v_1 ermittelt, in denen die zur Senkrechten $\overline{up'}$ collinear verwandte Gerade up den Kegelschnitt $\breve{K}$ schneidet. Da aber die Punkte x, x' den Punkten v, v_1 doppelt als collinear verwandte Punkte zugewiesen werden können, so ist leicht ersichtlich, dass die Verbindungslinien $\overline{vx}$, $\overline{v_1x'}$ sich im Punkte c, und die Verbindungslinien $\overline{vx'}$, $\overline{v_1x}$ im Punkte c_1 schneiden müssen.

Durch ähnliche Untersuchungen könnte man für jede Kugelfläche, die ihren Mittelpunkt auf der Senkrechten $\overline{uo'}$ hat und durch den Kreisschnitt hindurchgeht, ein Paar von Punkten c und c_1 bestimmen, woraus folgt, dass der Gesammtheit aller solcher Kugelflächen eine Gesammtheit von Kreisen $\breve{K}'$ [Kreisbüschel $(\breve{K}')$] und eine Gesammtheit von Punkten c, c_1, folglich eine Curve $\breve{C}$ entspricht. Es ist auch ferner klar, dass die Collineationscentra c und c_1, also auch die Curve $\breve{C}$ in der Ebene M des Hauptschnittes $\breve{K}$ sich befinden.

Denkt man sich in den Berührungskegel $\breve{B}$, der das Collineationscentrum c zum Scheitel hat, und welcher den Flächen $\breve{F}$, $\breve{F}'$ umschrieben ist, eine andere Kugelfläche $\breve{F}''$ eingeschrieben, so wird $\breve{F}''$ von der genannten Kegelfläche $\breve{B}$ nach einem Kreise, und $\breve{F}$ nach einem Kegelschnitte berührt. Die Berührungscurven werden sich in zwei Punkten schneiden, welche reell und verschieden, oder zusammenfallend, oder endlich imaginär sein können. Wenn wir z. B. annehmen, dass die Punkte reell sind, so werden sich die Flächen $\breve{F}$, $\breve{F}''$ in diesen, und zwar nur in diesen Punkten berühren. In Folge dessen werden $\breve{F}$, $\breve{F}''$ nach zwei Kreisen einander schneiden, und die Ebene E_3 des einen Kreises wird zur Ebene E_2 parallel laufen. Es ist auch weiter klar, dass die Flächen $\breve{F}$, $\breve{F}''$ für den Punkt c als Collineationscentrum und für die Ebene E_2 als Collineationsebene ebenfalls als collineare Flächen in perspectivischer Lage angesehen werden können, und dass also zur constructiven Bestimmung der Curve $\breve{C}$ eine beliebige Kreisschnittsebene angenommen werden kann. In Fig. 2. haben wir die Collineationsebene durch den Mittelpunkt s des Ellipsoids gelegt.

2. Nun wollen wir beweisen, dass die Curve $\breve{C}$ ein Kegelschnitt ist.

Da der Kreisbüschel $(\breve{K}')$, dessen reelle Mittelpunkte die Punkte m, n sind, und welcher uns zur constructiven Bestimmung der Punktepaare (c, c_1) und somit der Curve $\breve{C}$ gedient hat, die Senkrechte $\overline{uo'} \equiv R$ in einer involutorischen Punktreihe $\ddot{R}$ *) schneidet, in welcher die Punktepaare (x, x') einander involutorisch entsprechen, so müssen die Punktreihen $\dot{R} \equiv (xyu \ldots)$, $\dot{R}' \equiv (x'y'u'_\infty \ldots)$, aus denen die involutorische Reihe $\ddot{R}$ zusammengesetzt ist, projectivisch sein. Die Strahlenbüschel $\bar{v}$, $\bar{v}_1$ **), welche die Punkte (c) ***), d. h. einen Kegelschnitt $\breve{C}$ erzeugen, sind aber beziehungsweise Scheine der projectivischen Reihen $\dot{R}$, $\dot{R}'$, sie müssen daher auch untereinander projectivisch sein und einen Kegelschnitt $\breve{C}$, welcher durch die Punkte v, v_1 hindurchgeht, erzeugen.

Dass die Strahlenbüschel $\bar{v}_1$, $\bar{v}$, welche gegen die projectivischen Reihen $\dot{R}$, $\dot{R}'$ resp. perspectivisch liegen und welche die Punkte (c_1), also einen mit $\breve{C}$ identischen Kegelschnitt $\breve{C}_1$, erzeugen, kann wie folgt bewiesen werden.

Weil der Strahl $\overline{vv_1}$ durch den Punkt u (Centralpunkt der involutorischen Reihe $\ddot{R}$) hindurchgeht, welcher mit dem unendlich fernen Punkte u'_∞ des Trägers R ein entsprechendes Punktepaar u, u'_∞ der involutorischen Reihe $\ddot{R}$ bildet, so werden dem gemeinsamen Strahle vv_1 in den Strahlenbüscheln $v(xyu \ldots)$, $v_1(x'y'u'_\infty \ldots)$, sowie auch in den projectivischen Büscheln $v_1(xyu \ldots)$, $v(x'y'u'_\infty \ldots)$, dieselben Strahlen $\overline{vu'_\infty}$, $\overline{v_1u'_\infty}$, welche zum Träger R parallel laufen, entsprechen; und diese werden beide Kegelschnitte $\breve{C}$, $\breve{C}_1$ in den Punkten v, v_1 berühren. Beide Kegelschnitte $\breve{C}$, $\breve{C}_1$ erscheinen somit durch die Punkte v, v_1, durch ihre Tangenten V, V' und durch dieselbe involutorische Reihe $\ddot{R}$ vollkommen bestimmt, sie müssen also identisch sein.

Im Vorangehenden haben wir gesehen, dass die Curven $\breve{K}$ und

---

*) Durch das Symbol $\ddot{R}$ bezeichnen wir eine involutorische Punktreihe, welche aus den Punktreihen $\dot{R}$, $\dot{R}'$, deren Träger R, R' sind, zusammengesetzt ist.

**) Durch das Symbol $\bar{v}$, bezeichnen wir einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt v ist.

***) Unter (C) wird die Gesammtheit aller Punkte des Kegelschnittes $\breve{C}$ verstanden, welche dieselbe Bedeutung haben wie der Punkt c.

$\breve{C}$ zwei Punkte v, v_1 gemeinschaftlich haben, und dass die Tangenten V, V_1 des Kegelschnittes $\breve{C}$ in den Punkten v, v_1 zum Träger R parallel sind. Wenn wir beachten, dass die Polare des Punktes p in Bezug auf den Kegelschnitt $\breve{K}$ die Secante $\overline{mn}$ ist, so sehen wir, dass der Strahl $\overline{vv_1}$, welcher den Punkt p mit dem Mittelpunkte u seiner Polaren $\overline{mn}$ verbindet, ein Durchmesser des Kegelschnittes $\breve{K}$ ist, und dass also die Tangenten der Curve $\breve{K}$ in den Endpunkten des Durchmessers $\overline{vv_1}$ zu $\overline{mn}$ parallel sind. Nehmen wir auf die gewonnenen Resultate Rücksicht und darauf, dass R senkrecht steht auf $\overline{mn}$, so können wir folgenden Satz aufstellen: Die Tangenten der Curve $\breve{C}$ bilden mit den zugehörigen Tangenten der Curve $\breve{K}$ in den Punkten v, v_1 rechte Winkel, d. h. die Curven $\breve{K}$ und $\breve{C}$ schneiden sich in den Punkten v, v_1 rechtwinklig und haben denselben Mittelpunkt.

3. Wir wollen nun die Bedingungen aufstellen, unter welchen der Kegelschnitt $\breve{C}$ sich als eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel ergibt.

Man kann bekanntlich nur solche Nichtregelflächen zweiter Ordnung affin auf einander beziehen, welche derselben Gattung angehören (z. B. zwei Ellipsoide, zwei einfache Hyperboloide, zwei elliptische Paraboloide u. s. w.); es existirt also in dem Falle, wenn die Fläche $\breve{F}$ ein Hyperboloid ist (Fig. 1.), keine Kugel, welche dem Hyperboloide, sowie auch kein Kreis, welcher dem Hauptschnitte $\breve{K}$ affin zugewiesen werden könnte. Hieraus erhellt, dass in den projectivischen Büscheln $\bar{v}$, $\bar{v}_1$ kein Paar von parallelen und entsprechenden Strahlen zum Vorschein kommt, und dass die Curve $\breve{C}$, weil sie keinen unendlich fernen Punkt besitzt, eine Ellipse ist.

Ist die gegebene Fläche ein Ellipsoid (Fig. 2.), und beschreibt man in demselben mit der mittleren Halbaxe als Radius eine concentrische Kugel, so wird dieselbe von der Ebene M des Hauptschnittes $\breve{K}$ nach einem Kreise $\breve{K}''$ vom Durchmesser $\overline{mn}$ geschnitten. Der Kreis $\breve{K}''$, welcher dem Kreisbüschel (K') angehört, wird noch von dem geometrischen Orte $\overline{uu'_\infty}$ der Kugelmittelpunkte (o') in zwei Punkten v', v_1' getroffen, welche mit den Punkten v, v_1 verbunden, zwei Paare von parallelen und entsprechenden Strahlen $\overline{vv'}$, $\overline{v_1v_1'}$; $\overline{vv_1'}$, $\overline{v_1v'}$ der Strahlenbüschel $\bar{v}$, $\bar{v}_1$ liefern. Man sieht hieraus, dass nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität aus dem Ellipsoide eine und nur eine Kugel, und aus der Ellipse $\breve{K}$ ein und nur ein Kreis $\breve{K}''$ abgeleitet werden kann, und dass die Strahlen $\overline{vv'}$, v_1v' die

Affinitätsrichtungen sind. Der Kegelschnitt $\breve{C}$ hat also zwei unendlich ferne Punkte und ist eine Hyperbel. Die Geraden D_1, D_1', welche wir durch den Mittelpunkt s parallel zu den Affinitätsrichtungen $\overline{vv'}$, v_1v' legen, sind Asymptoten der Hyperbel $\breve{C}$.

Ist endlich die gegebene Fläche ein Paraboloid, und betrachtet man die Kreisschnittsebene E_2 als eine Kugelfläche und die Spur $\overline{mn}$ als einen Kreis vom unendlich grossen Halbmesser, so wird $\overline{mn}$ die Punktreihe $\ddot{R}$ in den Punkten u, u'_∞ schneiden. Da nun der Durchmesser $\overline{vv_{1\infty}}$ durch den Mittelpunkt der Parabel $\breve{K}$ d. h. durch den unendlich fernen Punkt ihrer Axe hindurchgeht, so ergibt sich, dass nur die Strahlen $\overline{vu}$, $v_{1\infty}$ parallel sein können, und dass die Curve $\breve{C}$ eine Parabel ist.

4. Es ist wert zu erwähnen, dass die Strahlenbüschel $v(xyuu'_\infty \ldots)$, $v_1(x'y'u'_\infty \ldots)$ auf der unendlich fernen Geraden der Ebene der Curve $\breve{K}$ zwei projectivische Punktreihen $(x_\infty y_\infty u_\infty u'_\infty \ldots)$, $(x'_\infty y'_\infty u'_\infty u_\infty \ldots)$ erzeugen, folglich ist $(x_\infty y_\infty u_\infty u'_\infty) = (x'_\infty y'_\infty u'_\infty u_\infty)$, und $x_\infty x'_\infty$, $y_\infty y'_\infty$, $u_\infty u'_\infty$ bilden eine Involution. Die Doppelpunkte dieser Involution sind unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes $\breve{C}$, und man hat daher in Fig. 1. zwei imaginäre, in Fig. 2. zwei reelle und verschiedene, und in Fig. 3. zwei zusammenfallende Doppelpunkte. Projiciren wir die Involution $x_\infty x'_\infty$, $y_\infty y'_\infty$, $u_\infty u'_\infty$ z. B. aus dem Mittelpunkte s der Strecke $\overline{vv_1}$, d. h. verschieben wir die Strahlenbüschel $\bar{v}$, $\bar{v}_1$ parallel zu sich selbst, bis ihre Mittelpunkte v, v_1 mit dem Halbirungspunkte s zusammenfallen, so erhalten wir eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die unendlich fernen Punkte der Curve $\breve{C}$ projiciren und daher Asymptoten dieser Curve sind.

5. Betrachten wir vv_1cc_1 als ein der Curve $\breve{C}$ eingeschriebenes Viereck und die Tangenten in den Punkten v, v_1, c, c_1 als ein derselben Curve umschriebenes Vierseit, so sehen wir, dass das Diagonaldreieck pxx' des Viereckes zugleich ein Diagonaldreiseit des betreffenden Vierseits ist, und dass der Schnittpunkt u'_∞ der Tangenten V, V_1 und der Schnittpunkt o' der Tangenten co', c_1o' auf der Diagonalseite xx' liegen muss. Es ist bekannt, dass die so erhaltenen Punkte $xx'o'u'_\infty$ harmonische Punkte sind, und da der letztere Punkt u'_∞ im Unendlichen liegt, so muss o' die Strecke xx', d. h. den Durchmesser der Kreislinie $\breve{K}'$ halbiren. Es gelten somit folgende Sätze: a) Die Tangenten des Kegelschnittes $\breve{C}$ in den Punkten c, c_1 schneiden sich im Mittelpunkte o' jener Kugel $\breve{F}'$, welche die collinear Verwandte ist der gegebenen Fläche $\breve{F}$ für die Punkte c, c_1 als

Collineationscentra und für die Kreisschnittsebene E_2 als Collineationsebene. b) Die Tangenten des Kegelschnittes $\breve{C}$ in den Punkten c, c_1 schneiden sich im Mittelpunkte o' jener Kreislinie $\breve{K}'$, welche die collinear Verwandte ist des Kegelschnittes $\breve{K}$ für die Punkte c, c_1 als Collineationscentra und für die gemeinschaftliche Secante $\overline{mn}$ der Curven $\breve{K}$, $\breve{K}'$ als Collineationsaxe.

6. Es bleibt uns noch übrig zu beweisen, dass die Curven $\breve{K}$ und $\breve{C}$ confocal sind.

Wir wissen, dass jede Kreislinie $\breve{K}_1$, welche durch zwei Punkte m, n eines Kegelschnittes $\breve{K}$ hindurchgeht und in der Ebene desselben liegt, denselben noch in weiteren Punkten m_1, n_1 schneidet, und dass die Verbindungslinie solcher Punkte von constanter Richtung ist. Im Kreisbüschel $(\breve{K}')$ existiren zwei Kreislinien, die den Kegelschnitt $\breve{K}$ in den Punkten t, t_1 berühren. Die Tangenten dieser Punkte sind parallel zu $\overline{m_1 n_1}$. Die Kreislinie, welche den Kegelschnitt im Punkt t berührt, wenn wir $\breve{K}_t$, und die Kreislinie, welche den Kegelschnitt im Punkte t' berührt, nennen wir $\breve{K}_{t'}$ *). Wir können beweisen, dass die Punkte t, t_1 auch dem Kegelschnitte $\breve{C}$ angehören. Zu dem Zwecke erinnern wir uns, dass die Kreislinien K_t, $K_{t'}$, welche den Kegelschnitt $\breve{K}$ in den Punkten t, t_1 berühren, auf der Curve K zwei weitere Punkte bestimmen, deren Verbindungslinien offenbar mit der Geraden $\overline{mn}$ sowohl der Lage als auch der Richtung nach übereinstimmen; da aber die Tangenten der Curve $\breve{K}$ in den Punkten v, v_1 dieselbe Richtung haben wie $\overline{mn}$, so können wir zwei Kreislinien construiren, die den Kegelschnitt $\breve{K}$ in den Punkten t und v oder v_1 berühren. Dasselbe bezieht sich auch auf den Punkt t_1. Hieraus folgt, dass die Punkte $v v_1 t t_1$ symmetrisch zu den Axen des Kegelschnittes $\breve{K}$ liegen und ein Rechteck bilden, d. h. einer Kreislinie angehören, die ihren Mittelpunkt im Centrum der Curve $\breve{C}$ hat. Es seien r und r' die Schnittpunkte der Kreislinie $\breve{K}_t$ mit dem geometrischen Orte $\overline{uu'_\infty}$ der Kugelmittelpunkte (o'); dann halbiren die Punkte r und r' den auf $\breve{K}_t$ bestimmten Bogen mn. Die Kreislinie $\breve{K}_t$ schneidet die Curve $\breve{K}$ in den Punkten m, n und berührt dieselbe im Punkte t; nach einem bekannten Satze über die Kegelschnitte bilden die Geraden mt und nt mit den Axen der Curve $\breve{K}$ gleiche Winkel. Die

*) In Fig. 1. ist bloss die Kreislinie $\breve{K}t$ gezeichnet.

Seiten des Rechteckes vv_1tt_1 sind aber parallel zu diesen Axen, folglich halbiren die Geraden vt, v_1t die Winkel der Geraden mt, nt, und deshalb werden die ersteren zwei Geraden die Kreislinie $\breve{K}_t$ in jenen Punkten schneiden, die den Kreisbogen mn halbiren, also in den Punkten r und r'. Es ist also der Punkt t der Schnittpunkt der Geraden vr und v_1r', und somit ein Punkt der Curve $\breve{C}$. Dasselbe gilt vom Punkte t'.

Die Kegelschnitte $\breve{K}$ und $\breve{C}$ schneiden sich in den Eckpunkten des Rechteckes vv_1tt_1, folglich sind sie coaxial, und da sie sich, wie wir schon früher gezeigt haben, in den Punkten v, v_1 rechtwinklig durchschneiden, so werden sie sich auch in den Punkten t, t_1 rechtwinklig schneiden, und beide Kegelschnitte müssen also confocal sein. Wir können also folgende Resultate aussprechen:

a) Der geometrische Ort der Collineationscentra (c, c_1) zwischen einer Nichtregelfläche zweiter Ordnung $\breve{F}$ und einem System von Kugelflächen $(\breve{F}')$, die durch einen Kreisschnitt der Fläche hindurchgehen, ist ein zum Hauptschnitte $\breve{K}$ confocaler Kegelschnitt $\breve{C}$*).

b) Der geometrische Ort der Collineationscentra (c, c_1) zwischen einem Kegelschnitte $\breve{K}$ und einem System von Kreisen $(\breve{K}')$ ist ein zum Kegelschnitte $\breve{K}$ confocaler Kegelschnitt $\breve{C}$.

7. Die confocalen Kegelschnitte $\breve{K}$ und $\breve{C}$ führen uns zur bekannten Axenconstruction der Ellipse, von welcher zwei conjugirte Durchmesser $\overline{mn}$, $\overline{vv_1}$ (Fig. 2.) gegeben sind.

Zu dem Zwecke fällen wir von dem Punkte v_1 eine Senkrechte auf den Durchmesser $\overline{mn}$, und tragen auf diese Senkrechte vom Punkte v_1 aus beiderseits die Hälfte des Durchmessers $\overline{mn}$. Die Verbindungslinien der so erhaltenen Punkte γ, δ mit dem Mittelpunkte s sind Asymptoten der Hyperbel $\breve{C}$. Denn aus den congruenten Dreiecken $\triangle vsv'$ und $\triangle v_1s\delta$ ergibt sich Wkl. $vv's =$ Wkl. $s\delta v_1$ d. h. $\overline{s\delta} \parallel \overline{vv'}$. Ebenso hat man aus der Congruenz der Dreiecke $\triangle v_1v's$ und $\triangle v_1s\gamma$, Wkl. $v_1\gamma s = v_1v's$, folglich $\overline{s\gamma} \parallel v'v_1$. Wenn wir uns die Halbirungsgeraden der Winkel $\delta s\gamma$ $(180^0 - \delta s\gamma)$ construiren, so sind uns dadurch die Axen von $\breve{K}$ der Lage nach gegeben. Dabei wollen wir als bekannt voraussetzen, dass parallele Gerade, welche wir durch v_1 zu den Axen $\overline{sa}$, $\overline{sb}$ führen, die Asymptoten in zwei Punkten β und α schneiden, und dass $\overline{s\alpha}$, $\overline{s\beta}$ die Längen der Halbaxen $\overline{sa}$, $\overline{sb}$ sind.

*) Dr. W. Fiedler, Darstellende Geometrie, erste Auflage pag. 392.

8. Die gewonnenen Resultate kann man auch bei der directen Axenbestimmung der Central-Projection eines Kreises verwerten.

Es sei $\overline{mn}$ (Fig. 4) das Bild der centralen Projection des zur Bildebene (Projectionsebene) parallelen Durchmesser $\overline{m_0 n_0}$ eines central zu projicirenden Kreises, welcher auf einer gegen die Bildebene beliebig geneigten Ebene S, F' liegt. S sei die Spur und F' die Fluchtlinie dieser Ebene; ferner sei c' der Centralpunkt (Hauptpunkt), $\overline{c'(c)}$ die Distanz und c die Umlegung des Projectionscentrums um die Fluchtlinie F' in die Bildebene. Zur Bestimmung der Axen der centralen Kreisprojection, denken wir uns die Ebene des Kreises um jenen Durchmesser $\overline{m_0 n_0}$, der seine centrale Projection in $\overline{mn}$ hat, in eine zur Bildebene parallele Lage gedreht, und construiren nun die centrale Projection $\breve{K}'$ des gedrehten Kreises. Es wird sofort in die Augen fallen, dass $\breve{K}$ und $\breve{K}'$ als collineare Curven in perspectivischer Lage betrachtet werden können, und dass $\overline{mn}$ die Collineationsaxe und c das Collineationscentrum ist. Man wird auch nach den oben angeführten Ergebnissen ohne weiteres erkennen, dass c auf einer zum Bilde $\breve{K}$ confocalen Hyperbel $\breve{C}$ liegt *) — weil sich zwischen $\breve{K}$ und $\breve{K}'$ ähnliche Verhältnisse ergeben wie in Fig. 2. — und dass das Bild $\breve{K}$ von der Hyperbel $\breve{C}$ in jenen Punkten v, v_1 rechtwinklig geschnitten wird, welche Central-Projectionen der Endpunkte des zur Bildebene senkrecht stehenden Durchmessers sind. Dass $\overline{uc}$ die Curve $\breve{C}$ im Punkte c berührt, ist auch klar. Wenn wir die Asymptoten D_1, D_1' der Hyperbel $\breve{C}$ construiren, so sind wir auch im Stande die Axen des Kreisbildes $\breve{K}$ sowohl der Lage, als auch der Länge nach zu bestimmen. Zur Bestimmung der Asymptoten D_1, D_1' denken wir uns die Strahlenbüschel $\overline{v}$, $\overline{v_1}$, welche die Curve $\breve{C}$ erzeugen, parallel zu sich selbst verschoben, bis ihre Mittelpunkte v, v_1 zusammenfallen. Dadurch erhalten wir, wie bekannt, (Art. 4.) eine Strahleninvolution $\overline{\overline{s}}$, welche durch zwei einander entsprechende Strahlenpaare su_1 und su_1' $(su_1')\,(ux')$; $sx_1(sx_1)\,(vx')$ und $sx_1'(sx_1' \parallel v_1x')$ vollkommen bestimmt ist. Die Doppelstrahlen D_1 und D_1' (Asymptoten der Curve $\breve{C}$) der Strahleninvolution $\overline{\overline{s}}$ kann man mit Hilfe eines beliebigen durch s hindurchgelegten Kreises bestimmen. Die Strahlenpaare su_1, su_1'; sx_1, sx_1' schneiden nämlich diesen Kreis in den einander entsprechenden Punkten u_1, u_1'; x_1, x_1' einer Punktinvolution, welche durch die Strahleninvolution $\overline{\overline{s}}$ auf dem Hilfskreise

*) In der Figur 4. ist die Hyperbel $\breve{C}$ nicht gezeichnet.

bestimmt wird. Die Doppelpunkte d_1, d_1' dieser Punktinvolution erhalten wir entweder mit Hilfe der Involutionsaxe Σ oder des Involutionscentrum σ. Im ersten Falle construiren wir die Schnittpunkte ξ und η der Geraden $\overline{u_1x_1}$, $\overline{u_1'x_1'}$ und der Geraden u_1x_1', $\overline{u_1'x}$, und verbinden dieselben durch die Involutionsaxe Σ. Die Schnittpunkte d_1 und d_1' der Axe Σ mit dem Hilfskreise sind Doppelpunkte der im Kreise bestimmten Punktinvolution und die Verbindungslinien des Punktes s mit den Doppelpunkten d_1, d_1' sind die gesuchten Doppelstrahlen D_1, D_1'. Die Doppelpunkte d_1, d_1' hätte man wohl auch erhalten können, wenn man durch das Involutionscentrum σ zum Hilfskreise Tangenten gelegt und die Berührungspunkte derselben bestimmt hätte. Das Centrum σ ist der Schnittpunkt der Geraden $\overline{u_1u_1'}$, $\overline{x_1x_1'}$. Halbiren wir den Winkel und Nebenwinkel zwischen den Asymptoten D_1 und D_1', so erhalten wir die Axen $\overline{sa}$ und $\overline{sb}$ der Lage nach. Die Längen der Halbaxen $sa = s\alpha$, $sb = s\beta$ findet man wie in Fig. 2. mit Hilfe der Geraden $\overline{v_1\alpha}$, $\overline{v_1\beta}$, welche parallel zu $\overline{sb}$, $\overline{sa}$ gezogen werden und die Geraden D_1, D_1' in den Punkten α, β treffen. Es sei nebenbei bemerkt, dass, wenn man vom Mittelpunkte des Hilfskreises auf die Involutionsaxe Σ eine Senkrechte fällt, dieselbe durch das Involutionscentrum σ hindurchgeht und den Hilfskreis in den Punkten r, r' schneidet, welche mit dem Punkte s durch gerade Linien verbunden, auch die Axen des Kegelschnittes K der Lage nach liefern; denn sr, sr' sind entsprechende rechtwinklige Strahlen des involutorischen Strahlenbüschels $\overline{\overline{s}}$.

In Fig. 5. ist auch der Fall behandelt, wenn das Bild des Kreises eine Parabel wird.

Es wurde der Brennpunkt f dieser Parabel als Schnittpunkt der Kreise $\breve{K}_1$, $\breve{K}_2$, welche den Dreiecken $\triangle 12c'$ und $\triangle 1'2'c'$ umschrieben sind, bestimmt. Dass die Kreise $\breve{K}_1$, $\breve{K}_2$ durch den Brennpunkt f hindurchgehen müssen, ergibt sich daraus, dass die Seiten der Dreiecke $\triangle 12c'$ und $\triangle 1'2'c'$, welchen sie umschrieben sind, aus den Tangenten der Parabel $\breve{C}$ und der Parabel $\breve{K}$ gebildet sind.

Zu Ende dieser kleinen Mitteilung wollen wir nur nebenbei bemerken, dass derselben die Lösung der Aufgabe „es soll der geometrische Ort des Projectionscentrums bestimmt werden, aus welchen ein Kegelschnitt auf eine gegebene Ebene als ein Kreis sich projicirt“, sich naturgemäss anschliesst. Da wir dieses Problem schon an einem anderen Orte besprochen haben, so wollen wir hier davon absehen und erlauben uns den geneigten Leser dahin zu verweisen*).

*) Archiv mathematiky a fysiky. II. Band pag. 104.

IX.

Développement en série entière de $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$.

Par

P. Appell.

I. Soit a une constante imaginaire quelconque, x une variable imaginaire; la fonction $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ prend, pour chaque valeur de x autre qu' une valeur commensurable, une infinité de valeurs que l'on peut définir par le l'identité

$$(1) \qquad (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\mathrm{Log}(1+ax)}$$

Parmi toutes les valeurs de $\mathrm{Log}(1+ax)$, je considére seulement celle qui se réduit à 0 quand x tend vers 0;

$$(2) \qquad \mathrm{Log}(1+ax) = ax - \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^3}{3}x^3 - \dots$$

La fonction $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ que définit alors l'identité (1) est développable en une série ordonnée par rapport aux puissances positives croissantes de x et convergente pour toutes les valeurs de x dont le module est moindre que le module de $\frac{1}{a}$. On peut calculer autant de termes de cette série que l'on veut, de la façon suivante. Remplaçons dans (1) $\mathrm{Log}(1+ax)$ pour le développement (2), nous avons

$$e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{a^2}{2}x+\frac{a^3}{3}x^2-\frac{a^4}{4}x^3+\cdots}$$

d'où

$$(3)\quad e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = 1-\frac{a^2}{2}x+a^3\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{8}\right)x^2-a^4\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{6}+\frac{a^2}{48}\right)x^3+\cdots$$

D'une manière générale le coefficient A_p de $(-1)^p x^p$ sera de la forme

$$(4)\qquad A_p = a^{p+1}(P_1+P_2a+\ldots P_pa^{p-1})$$

$P_1, P_2 \ldots P_p$ étant des coefficients numériques. On peut établir une formule récurrente permettant de calculer chacun de ces coefficients A_p à l'aide du précédent, A cet effet, écrivons

$$e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = A_0-A_1x+\ldots+(-1)^pA_px^p+\ldots,$$

puis prenons les dérivées des deux membres par rapport à a. Nous avons

$$e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}-1} - e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \Sigma(-1)^pA_p'x^p$$

en appelant A_p' la dérivée de A_p par rapport à a. La relation précédente peut s'écrire

$$e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}-1} = \Sigma(-1)^pA_px^p+\Sigma(-1)^pA_p'x^p$$

et en multipliant les deux membres par $(1+ax)$

$$\Sigma(-1)^pA_px^p = (1+ax)\Sigma(-1)^p(A_p+A_p')x^p;$$

d'où, en égalant les coefficients de x^p dans les deux membres:

$$(5)\qquad A_p' = a(A_{p-1}+A_{p-1}')$$

$$A_p = aA_{p-1}+\int_0^a(a-1)A_{p-1}\,da$$

et l'on a ainsi l'expression de A_p au fonction de A_{p-1}.

II. L'expression (4) du coefficient A_p est intimement liée à l'expression de la somme des produits différents des n premiers entiers p à p. Soit $S_p(n)$ cette somme. On a

$$S_1(n) = 1+2+\ldots+n = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$\left.\begin{array}{rl} S_2(n) = 1.2+1.3+\dots+1.n & \\ +2.3+\dots+2.n & \\ +\dots+ & \\ +(n-1).n & \end{array}\right\} = (n+1)n(n-1)\left[\frac{1}{3}+\frac{n-2}{8}\right].$$

et ainsi de suite. Or, voici le théorème que je me propose de démontrer:

L'expression de la somme $S_p(n)$ est

$$(n+1)n(n-1)\dots(n-p+1)\,[P_1+P_2(n-p)+P_3(n-p)(n-p-1)+\dots \\ + P_p(n-p)(n-p-1)\dots(n-2p+2)],$$

les coefficients étant précisément ceux qui entrent dans l'expression (4) du coefficient A_p.

Pour démontrer ce théorème, je vais d'abord faire voir que $S_p(n)$ est un polynôme en n du degré $2p$ divisible par le produit $(n+1)n(n-1)\dots(n-p+1)$, en montrant que si cette proposition est vraie pour $S_{p-1}(n)$, elle le sera pour $S_p(n)$; alors, comme la proposition est vraie pour $S_1(n)$, elle le sera quel que soit p. On a évidemment

$$(6) \qquad S_p(n) = nS_{p-1}(n-1)+S_p(n-1)$$

d'où il résulte déjà que, si $S_{p-1}(n)$ est un polynôme en n de degré $2(p-1)$, $S_p(n)$ sera de degré $2p$. Maintenant dans les deux membres de l'identité (6) faisons $n=p$ et remarquons que, d'après la définition de $S_p(n)$, on a

$$S_p(p) = 1.2\dots p,$$
$$S_{p-1}(p-1) = 1.2\dots(p-1);$$

nous obtenons

$$S_p(p-1) = 0;$$

donc déjà $S_p(n)$ cet divisible par $(n-p+1)$. Faisons ensuite, dans (6), $n=p-1$, et rappelons nous que

$$S_p(p-1) = 0,$$
$$S_{p-1}(p-2) = 0;$$

nous obtenons

$$S_p(p-2) = 0$$

donc $S_p(n)$ est divisible par $(n-p+2)$. On continuera de cette façon, et on montrera que $S_p(n)$ est divisible par le produit $(n+1)n(n-1)\dots(n-p+1)$. Comme d'ailleurs $S_p(n)$ est en n du degré $2p$, on pourra toujours mettre cette fonction sous la forme

$$(7) \quad S_p(n) = (n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1)[P_1'+P_2'(n-p) + P_3'(n-p)(n-p-1)+\ldots+P_p'(n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+2)]$$

les coefficients P' étant indépendants de n. Et alors, pour démontrer le théorème que j'ai en vue, il ne me reste plus qu' à démontrer que

$$P_1' = P_1, \quad P_2' = P_2, \quad \ldots \quad P_p' = P_p.$$

Pour cela, supposons x réel, et développant $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ par la formule du binôme

$$(1+ax)^{\frac{1}{x}} = 1+a+\frac{(1-x)}{1.2}a^2+\frac{(1-x)(1-2x)}{1.2.3}a^3+\ldots + \frac{(1-x)(1-2x)\ldots(1-nx)}{1.2\ldots(n+1)}a^{n+1}+\ldots$$

Si on ordonne ce développement par rapport aux puissances croissantes de x, on a

$$(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a - a^2x\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{S_1(n)}{1.2\ldots(n+1)}a^{n-1}+a^3x^2\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{S_2(n)}{1.2\ldots(n+1)}a^{n-2} + \ldots + (-1)^p a^{p+1}x^p\sum_{n=p}^{n=\infty}\frac{S_p(n)}{1.2\ldots(n+1)}a^{n-p}+\ldots$$

Or si, dans le terme général de ce développement, on remplace $S_p(n)$ par son expression (7), on voit que

$$\sum_{n=p}^{n=\infty}\frac{S_p(n)}{1.2\ldots(n+1)}a^{n-p} = P_1'\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a^n}{1.2\ldots n}+aP_2'\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a^n}{1.2\ldots n} + \ldots + a^{p-1}P_p'\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a^n}{1.2\ldots n}$$

$$= e^a(P_1'+P_2'a+\ldots P_p'a^{p-1})$$

On trouve, de cette façon, pour le coefficient de $(-1)^p x^p$ dans le développement de $e^{-a}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$, le polynôme

$$a^{p+1}(P_1'+P_2'a+\ldots+P_p'a^{p-1})$$

Comme ce coefficient doit être identique à celui déja trouvé (4), il faut

$$P_1' = P_1, \quad P_2' = P_2, \quad \ldots \quad P_p' = P_p;$$

ce qui démontre le théorème.

Comme application du théorème, nous pouvons donner, par exemple, l'expression de $S_3(n)$ déduite du coefficient de x^3 dans le développement (3):

$$S_3(n) = (n+1)n(n-1)(n-2)\left[\frac{1}{4} + \frac{n-3}{6} + \frac{(n-3)(n-4)}{48}\right]$$

on bien

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{48} = \tfrac{1}{6}S_1{}^2(n)S_1(n-2)$$

III. Il est à remarquer que la somme

$$P_1 + P_2 + \dots + P_p$$

des coefficients qui figurent dans le polynôme (4) et dans l'expression de $S_p(n)$, a pour limite $\frac{1}{e}$ quand p croît indéfiniment. Pour le démontrer posons

$$P_1 + P_2 + \dots + P_p = B_p,$$

et dans le développement (3) faisons $a = 1$ et remplaçons x par $-x$. Nous avons

$$\frac{1}{e}(1-x)^{-\frac{1}{x}} = B_0 + B_1 x + \dots + B_p x^p + \dots$$

Multiplions les deux membres par $(1-x)$,

$$\frac{1}{e}(1-x)^{1-\frac{1}{x}} = B_0 + (B_1 - B_0)x + \dots + (B_p - B_{p-1})x^p + \dots$$

Lorsque x tend vers l'unité en croissant, le premier membre a pour limite $\frac{1}{e}$; la série du second membre doit donc rester convergente pour $x = 1$ et avoir pour somme $\frac{1}{e}$. Or, si l'on fait $x = 1$, la somme des p premiers termes du second membre est B_p; il faut donc que B_p aît pour limite $\frac{1}{e}$ pour p infini. Ce qui démontre la proposition. Ainsi l'on a

$$B_1 = \tfrac{1}{2},\quad B_2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{11}{24},\quad B_3 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{48} = \tfrac{21}{48},\quad \text{etc.}$$

nombres qui se rapprochent visiblement de $\frac{1}{e}$.

Dijon 6. Janvier 1880.

X.

Excentrischer Kugelsector.

Von

R. Hoppe.

Wird eine Kugel von 3 Ebenen geschnitten, die sich in einem innern Punkte schneiden, so teilt sich die Kugel in 8 excentrische dreiseitige Sectoren. Die Inhaltsberechnung eines solches Sectors hat zuerst Crelle gegeben, erklärtermassen aber nur als ein Beispiel, dass eine von Natur einfache Aufgabe der Lösung viele Verwickelungen und Umständlichkeiten entgegenstellen kann. Ich möchte umgekehrt der anscheinend gar nicht sehr einfachen Aufgabe, da sie 9 unabhängig gegebene Linienverhältnisse einführt, für sich als einer der allgemeinsten, der Anwendung in der Praxis nahe stehenden elementaren Körperberechnungen eine hinreichende Bedeutung zuschreiben, dass auch weitere Beschäftigung mit ihr von Interesse ist. Die folgende Lösung soll ein Versuch sein, einer wirklichen Bewältigung des Resultats und der Herleitung näher zu kommen, und die Anreihung zu weitern Versuchen der Vereinfachung geben.

Der Sector wird eingeschlossen von einem sphärischen Kreisbogendreieck ABC und 3 excentrischen Kreissectoren, seinen Seiten, jede Seite wieder durch einen Bogen eines nicht grössten Kreises und 2 Gerade, die Kanten des Kugelsectors, welche in dessen Spitze E zusammenlaufen. Zieht man durch E einen Kugeldurchmesser und legt 3 Ebenen durch ihn und einzeln durch A, B, C, so stellt sich S als algebraische Summe dreier excentrischer Kugelsectoren mit dem Durchmesser als gemeinsamer Kante dar, und zwar sind alle 3 positiv, oder 1 oder 2 negativ zu nehmen, jenachdem der Durchmesser

durch S selbst oder durch einen anstossenden oder Scheitelsector geht. Hiermit ist die Aufgabe auf die zurückgeführt, den Inhalt eines excentrischen Kugelsectors S_1 zu finden, dessen eine Kante ein Stück eines Durchmessers ist, der also nur eine beliebig gegebene Seite BEC hat, die beiden andern sind Sectoren grösster Kreise BED und CED. (Hierzu die Figur).

Als Element des Sectors S_1 betrachten wir den Keil zwischen den durch ED gelegten 2 Ebenen, welche mit der Ebene BED die Winkel φ und $\varphi + \partial\varphi$ bilden. Die Schnittfigur der erstern sei PED. Bekanntlich ist ein unendlich dünner Keil gleich dem Product aus dem statischen Moment einer Seite in Bezug auf die scharfe Kante und dem unendlich kleinen Flächenwinkel. Sei also MN die vom Bogen PD und von PE begrenzte variabele Parallele mit DE im Abstande r von DE; dann ist der Keil

$$\partial S_1 = \partial\varphi \int_0 MNr\,\partial r$$

Bezeichnet F den Mittelpunkt der Kugel, ψ den Winkel PFD, e die Strecke FE positiv nach D hin, und setzt man den Kugelradius $= 1$, so ist die obere Integralgrenze $r = \sin\psi$, und

$$MN = \sqrt{1 - r^2} - e - \frac{\cos\psi - e}{\sin\psi} r$$

daher nach Ausführung der ersten Integration:

$$\partial S_1 = \frac{\partial\varphi}{3}(1 - \cos\psi - \frac{e}{2}\sin^2\psi) \tag{1}$$

Die Gleichung der Seitenebene BEC sei

$$(x - e)\cos\alpha + (y\cos\beta + z\sin\beta)\sin\alpha = 0 \tag{2}$$

wo FD zur x Axe, FDB zur xy Ebene genommen ist. Der Punkt P liegt auf dieser, auf der Schnittebene

$$z = y\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

und auf der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ausserdem ist bekannt

$$x = \cos\psi$$

Eliminirt man zwischen diesen 4 Gleichungen x, y, z, so bleibt:

$$\cos(\varphi - \beta) = \frac{\cos\psi - e}{\sin\psi}\cot\alpha \tag{3}$$

Ferner sei H der Pol des Kugelschnitts BEC von ihm aus auf derselben Seite mit D. Da hiernach FH normal zur Ebene BEC ist, so muss ein Lot EG, auf der Ebene DFH errichtet, in die Ebene BEC fallen, also FG eine Seite des Kegels sein, welchen FP beschreibt, wenn P auf dem Bogen BC fortrückt, folglich ist

$$\text{Wkl. } HFP = HFG = \gamma$$

ausserdem erkennt man, da EG senkrecht auf EF, dass

$$\cos EFG = \frac{EF}{FG} = e$$

ist. Daher hat man in dem bei D rechtwinkligen sphärischen Dreieck GDH die Relation

$$\cos GH = \cos DG \cos DH \tag{4}$$

Der Centriwinkel zu DH ist aber der erste Richtungswinkel der Normale der Ebene (2), also $= \alpha$; demnach ist Gl. (4) zu schreiben:

$$\cos\gamma = e\cos\alpha \tag{5}$$

Nach Feststellung dieser Relation betrachten wir das sphärische Dreieck PDH, dessen Seiten

$$DH = \alpha, \quad HP = \gamma, \quad PD = \psi$$

sind, und dessen entsprechende Winkel sein mögen:

$$DPH = \mu, \quad HDP = \nu, \quad PHD = \chi$$

Dann hat man folgende Relationen:

$$\cos\psi = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos\chi \tag{6}$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\psi}{\sin\alpha\sin\psi} \tag{7}$$

$$\frac{\sin\nu}{\sin\gamma} = \frac{\sin\chi}{\sin\psi} \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\mu+\nu}{2}\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}} \tag{9}$$

Vermöge der Relation (5) lässt sich Gl. (3) schreiben:

$$\cos(\varphi-\beta) = \frac{\cos\alpha\cos\psi - \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\psi} = -\cos\gamma$$

woraus:

$$\partial\varphi = \pm\,\partial\nu$$

Differentiirt man Gl. (7) und (6), so kommt:

$$\partial\nu \sin\nu = \partial\psi \frac{\cos\gamma\cos\psi - \cos\alpha}{\sin\alpha\sin^2\psi}$$

$$\partial\psi\sin\psi = \partial\chi\sin\alpha\sin\gamma\sin\chi \tag{10}$$

Beides multiplicirt giebt, mit Anwendung von Gl. (8):

$$\pm\,\partial\varphi = \partial\nu = \partial\chi \frac{\cos\gamma\cos\psi - \cos\alpha}{\sin^2\psi} \tag{11}$$

Jetzt geht Gl. (1) über in

$$\begin{aligned}\partial S_1 &= \pm\tfrac{1}{3}\partial\chi\,(\cos\gamma\cos\psi - \cos\alpha)\left(\frac{1}{1+\cos\psi} - \frac{e}{2}\right)\\ &= \pm\tfrac{1}{3}\partial\chi\left(\frac{3 - e\cos\psi}{2}\cos\gamma - \frac{\cos\alpha + \cos\gamma}{1+\cos\psi}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

Nun ist nach Gl. (6)

$$\begin{aligned}1+\cos\psi &= 1+\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos\chi\\ &= 2\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos^2\frac{\chi}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin^2\frac{\chi}{2}\end{aligned}$$

das ist nach Gl. (9):

$$1+\cos\psi = \frac{2\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos^2\frac{\chi}{2}}{\sin^2\frac{\mu+\nu}{2}} \tag{13}$$

Aus derselben Gl. (9) erhält man durch Differentiation:

$$\frac{\partial\chi}{\sin\chi} = -\frac{\partial(\mu+\nu)}{\sin(\mu+\nu)}$$

daher nach Division durch Gl. (13):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\chi}{1+\cos\psi} &= -\frac{\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\operatorname{tg}\frac{\mu+\nu}{2}\,\partial(\mu+\nu)}{2\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{2}}\\ &= -\frac{\partial(\mu+\nu)}{2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}} = -\frac{\partial(\mu+\nu)}{\cos\alpha+\cos\gamma}\end{aligned} \tag{14}$$

Führt man dies im letzten, den Wert (6) im ersten Term von (12) ein, so kömmt:

$$\partial S_1 = \pm\tfrac{1}{3}\{\partial\chi\cos\gamma\left(\frac{3-\cos^2\gamma}{2}-\frac{e}{2}\sin\alpha\sin\gamma\cos\chi\right)+\partial(\mu+\nu)\}$$

Der untern und obern Integralgrenze entsprechend, wo P bzhw. in B und C fällt, seien χ, μ, ν durch 1 und 2 Accente unterschieden; dann wird

$$S_1 = \pm\tfrac{1}{3}\{\cos\gamma\left[\frac{3-\cos^2\gamma}{2}(\chi''-\chi')-\frac{e}{2}\sin\alpha\sin\gamma(\sin\chi''-\sin\chi')\right] \\ +\mu''-\mu'+\nu''-\nu'\} \tag{15}$$

Die χ haben ihren gemeinsameu Scheitel im Pole H, sind also gleich den von ihren Schenkeln HB, HC einerseits, HD andrerseits begrenzten Aequatorbogen, die wiederum zu den Bogen des Parallelkreises BC im Verhältniss $1:\sin\gamma$ stehen. Schneidet HD über D hinaus verlängert BC in K, so ist

$$\chi' = \frac{KB}{\sin\gamma}; \quad \chi'' = \frac{KC}{\sin\gamma}; \quad \chi''-\chi' = \frac{BC}{\sin\gamma} \tag{16}$$

Die ν haben ihren gemeinsamen Scheitel in D; ihre Differenz ist

$$\nu''-\nu' = BDC \tag{17}$$

Die μ sind Complemente eines innern und eines äussern Winkels des Dreiecks BDC, also jedenfalls

$$\pm(\mu''-\mu') = DBC+DCB-2\mathrm{R} \tag{18}$$

Die Vorzeichen bestimmen sich durch specielle Einführung. Für $e=0$, wo $\cos\gamma=0$, wird BC ein Normalbogen, und

$$S_1 = \tfrac{1}{3}(BDC+DBC+DCB-2\mathrm{R})$$

Hiermit sind die Vorzeichen von (17) und (18) entschieden, und man hat:

$$S_1 = \Big\{BDC+DBC+DCB-2\mathrm{R} \\ \pm\cos\gamma\left[\frac{3-\cos^2\gamma}{2\sin\gamma}BC-e\sin\alpha\sin\gamma\sin\frac{BC}{2\sin\gamma}\cos\frac{KL}{\sin\gamma}\right]\Big\}$$

wo L die Mitte des Bogens BC bezeichnet.

Ferner lassen wir D mit H zusammenfallen, dann verhält sich S_1 zu einem Kugelsegment wie Wkl. $BDC:4\mathrm{R}$, und man hat:

$$S_1 = \tfrac{1}{6}BDC(2-3\cos\gamma+\cos^3\gamma)$$

was mit unserm Ausdruck für unteres Zeichen stimmt.

Addirt man jetzt die 3 analogen Teilsectoren, so erhält man für den ganzen Sector $EABC$:

$$S = \tfrac{1}{3}(A + B + C - 2R) \tag{19}$$

$$-\tfrac{1}{3}\Sigma\cos\gamma\left(\frac{3-\cos^2\gamma}{2\sin\gamma}m - e\sin\alpha\sin\gamma\sin\frac{m}{2\sin\gamma}\cos\frac{l}{\sin\gamma}\right)$$

wo A, B, C die innern Winkel des Bogendreiecks, m eine Seite desselben, und l das Stück des Parallelkreises m zwischen der darauf sphärisch projicirten Centralprojection der Spitze und der Mitte des Bogens m bezeichnet; γ und α waren erklärt als die sphärischen Abstände des Bogens m und der Centralprojection der Spitze vom Pole des Bogens m.

Zum Schluss soll noch auf den Fall eines gleichseitigen Sectors Anwendung gemacht werden. Einen solchen erhält man, indem man α auf allen 3 Seiten gleich setzt und für β die Werte 0, $\tfrac{4}{3}$R, $\tfrac{8}{3}$R wählt. Die Gleichungen der Seitenebenen werden dann:

$$\left.\begin{array}{ll} (BEC) & (x-e)\cot\alpha + y = 0 \\ \left\{\begin{array}{c} CEA \\ AEB \end{array}\right\} & 2(x-e)\cot\alpha - y \pm z\sqrt{3} = 0 \end{array}\right\} \tag{20}$$

Je 2 derselben bestimmen mit der Kugelgleichung verbunden die Coordinaten einer Ecke A, B, C: für B, C findet man:

$$x = \frac{\varrho\sin\alpha + 4e\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}; \quad y = -\frac{\varrho - e\sin\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\cos\alpha \tag{21}$$

$$z = \pm\frac{\varrho - e\sin\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\sqrt{3}\cos\alpha$$

wo zur Abkürzung

$$\varrho^2 = 1 + (3-4e^2)\cos^2\alpha$$

gesetzt ist. Die Coordinaten des Poles H von BC sind:

$$x = \cos\alpha; \quad y = \sin\alpha; \quad z = 0.$$

Durch B, C einzeln, durch H und durch den Mittelpunkt legen wir die Ebenen

$$ax + by \pm cz = 0$$

dann ist

$$a = -\sin\alpha, \quad b = \cos\alpha, \quad c = \frac{1-e^2\cos^2\alpha + e\varrho\sin\alpha}{(1-e^2)\sqrt{3}\cos\alpha}$$

Sie bilden den Winkel BHC oder dessen Nebenwinkel; daher ist

$$\pm\cos BHC = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1-c^2}{1+c^2}$$

Da nun die Stellungen beider Ebenen symmetrisch zur xy Ebene bestimmt sind, so dass die eine bei einer Drehung längs BC bis zur andern in entgegengesetzter Stellung in die andere gelangt, so ist nur das untere Zeichen gültig, und man hat:

$$\operatorname{tg}\frac{BHC}{2} = \frac{1}{c} \quad \text{oder} \tag{22}$$

$$\operatorname{tg}\frac{m}{2\sin\gamma} = \frac{(1-e^2)\sqrt{3}\cos\alpha}{1-e^2\cos^2\alpha + e\varrho\sin\alpha}$$

woraus

$$\sin\frac{m}{2\sin\gamma} = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\gamma}\,\frac{\varrho - e\sin\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$$

Ferner ist einer der innern Bogendreieckswinkel zu berechnen, etwa BAC. Die x sind für A, B, C gemeinsam, also nach (21) bekannt; nach den gleichzeitig geltenden 2 letzten Gl. (20) ist für A

$$2(x-e)\cot\alpha = y; \quad z = 0$$

also

$$x = \frac{\varrho\sin\alpha + 4e\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}; \quad y = 2\,\frac{\varrho - e\sin\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\cos\alpha; \quad z = 0 \tag{23}$$

daher wird die Kugel in A berührt von der Ebene:

$$x(\varrho\sin\alpha + 4e\cos^2\alpha) + 2y(\varrho - e\sin\alpha)\cos\alpha = 1 + 3\cos^2\alpha \tag{24}$$

Diese schneidet die 2 Ebenen CEA und AEB in den Tangenten an AC und AB, den Schenkeln des gesuchten Winkels. Zur Vereinfachung verlegen wir die Ebenen in ihrer Stellung nach dem Mittelpunkt; dann haben wir in Vertretung der 3 Gleichungen (24) (20):

$$x(\varrho\sin\alpha + 4e\cos^2\alpha) + 2y(\varrho - e\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$
$$2x\cot\alpha - y \pm z\sqrt{3} = 0$$

Hieraus findet man als Durchschnittslinien:

$$\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \pm\frac{z}{c'}$$

$$a' = -2(\varrho - e\sin\alpha)\cos\alpha; \quad b' = \varrho\sin\alpha + 4e\cos^2\alpha; \quad c' = \varrho\,\frac{1+3\cos^2\alpha}{\sqrt{3}\sin\alpha}$$

Diese bilden den Winkel BAC, so dass

$$\cos BAC = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}$$

und da

$$a'^2 + b'^2 = (1+3\cos^2\alpha)^2$$

so folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{BAC}{2}=\frac{\varrho}{3\sin\alpha} \tag{25}$$

Endlich ist noch zu bemerken, dass, weil DH durch die Mitte von BC geht, $l=0$ oder $=2\mathrm{R}$ ist. Führt man die gefundenen Werte in Gl. (19) ein, wo die 3 Terme der Summe einander gleich sind, so erhält man:

$$S=2\operatorname{arctg}\frac{\varrho}{\sqrt{3}\sin\alpha}-\tfrac{2}{3}\mathrm{R}$$

$$-\cos\gamma(3-\cos^2\gamma)\operatorname{arctg}\frac{(1-e^2)\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin^2\gamma+e\varrho\sin\alpha}$$

$$+\frac{\varrho-e\sin\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\sqrt{3}\sin\alpha\cos^2\gamma \tag{26}$$

Für ein unendlich kleines m muss S in eine Pyramide von der Höhe $1-e$ übergehen, also

$$S=\frac{m^2(1-e)}{4\sqrt{3}} \tag{27}$$

werden. Hier differirt α unendlich wenig von 1 Rechten. Sei also $\alpha=\mathrm{R}-\varepsilon$; dann wird bis zu 2. Potenz von ε,

$$\operatorname{arctg}\frac{\varrho}{\sqrt{3}\sin\alpha}=\operatorname{arctg}\frac{1+2(1-e^2)\sin^2\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\mathrm{R}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^2)\sin^2\varepsilon$$

In den übrigen Teilen des Ausdrucks (26) braucht man nur die Hauptwerte

$$\sin\alpha=\sin\gamma=\varrho=1;\quad \cos\alpha=\sin\varepsilon;\quad \cos\gamma=e\sin\varepsilon$$

einzuführen. Nach Gl. (25) stehen aber m und $\sin\varepsilon$ in der Relation:

$$m=2\sqrt{3}\,(1-e)\sin\varepsilon$$

Demnach wird

$$S=m^2\frac{(1+e)-(3e)+(e^2)}{4\sqrt{3}\,(1-e)}$$

wo die 3 Teile des Ausdrucks (26) im Zähler noch in Klammern gesondert stehen. Es ist daraus zu ersehen, dass alle 3 Vorzeichen keine andern sein können um den richtigen Wert (27) zu ergeben. Folglich gilt Gl. (26) mindestens solange bis einer der 3 Teile verschwindet. Der erste verschwindet nie, der zweite, wenn α von R an abnimmt, erst bei $\alpha=-\mathrm{R}$, wo der Sector zur vollen Kugel wird, der dritte nur bei $\alpha=0$, wo nach (25) $BAC=2\mathrm{R}$ ist, also für convexe Dreiecke BAC nie.

Hiervon kann man auf die allgemeine Formel (19) Anwendung machen, indem man zur Beurteilung der Vorzeichen der 3 algebraischen Terme — die der übrigen sind bereits entschieden — vom gleichseitigen Sector ausgeht, hier K auf der bezüglichen Dreiecksseite nimmt und dann die Seitenebenen mit Vermeidung des Durchgangs durch $DH = 0$ stetig bis in die gegebene Lage verschiebt. Ist ein $DH = 0$ gegeben, so ist der betreffende Term null.

Geht der Sector durch Zusammenfallen zweier Seiten in einen zweiseitigen über, und man nimmt das willkürliche E in der Mitte der Sehne, so wird $A = B$, $C = 2R$, $l = 0$, die Summe hat nur 2 Glieder, sonst bleibt alles ungeändert.

Die angewandten Relationen sind auch ausreichend um die 9 Integrale zu berechnen, durch welche der Schwerpunkt, die Trägheitsmomente und die Hauptträgheitsaxen bestimmt werden. Diese enthalten ausser rationalen Functionen von $\sin\chi$, $\cos\chi$ nur die Kreisbogen ψ, χ und $\mu+\nu$, zwischen den angegebenen Grenzen, und zwar $\mu+\nu$ nur mit numerischen Coefficienten, so dass daraus wie im Ausdruck von S die Winkelsumme des Bogendreiecks ABC hervorgeht.

Was bei der Ausführung hinzukommt ist zunächst, dass man von dem Kreissectorschnitt MN auf dessen Element ∂x zurückgehen muss. Statt r kann man einfacher $\sin\psi'$ schreiben und ψ' von 0 bis ψ variiren lassen, so dass ψ nach Einsetzung der obern Grenze seinen bisherigen Wert hat. Die Grenzen der x sind dann, entsprechend den Punkten N und M:

$$e + \frac{\cos\psi - e}{\sin\psi}\sin\psi', \quad \cos\psi'$$

Die 2 ersten Integrationen, nach x und nach ψ' sind leicht zu vollziehen, und man findet, nach Reduction der Coordinaten des Elements

$$y = \sin\psi'\cos\varphi, \quad z = \sin\psi'\sin\varphi$$

folgende Ausdrücke: (28)

$$X = \int x\,\partial S_1 = \tfrac{1}{24}\int \partial\varphi \sin^2\psi(3 - e^2 - 2e\cos\psi)$$

$$Y = \int y\,\partial S_1 = \tfrac{1}{24}\int \partial\varphi\cos\varphi\{3\psi - \sin\psi(3\cos\psi + 2e\sin^2\psi)\}$$

$$Z = \int z\,\partial S_1 = \tfrac{1}{24}\int \partial\varphi\sin\varphi\{3\psi - \sin\psi(3\cos\psi + 2e\sin^2\psi)\}$$

$$X_1 = \int x^2\,\partial S_1 = \tfrac{1}{60}\int \partial\varphi\{4(1-\cos^3\psi) - e\sin^2\psi(e^2 + 2e\cos\psi + 3\cos^2\psi)\}$$

$$Y_1 = \int y^2 \partial S_1 = \tfrac{1}{60}\int \partial\varphi \cos^2\varphi \{8(1-\cos\psi) - \sin^2\psi(4\cos\psi + 3e\sin^2\psi)\}$$

$$Z_1 = \int z^2 \partial S_1 = \tfrac{1}{60}\int \partial\varphi \sin^2\varphi \{8(1-\cos\psi) - \sin^2\psi(4\cos\psi + 3e\sin^2\psi)\}$$

$$X_2 = \int yz \partial S_1 = \tfrac{1}{60}\int \partial\varphi \sin\varphi\cos\varphi \{8(1-\cos\psi) - \sin^2\psi(4\cos\psi + 3e\sin^2\psi)\}$$

$$Y_2 = \int zx \partial S_1 = \tfrac{1}{60}\int \partial\varphi \sin\varphi \sin^3\psi(4 - e^2 - 3e\cos\psi)$$

$$Z_2 = \int xy \partial S_1 = \tfrac{1}{60}\int \partial\varphi \cos\varphi \sin^3\psi(4 - e^2 - 3e\cos\psi)$$

wo φ von 0 bis Wkl. BDC variirt. Nur in Y und Z ist eine vorgängige partielle Integration nach φ notwendig; bei X_2, Y_2 würde eine solche ein Umweg sein. Man hat vielmehr jetzt $\partial\varphi \sin^2\psi$ nach Gl. (11) und $\partial\psi \sin\psi$ nach Gl. (10) durch $\partial\chi$ auszudrücken, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ gemäss der Relation

$$\varphi = \beta \pm \nu + 2\mathrm{R}$$

in β und ν aufzulösen, $\cos\nu$ und $\sin\nu$ nach Gl. (7) (8) in ψ und χ darzustellen. Hier tritt $1+\cos\psi$ in 1. und 2. Potenz als Nenner auf. Es sind zunächst alle $\cos\psi$ aus den Zählern durch algebraische Division zu entfernen. Alle Terme ohne diesen Nenner lassen sich nach Gl. (6) in χ darstellen und ergeben ausser χ keinen Arcus. Es bleiben dann nur die weitern Integrale:

$$\int \frac{\partial\chi}{1+\cos\psi}, \quad \int \frac{\partial\chi}{(1+\cos\psi)^2}, \quad \int \frac{\sin\chi\,\partial\chi}{(1+\cos\psi)^2}$$

Das letzte ist rational in $\cos\chi$, das erste bekannt durch Gl. (14); zur Reduction des zweiten auf das erste findet man durch Differentiation:

$$\partial \frac{\sin\alpha\sin\gamma\sin\chi}{1+\cos\psi} = \left\{ \frac{1+e\cos^2\alpha}{1+\cos\psi} - \frac{(1+e)^2\cos^2\alpha}{(1+\cos\psi)^2} \right\} \partial\chi$$

Es mag genügen, die Resultate der Form nach aufzustellen, sie sind:

$$X = A_1\chi + (A_2 + A_3\cos\chi)\sin\chi$$

$$Y = \tfrac{1}{3}\psi\sin\varphi + A_4\chi\cos\beta + (A_5 + A_6\cos\chi + A_7\cos^2\chi)\cos\beta\sin\chi \\ - (A_8 + A_9\cos\chi + A_{10}\cos^2\chi)\sin\beta\cos\chi$$

$$Z = -\tfrac{1}{3}\psi\cos\varphi + A_4\chi\sin\beta + (A_5 + A_6\cos\chi + A_7\cos^2\chi)\sin\beta\sin\chi \\ + (A_8 + A_9\cos\chi + A_{10}\cos^2\chi)\cos\beta\cos\chi$$

$$X_1 = \frac{\mu+\nu}{15} + A_{11}\chi + (A_{12} + A_{13}\cos\chi + A_{14}\cos^2\chi)\sin\chi$$

$$Y_1 = \frac{\mu+\nu}{15} + (A_{15}+A_{16})\chi + (A_{17}+A_{18}+A_{19}\cos\chi)\sin\chi$$
$$+ (A_{20}+A_{21}\cos\chi)\cos\chi + \frac{A_{22}+A_{23}\sin\chi}{1+\cos\psi}$$

$$Z_1 = \frac{\mu+\nu}{15} + (A_{15}-A_{16})\chi + (A_{17}-A_{18}-A_{19}\cos\chi)\sin\chi$$
$$-(A_{20}+A_{21}\cos\chi)\cos\chi - \frac{A_{22}+A_{23}\sin\chi}{1+\cos\psi}$$

$$X_2 = A_{24}\chi + A_{25}\sin\chi + A_{26}\cos\chi + \frac{A_{27}+A_{28}\sin\chi}{1+\cos\psi}$$

$$Y_2 = (A_{29}+A_{30}\cos\chi+A_{31}\cos^2\chi)\sin\beta\sin\chi$$
$$+ (A_{32}+A_{33}\cos\chi+A_{34}\cos^2\chi)\cos\beta\cos\chi$$

$$Z_2 = (A_{29}+A_{30}\cos\chi+A_{31}\cos^2\chi)\cos\beta\sin\chi$$
$$-(A_{32}+A_{33}\cos\chi+A_{34}\cos^2\chi)\sin\beta\cos\chi$$

Da hier die Integralgrenzen noch nicht eingesetzt sind, so lassen sich die constanten Coefficienten durch Differentiation und Identificirung mit den zu integrirenden Ausdrücken (28) bestimmen. Nach Einsetzung der Grenzen wird

$$\psi\sin\varphi = DC\,.\,\sin BDC$$
$$\psi\cos\varphi = DC\,.\,\cos BDC - DB$$
$$\chi = \frac{BC}{\sin\gamma}$$
$$\mu+\nu = BDC + DBC + DCB - 2R$$
$$\text{funct.}\,(\chi) = \text{funct.}\left(\frac{KC}{\sin\gamma}\right) - \text{funct.}\left(\frac{KB}{\sin\gamma}\right)$$

daher, wenn wie oben

$$m = BC; \quad l = \tfrac{1}{2}(KC+KB)$$

gesetzt wird,

$$\sin\chi = 2\sin\frac{m}{2\sin\gamma}\cos\frac{l}{\sin\gamma}$$

$$\sin\chi\cos\chi = \sin\frac{m}{\sin\gamma}\cos\frac{2l}{\sin\gamma}$$

$$\sin\chi\cos^2\chi = \tfrac{1}{2}\sin\frac{m}{2\sin\gamma}\cos\frac{l}{\sin\gamma} + \tfrac{1}{2}\sin\frac{3m}{2\sin\gamma}\cos\frac{3l}{\sin\gamma}$$

$$\cos\chi = -2\sin\frac{m}{2\sin\gamma}\sin\frac{l}{\sin\gamma}$$

$$\cos^2\chi = -\sin\frac{m}{\sin\gamma}\sin\frac{2l}{\sin\gamma}$$

$$\cos^3\chi = -\tfrac{3}{2}\sin\frac{m}{2\sin\gamma}\sin\frac{l}{\sin\gamma} - \sin\frac{3m}{2\sin\gamma}\sin\frac{3l}{\sin\gamma}$$

$$\frac{1}{1+\cos\psi} = \frac{\sin\alpha\sin\gamma\sin\frac{m}{2\sin\gamma}\sin\frac{l}{\sin\gamma}}{2\cos^2\frac{1}{2}DB\cos^2\frac{1}{2}DC}$$

$$\frac{\sin\chi}{1+\cos\psi} = \frac{\sin\alpha\sin\gamma\sin\frac{m}{\sin\gamma}\cos\frac{2l}{\sin\gamma}}{4\cos^2\frac{1}{2}DB\cos^2\frac{1}{2}DC}$$

Nach Einsetzung dieser Werte ist noch die Summe über die 3 Teilsectoren zu nehmen.

XI.

Relations entre les lignes trigonométriques des angles d'un triangle.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Objet de cette note.** Les relations, qui existent entre les lignes trigonométriques de trois angles, dont la somme est égale à deux angles droits, sont utiles à connaître. Ces formules, qui expriment chacune une propriété particulière du triangle, permettent souvent d'opérer de notables réductions dans les calculs, et prouvent toujours l'avantage d'employer les logarithmes dans certains cas de résolution des triangles.

Nous pensons donc qu'il n'est pas sans intérêt d'en fournir quelques-unes, qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été remarquées, et qui se prêtent aisément au calcul logarithmique.

2. **Formules usitées.** Soient A, B, C les trois angles d'un triangle quelconque, de sorte que

$$A+B+C=\pi.$$

Parmi les relations fréquemment employées, celles, qui se présentent le plus souvent, sont les suivantes:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \tag{I}$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C, \tag{II}$$

$$\operatorname{tang} A+\operatorname{tang} B+\operatorname{tang} C=\operatorname{tang} A\operatorname{tang} B\operatorname{tang} C, \tag{III}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}. \tag{IV}$$

Ces formules sont très faciles à établir.

3. **Fourmules qui dérivent des précédentes.** 1°. Nous avons

$$2\sin A = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

ou

$$2\sin A = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

retranchant cette égalité membre à membre de (I), il nous vient

$$\text{(V)} \qquad \sin B + \sin C - \sin A = 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

2°. Nous avons de même

$$2\sin 2A = 4\sin A\cos A = -4\sin A\cos(B+C),$$

ou

$$2\sin 2A = -4\sin A\cos B\cos C + 4\sin A\sin B\sin C;$$

de sorte qu'il nous vient aussi, en retranchant de (II),

$$\text{(VI)} \qquad \sin 2B + \sin 2C - \sin 2A = 4\cos B\cos C\sin A.$$

3°. La formule (III) peut s'écrire

$$\operatorname{tang} A + \frac{1}{\operatorname{cotg} B} + \frac{1}{\operatorname{cotg} C} = \frac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{cotg} B\operatorname{cotg} C},$$

et devient, par l'évanouissement des dénominateurs,

$$\operatorname{tang} A\operatorname{cotg} B\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B = \operatorname{tang} A.$$

On en tire la relation

$$\text{(VII)} \qquad \operatorname{tang} A - \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C = \operatorname{tang} A\operatorname{cotg} B\operatorname{cotg} C.$$

4°. Par un procédé analogue, la formule (IV) se ramène à la suivante

$$\text{(VIII)} \quad \operatorname{cotg}\frac{A}{2} - \operatorname{tang}\frac{B}{2} - \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Ces relations se trouvent consignées, sauf les deux dernières, dans la Trigonométrie de Frédéric **Prosz**, Professeur à l'Ecole Polytechnique (Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie von F. Prosz; Stuttgard, bei Paul Neff, 1840; page 41 et suivantes).

On peut consulter cet ouvrage avec fruit pour d'autres identités, qui ont de fréquentes applications.

4. Nouvelles Formules de réduction. Puisque

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C} = \frac{2 \sin A \cos A \,.\, \cos B \cos C}{\sin B \cos C + \sin C \cos C} = \frac{\sin A \,.\, 2 \cos A \cos B \cos C}{\sin(B+C)},$$

et que

$$\sin A = \sin(B+C),$$

notre fraction se réduit à

$$2 \cos A \cos B \cos C.$$

Ce dernier produit ne change pas par la permutation circulaire des trois angles A, B et C; par conséquent nous avons les relations

$$\text{(IX)} \quad \frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C} = \frac{\sin 2B}{\operatorname{tang} C + \operatorname{tang} A} = \frac{\sin 2C}{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B} = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

L'égalité des ces trois premiers rapports (IX) se trouve établie par M. **Brocard**, dans la Nouvelle Correspondance mathématique de M. Catalan, septembre 1879, page 324.

Comme on a

$$\frac{\sin 2A}{1 - \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C} = \frac{2 \cos A \sin A \sin B \sin C}{\sin B \sin C - \cos B \cos C} = \frac{2 \cos A \sin A \sin B \sin C}{-\cos(B+C)},$$

et que

$$\cos A = -\cos(B+C),$$

nous obtenons aussi les relations

$$\text{(X)} \quad \frac{\sin 2A}{1 - \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C} = \frac{\sin 2B}{1 - \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A} = \frac{\sin 2C}{1 - \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B} = 2 \sin A \sin B \sin C.$$

5. Autres Formules de réduction. Les égalités (IX) et (X) conduisent à deux autres non moins importantes, qui s'en déduisent immédiatement.

Puisque la somme des trois angles

$$\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

est

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{A+B+C}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi,$$

ou égale à deux angles droits, nous pouvons remplacer, dans les formules (IX) et (X), les angles A, B, C respectivement par les compléments de leurs moitiés.

Nous obtenons ainsi les deux nouvelles formules

$$\text{(XI)}\quad \frac{\sin A}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=\frac{\sin B}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}$$
$$=\frac{\sin C}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\text{(XII)}\quad \frac{\sin A}{1-\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}}=\frac{\sin B}{1-\operatorname{tang}\frac{C}{2}\operatorname{tang}\frac{A}{2}}$$
$$=\frac{\sin C}{1-\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

6. **Formules déduites des quatre précédentes.** Divisons les égalités (X) et (XI) respectivement par (IX) et XII). Nous trouvons les relations

$$\text{(XIII)}\quad \frac{\operatorname{tang}B+\operatorname{tang}C}{1-\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C}=\frac{\operatorname{tang}C+\operatorname{tang}A}{1-\operatorname{cotg}C\operatorname{cotg}A}$$
$$=\frac{\operatorname{tang}A+\operatorname{tang}B}{1-\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B}=\operatorname{tang}A\operatorname{tang}B\operatorname{tang}C,$$

$$\text{(XIV)}\quad \frac{1-\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=\frac{1-\operatorname{tang}\frac{C}{2}\operatorname{tang}\frac{A}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}$$
$$=\frac{1-\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}=\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

7. Nous avons obtenu les formules (XI) et (XII) au moyen des formules (IX) et (X), par une simple substitution d'angles. En général:

Théorème. Dans toute relation, qui a lieu entre les trois angles A, B, C d'un triangle, on peut remplacer ces angles 1° par les compléments de leurs moitiés; 2° par les suppléments de leurs doubles.

En effet, puisque

$$A+B+C=\pi,$$

on a aussi 1⁰

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}-\frac{A+B+C}{2}=\pi;$$

et 2⁰

$$(\pi-2A)+(\pi-2B)+(\pi-2C)=3\pi-2(A+B+C)=\pi.$$

Ainsi la formule

$$\text{(I)}\qquad \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

fournit immédiatement les deux suivantes

$$\text{(XV)}\qquad \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right).$$

$$\text{(II)}\qquad \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

De même la relation

$$\text{(III)}\qquad \operatorname{tang} A+\operatorname{tang} B+\operatorname{tang} C=\operatorname{tang} A\operatorname{tang} B\operatorname{tang} C$$

conduit aux suivantes

$$\text{(IV)}\qquad \operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

$$\text{(XVI)}\qquad \operatorname{tang} 2A+\operatorname{tang} 2B+\operatorname{tang} 2C=\operatorname{tang} 2A\operatorname{tang} 2B\operatorname{tang} 2C.$$

Enfin l'égalité

$$\text{(IX)}\qquad \frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} B+\operatorname{tang} C}=2\cos A\cos B\cos C$$

donne les deux formules

$$\text{(XI)}\qquad \frac{\sin A}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\text{(XVII)}\qquad \frac{\sin 4A}{\operatorname{tang} 2B+\operatorname{tang} 2C}=-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$$

8⁰. Dans la formule (II), remplaçons encore les trois angles A, B, C par les suppléments

$$\pi-2A,\quad \pi-2B,\quad \pi-2C$$

de leurs doubles; elle devient

$$\text{(XVIII)}\qquad \sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$$

Si nous faisons la même substitution dans les relations (XVI) et (XVII), nous obtiendrons encore les formules

$$\text{(XIX)}\qquad \operatorname{tang} 4A+\operatorname{tang} 4B+\operatorname{tang} 4C=\operatorname{tang} 4A\operatorname{tang} 4B\operatorname{tang} 4C,$$

$$\text{(XX)}\qquad \frac{\sin 8A}{\operatorname{tang} 4B+\operatorname{tang} 4C}=-2\cos 4A\cos 4B\cos 4C.$$

XII.

Extension du théorème d'Hippocrate et Détermination du centre de gravité de ses lunules.

Par

Georges Dostor.

---

1. Les lunules d'Hippocrate sont les deux croissants, qui sont compris entre le demi-cercle décrit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangles comme diamètre et les deux demi-cercles tracés, extérieurement sur les deux côtés de l'angle droit, pris aussi comme diamètre.

2. **Théorème d'Hippocrate.** Sur les trois côtés

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$$

d'un triangle ABC, rectangle en A (Fig. 1.), on construit trois cercles ayant ces côtés pour diamètres. Les circonférences de ces cercles comprennent entre elles les deux lunules $AMCmA$, $ANBn'A$ le segment biconvexe $AnDm'$ et le triangle curviligne $BLClDl'B$.

Le géomètre de Chio a trouvé que la somme des deux lunules est équivalente au triangle rectangle, et nous allons prouver que la différence entre le triangle curviligne et le segment biconvexe est aussi équivalente au même triangle rectangle.

Pour démontrer le théorème d'Hippocrate, nous ferons remarquer que la somme de ses deux lunules, augmentée du demi-cercle supé-

rieur décrit sur l'hypoténnse, forme la même surface que le triangle, augmenté des deux demi-cercles décrits, en-dehors, sur les deux côtés de l'angle droit. Nous pouvons ainsi écrire l'égalité

$$AMCmA + ANBn'A + \tfrac{1}{8}\pi a^2 = ABC + \tfrac{1}{8}\pi b^2 + \tfrac{1}{8}\pi c^2.$$

Puisque $a^2 = b^2 + c^2$, il reste

$$\text{(I)} \qquad AMCmA + ANBn'A = ABC = \tfrac{1}{2}bc,$$

ce qui établit la proposition.

3. **Théorème analogue à celui d'Hippocrate.** L'inspection de la figure suffit, pour faire voir que la surface, remplie par la triangle ABC et le demi-cercle extérieur $BLCB$ construit sur l'hypoténuse, contient la somme des demi-cercles intérieurs $AnDlCA$, $Am'Dl'BA$ construits sur les deux côtés de l'angle droit, diminuée du segment biconvexe $AnDm'A$ et augmentée du triangle curviligne $BLClDl'B$. Nous avons par suite l'égalité

$$\tfrac{1}{8}\pi b^2 + \tfrac{1}{8}\pi c^2 - AnDm'A + BLClDl'B = ABC + \tfrac{1}{8}\pi a^2,$$

qui donne

$$\text{(II)} \qquad BLClDl'B - AnDm'A = ABC = \tfrac{1}{2}bc.$$

4. **Corollaire.** Les relations (I) et (II) nous donnent

$$\text{(III)} \qquad BLClDl'B = AMCmA + ANBn'A + AnDm'A.$$

Ainsi le triangle curviligne est équivalent à la somme des deux lunules, augmentée du segment biconvexe.

5. **Remarque.** Nous avons le demi-cercle supérieur construit sur l'hypoténuse

$$\tfrac{1}{8}\pi a^2 = ABC + AMCA + ANBA,$$

et la somme des demi-cercles inférieurs construits sur les deux côtés de l'angle droit

$$\tfrac{1}{8}\pi b^2 + \tfrac{1}{8}\pi c^2 = ABC + AnDm'A + ClDC + Bl'DB.$$

Les premiers membres étant égaux, il résulte de ces deux égalités que

$$\text{(IV)} \qquad AMCA + ANBA = AnDm'A + ClDC + Bl'DB.$$

6. **Distances des centres de gravité des trois demi-cercles supérieurs et du triangle rectangle à l'hypoténuse de ce dernier.** Représentons ces distances par α, β, γ et δ.

Par les milieux O, E, E' des trois côtés BC, CA, AB du triangle ABC (Fig. 2.), élevons les perpendiculaires Oo, EG, $E'G'$;

celles-ci contiennent les centres de gravité des trois demi-cercles, construits sur l'hypotenuse a et les deux côtés d'angle droit b et c; et, si les points o, G, G' sont ces centres de gravité, nous aurons

$$(1) \qquad Oo = \frac{2a}{3\pi}, \quad EG = \frac{2b}{3\pi}, \quad E'G' = \frac{2c}{3\pi},$$

car la distance Oo, par exemple est les deux tiers de la quatrième proportionnelle z à l'arc $BAC = \frac{1}{2}\pi a$, à la corde $BC = a$ et au rayon $OB = \frac{a}{2}$; de sorte que l'on a

$$\tfrac{1}{2}\pi a : a = \frac{a}{2} : z,$$

ou bien

$$z = \frac{a}{\pi} \quad \text{d'où} \quad Oo = \frac{2a}{3\pi}.$$

Puisque $\alpha = Oo$, nous aurons

$$(2) \qquad \alpha = \frac{2a}{3\pi}.$$

Pour avoir les expressions de β et γ des points G et G' abaissons sur l'hypoténuse BC les perpendiculaires GH, $G'H'$, qui coupent la droite EE' en I et I'. Du sommet A menons aussi à BC la perpendiculaire AD, qui coupe EE' en F. Nous avons

$$GH = IH + GI;$$

or

$$IH = DF = \tfrac{1}{2}AD = \frac{bc}{2a},$$

attendu que la double surface du triangle ABC a pour mesure à la fois bc et $a.AD$; de plus le triangle rectangle EGI, semblable à ABD, donne

$$\frac{GI}{AD} = \frac{GE}{AB};$$

et comme

$$AD = \frac{bc}{a}, \quad GE = \frac{2b}{3\pi}, \quad AB = c,$$

il vient

$$GI = \left(\frac{2b}{3\pi} \cdot \frac{bc}{a}\right) : c = \frac{2b^2c}{3\pi a} : c = \frac{2b^2}{3\pi a}.$$

Nous trouvons donc que GH ou

$$(3) \qquad \beta = \frac{bc}{2a} + \frac{2b^2}{3\pi a}.$$

On verrait de même que

$$(4) \qquad \gamma = \frac{bc}{2a} + \frac{2c^2}{3\pi a}.$$

D'ailleurs le centre de gravité g du triangle ABC est situé, au-dessus de la base BC, à une distance, qui est le tiers de la hauteur AD ou de $\frac{bc}{a}$ nous avons ainsi

$$(5) \qquad \delta = \frac{bc}{3a}.$$

Si nous rassemblons les valeurs (2), (3), (4) et (5), nous verrons que les distances cherchées sont

$$(\mathrm{V}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \frac{2a}{3\pi}, & \beta = \frac{bc}{2a} + \frac{2b^2}{3\pi a}, \\ \delta = \frac{bc}{3a}, & \gamma = \frac{bc}{2a} + \frac{2c^2}{3\pi a}. \end{array} \right.$$

7. **Distance du centre de gravité des lunules à l'hypoténuse du triangle rectangle.** Désignons cette distance par y. La surface $\frac{bc}{2}$ des lunules est égale à celle du triangle, augmentée de la surface des deux petits demi-cercles et diminuée de la surface du grand demi-cercle. Prenons les moments de ces surfaces par rapport à l'hypoténuse BC; nous obtenons l'équation

$$\tfrac{1}{2}bcy = \tfrac{1}{2}bc.\delta + \tfrac{1}{8}\pi b^2.\beta + \tfrac{1}{8}\pi c^2.\gamma - \tfrac{1}{8}\pi a^2.\alpha,$$

ou

$$4bcy = 4bc.\delta + \pi b^2.\beta + \pi c^2.\gamma - \pi a^2.\alpha.$$

Remplaçons δ, β, γ et α par leurs valeurs respectifs (V); il nous vient l'égalité

$$4bcy = \frac{4b^2c^2}{3a} + \frac{\pi b^3 c}{2a} + \frac{2b^4}{3a} + \frac{\pi bc^3}{2a} + \frac{2c^4}{3a} - \frac{2a^3}{3},$$

qui revient à

$$4bcy = \frac{2}{3a}(2b^2c^2 + b^4 + c^4 - a^4) + \frac{\pi bc}{2a}(b^2 + c^2).$$

Mais, puisque $b^2 + c^2 = a^2$, le facteur de $\frac{2}{3a}$ se réduit à zéro, pendant que le terme $\frac{\pi bc}{2a}(b^2+c^2)$ revient à $\frac{1}{2}\pi abc$. Notre égalité se change donc en

$$4bcy = \tfrac{1}{2}\pi abc,$$

et donne

(VI) $$y = \tfrac{1}{8}\pi a.$$

Ainsi la distance du centre de gravité des lunules à l'hypoténuse du triangle rectangle est indépendante des deux côtés b et c, et ne varie qu'avec cette hypoténuse a; elle est égale au quart de la demi-circonférence $\frac{1}{2}\pi a$ décrite sur l'hypoténuse comme diamètre.

8. **Volume engendré par la révolution des deux lunules autour de l'hypoténuse du triangle rectangle.** Ce volume V_a a pour mesure la surface génératrice $\frac{1}{2}bc$, multipliée par la circonférence $2\pi y = \frac{1}{4}\pi^2 a$, que décrit son centre de gravité. Nous avons donc

$$V_a = \tfrac{1}{2}bc \,.\, \tfrac{1}{4}\pi^2 a,$$

ou

(VII) $$V_a = \tfrac{1}{8}\pi^2 abc.$$

Ce volume est celui qu'engendre une ellipse, dont les deux axes sont $\frac{b}{2}$ et $\frac{c}{2}$, en tournant autour d'une droite, menée à une distance a du centre de l'ellipse.

Car la surface de cette ellipse est $\pi\frac{b}{4}\cdot\frac{c}{4} = \frac{1}{16}\pi bc$, et la circonférence décrite par son centre est $2\pi a$.

9. **Distances des centres de gravité des trois demi-cercles supérieurs et du triangle rectangle, à la perpendiculaire AD, menée du sommet A sur l'hypoténuse.** Représentons ces distances respectives par α', β', γ', δ'.

Nous avons d'abord (Fig. 2)

$$\alpha' = OD = OB - BD = \frac{a}{2} - \frac{c^2}{a},$$

ou

(6) $$\alpha' = \frac{a^2 - 2c^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{2a};$$

puis

$$\delta' = \tfrac{2}{3}OD = \tfrac{2}{3}\alpha',$$

ou

(7) $$\delta' = \frac{b^2 - c^3}{3a}.$$

Nous voyons ensuite que

$$\beta' = IF = EF + EI = \tfrac{1}{2}CD + EG\cos GEI;$$

mais il est aisé de voir que

$$CD = \frac{b^2}{a}, \quad \cos GEI = \cos B = \frac{c}{a};$$

nous savons d'ailleurs que $EG = \frac{2b}{3\pi}$; il nous vient donc

$$\beta' = \frac{b^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}. \tag{8}$$

Nous trouverions de même que

$$\gamma' = \frac{c^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}. \tag{9}$$

Si nous réunissons les valeurs (6), (7), (8) et (9), nous verrons que les distances cherchées sont

$$\text{(VIII)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha' = \frac{b^2 - c^2}{2a}, & \beta' = \frac{b^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}, \\ \delta' = \frac{b^2 - c^2}{3a}, & \gamma' = \frac{c^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}. \end{array} \right.$$

10. **Distance du centre de gravité des lunules à la perpendiculaire abaissé, dans le triangle rectangle, du sommet de l'angle droit sur l'hypténuse.** Supposons que le côté CA ou b soit plus grand que l'autre côté AB ou c. Il est évident que, dans ce cas, le centre de gravité des lunules et les centres de gravité o, g et G seront situées d'un même côté de AD et que le centre de gravité G' sera situé du côté opposé. Désignons par x la distance du centre de gravité des lunules à la perpendicu-laire AD.

Si nous prenons les moments par rapport à cette droite, nous formerons l'équation

$$\tfrac{1}{2}bc.x = \tfrac{1}{2}bc.\delta' + \tfrac{1}{8}\pi b^2.\beta' - \tfrac{1}{8}\pi c^2.\gamma' - \tfrac{1}{8}\pi a^2.\alpha',$$

ou

$$4bcx = 4bc.\delta' + \pi b^2.\beta' - \pi c^2.\gamma' - \pi a^2.\alpha'.$$

Substituons à δ', β', γ' et α' leurs valeurs respectives (VIII); il nous vient l'égalité

$$4bcx = 4bc.\frac{b^2 - c^2}{3a} + \pi b^2\left(\frac{b^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}\right) - \pi c^2\left(\frac{c^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}\right) - \pi a^2.\frac{b^2 - c^2}{2a},$$

qui revient à

$$4bcx = \frac{2}{3a}(2b^3c - 2bc^3 + b^3c - bc^3) + \frac{\pi}{2a}(b^4 - c^4 - a^2b^2 + a^2c^2).$$

Or le multiplicateur de $\frac{2}{3a}$ est égal à $3bc(b^2 - c^2)$, pendant que celui de $\frac{\pi}{2a}$ s'évanouit en vertu de l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$; notre égalité se réduit donc à

$$4bcx = \frac{6bc}{3a}(b^2 - c^2),$$

et donne

$$\text{(IX)} \qquad x = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

Cette valeur est facile à interprêter. L'inspection du triangle ABC fait voir, en effet, que

$$\frac{b^2}{a} = \frac{\overline{AC}^2}{BC} = CD, \quad \frac{\overline{AB}^2}{BC} = BD;$$

il s'ensuit que

$$x = \frac{CD - BD}{2} = \frac{(CO + OD) - (BO - OD)}{2} = OD.$$

Nous en concluons que le centre de gravité des lunules est situé sur la perpendiculaire élevée, par son milieu, sur l'hypoténuse du triangle.

11. Si nous rapprochons ensemble les coordonnées

$$\text{(X)} \qquad x = DO, \quad y = \tfrac{1}{8}\pi a$$

du centre de gravité des lunules, nous verrons que la position du centre de gravité est indépendante des deux côtés b et c; elle ne varie qu' avec l'hypoténuse a. Ce centre de gravité reste fixe, lorsque le sommet A de l'angle droit se déplace sur sa demi-circonférence décrite sur l'hypoténuse comme diamètre.

12. **Volumes engendrés par la révolution des lunules autour des tangentes extrêmes, menées aux deux petits demi-cercles perpendiculairement à l'hypoténuse.**

Aux demi-cercles décrits sur les diamètres AC et AB menons les tangentes PQ et $P'Q'$ perpendiculairement à l'hypoténuse BC (Fig. 2.), et représentons par u et u' les distances OQ et OQ'.

Nous avons évidemment

$$u = OQ = FK - OD, \quad u' = OQ' = FK' + OD;$$

mais

$$FK = EK + EF = \frac{b}{2} + \frac{b^2}{2a},$$

$$FK' = E'K' + E'F = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2a};$$

d'ailleurs nous avons trouvé que

$$OD = \frac{b^2}{2a} - \frac{c^2}{2a};$$

il vient par suite

$$u = \frac{b}{2} + \frac{b^2}{2a} - \left(\frac{b^2}{2a} - \frac{c^2}{2a}\right),$$

$$u' = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2a} + \left(\frac{b^2}{2a} - \frac{c^2}{2a}\right)$$

ou

$$u = \frac{b}{2} + \frac{c^2}{2a}, \quad u' = \frac{c}{2} + \frac{b^2}{2a}.$$

Les volumes engendrés par les lunules, en tournant autour des tangentes PQ et $P'Q'$, sont donc

$$V = \tfrac{1}{2}bc.2\pi u = \pi bcu = \tfrac{1}{2}\pi bc\left(b + \frac{c^2}{a}\right),$$

$$V' = \tfrac{1}{2}bc.2\pi u' = \pi bcu' = \tfrac{1}{2}\pi bc\left(c + \frac{b^2}{a}\right),$$

ou

(XI) $$V = \frac{\pi bc(ab + c^2)}{2}, \quad V' = \frac{\pi bc(ac + b^2)}{2}.$$

La somme de ces volumes est

(XII) $$V + V' = \tfrac{1}{2}\pi bc(a + b + c),$$

et ces mêmes volumes ont pour différence

(XIII) $$V' - V = \frac{\pi bc(b - c)(b + c - a)}{2a}.$$

13. Distances des centres de gravité des trois demi-cercles inférieurs et du triangle rectangle à l'hypoténuse de ce dernier. Désignons ces distances par α_1, β_1, γ_1 et δ_1.

Si nous nous reportons aux calculs du n⁰ 6 et que nous fassions usage des mêmes notations, nous verrons de suite (Fig. 3.) que

$$Oo = \alpha_1 = \frac{2a}{3\pi},$$

$$GH = IH - IG = \frac{bc}{2a} - \frac{2b^2}{3\pi a},$$

$$G'H' = I'H' - I'G' = \frac{bc}{2a} - \frac{2c^2}{3\pi a}, \quad \text{etc.}$$

Les distances demandées sont donc

$$\text{(XIV)} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2a}{3\pi}, & \beta_1 = \dfrac{bc}{2a} - \dfrac{2b^2}{3\pi a}, \\ \delta_1 = \dfrac{bc}{3a}, & \gamma_1 = \dfrac{bc}{2a} - \dfrac{2c^2}{3\pi a}. \end{cases}$$

14. Distance du centre de gravité de l'excès du triangle curviligne sur le segment biconvexe, à l'hypoténuse du triangle rectangle. Représentons cette distance par y_1. La surface S de notre différence est égale à celle du triangle, augmentée de la surface du grand demi-cercle et diminuée de la surface des deux petits demi-cercles, c'est-à-dire que

$$S = \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{8}\pi a^2 - \tfrac{1}{8}\pi b^2 - \tfrac{1}{8}\pi c^2.$$

Prenons les moments de ces surfaces par rapport à l'hypoténuse BC.

Remarquons que le centre de gravité de $\frac{1}{8}\pi a^2$ est situé au-dessons de BC, tandisque les points g, G et G' sont placés au-dessus de cette hypoténuse; par conséquent α_1 devra être pris avec le signe $-$, et β_1, γ_1, δ_1 avec le signe $+$.

Nous obtenons par conséquent l'équation

$$\tfrac{1}{2}bcy_1 = \tfrac{1}{2}bc\delta_1 - \tfrac{1}{8}\pi a^2\alpha_1 - \tfrac{1}{8}\pi b^2\beta_1 - \tfrac{1}{8}\pi c^2\gamma_1,$$

ou

$$4bcy_1 = 4bc\delta_1 - \pi a^2\alpha_1 - \pi b^2\beta_1 - \pi c^2\gamma_1.$$

Mettons à la place de δ_1, α_1, β_1 et γ_1 leurs valeurs respectives (XIV); il nous vient l'égalité

$$4bcy_1 = \frac{4b^2c^2}{3a} - \frac{2a^3}{3} - \frac{\pi b^3c}{2a} + \frac{2b^4}{3a} - \frac{\pi bc^3}{2a} + \frac{2c^4}{3a}.$$

que l'on peut écrire

$$4bcy_1 = \frac{2}{3a}(2b^2c^2 - a^4 + b^4 + c^4) - \frac{\pi bc}{2a}(b^2 + c^2).$$

Le facteur de $\dfrac{2}{3a}$ est nul en vertu de l'égalité $b^2 + c^2 = a^2$. Il reste donc l'équation

$$4bcy_1 = -\frac{\pi bc}{2a}(b^2+c^2) = -\tfrac{1}{2}\pi abc,$$

qui donne

(XV) $$y_1 = -\tfrac{1}{8}\pi a.$$

Ainsi le centre de gravité de la différence entre le triangle curviligne et le segment biconvexe est à la même distance de l'hyoténuse que celui de la somme des lunules, mais il est placé au-dessous de l'hypoténuse, tandis que le premier est situé au-dessus de ce côté.

15. **Distances des centres de gravité des trois demi-cercles inférieurs et du triangle rectangle à la perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.** Désignons ces distances par α_1', β_1', γ_1' et δ_1'.

Il est évident que (nº 9)

$$\alpha_1' = \alpha', \quad \delta_1' = \delta'.$$

D'ailleurs nous avons (Fig. 3.)

$$\beta_1' = IE = EF - EI = \tfrac{1}{2}CD - EG\cos B,$$

ou

$$\beta_1' = \frac{b^2}{2a} - \frac{2bc}{3\pi a}.$$

On a donc, pour les distances cherchées,

(XVI) $$\begin{cases} \alpha_1' = \dfrac{b^2-c^2}{2a}, & \beta_1' = \dfrac{b^2}{2a} - \dfrac{2bc}{3\pi a}, \\[2ex] \delta_1' = \dfrac{b^2-c^2}{3a}, & \gamma_1' = \dfrac{c^2}{2a} - \dfrac{2bc}{3\pi a}. \end{cases}$$

16. **Distance du centre de gravité de l'excès du triangle curviligne sur le segment biconvexe à la hauteur du triangle rectangle.** Nous avons

$$S = \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{8}\pi a^2 - \tfrac{1}{8}\pi b^2 - \tfrac{1}{8}\pi c^2.$$

Prenons les moments de ces surfaces par rapport à la hauteur AD. Si nous désignons par x_1 la distance du centre de gravité de S à AD, nous aurons l'équation

$$\tfrac{1}{2}bcx_1 = \tfrac{1}{2}bc\delta_1' + \tfrac{1}{8}\pi a^2\alpha_1' - \tfrac{1}{8}\pi b^2\beta_1' + \tfrac{1}{8}\pi c^2\gamma_1',$$

ou

$$4bcx_1 = 4bc\delta_1' + \pi a^2\alpha_1' - \pi b^2\beta_1' + \pi c^2\gamma_1'.$$

Remplaçons les distances δ_1', α_1', β_1' et γ_1' par leur valeurs (XVI); il nous vient l'égalité

$$4bcx_1 = 4bc.\frac{b^2-c^2}{3a} + \pi a^2.\frac{b^2-c^2}{2a}$$
$$- \pi b^2\left(\frac{b^2}{2a} - \frac{2bc}{2\pi a}\right) + \pi c^2\left(\frac{c^2}{2a} - \frac{2bc}{3\pi a}\right),$$

qui peut s'écrire

$$4bcx_1 = \frac{2}{3a}(2b^3c - 2bc^3 + b^3c - bc^3) + \frac{\pi}{2a}(a^2b^2 - a^2c^2 - b^4 + c^4).$$

Le multiplicateur de $\frac{2}{3a}$ est égal à $3bc(b^2-c^2)$, et celui de $\frac{\pi}{2a}$, pouvant s'écrire $a^2(b^2-c^2) - (b^2+c^2)(b^2-c^2)$, est égal à zéro; par suite notre égalité se réduit à

$$4bcx_1 = \frac{6bc}{3a}(b^2-c^2),$$

et donne

$$\text{(XVII)} \qquad x_1 = \frac{b^2-c^2}{2a}.$$

Nous voyons ainsi que

Le centre de gravité de la différence entre le triangle curviligne et le segment biconvexe est le point symétrique, par rapport à l'hypoténuse, du centre de gravité de la somme des deux lunules.

Ces deux centres de gravité sont situés sur la perpendiculaire élevée par le milieu de l'hypoténuse, de part et d'autre de cette hypoténuse, à une distance égale au huitième de la circonférence, qui a cette même hypoténuse pour diamètre.

XIII.

Détermination algébrique très simple du centre de gravité du trapèze, et du centre de gravité du tronc de pyramide à base quelconque.

Par

Georges Dostor.

---

1. Centre de gravité du trapèze. Soient A et a les centres de gravité ou les milieux des deux bases B et b du trapèze; la droite Aa passera par le sommet S (Fig. 4.) des deux triangles, dont le trapèze est la différence.

Si nous prenons

$$AG = \tfrac{1}{3}SA, \quad ag = \tfrac{1}{3}Sa,$$

les points G et g seront les centres de gravité de nos deux triangles.

Posons $SA = A$, $Sa = a$, et soit O le centre de gravité du trapèze.

Faisons, pour simplifier $OA = x$, $Oa = y$; et désignons par S et s les surfaces des deux triangles, de sorte que $S - s$ sera celle de notre trapèze.

Nous devons avoir

$$\frac{Og}{S} = \frac{OG}{s} = \frac{Gg}{S - s},$$

ou

$$\frac{Og}{A^2} = \frac{OG}{a^2} = \frac{Gg}{A^2 - a^2}, \tag{1}$$

attendu que les surfaces des deux triangles, qui sont semblables, sont proportionnelles aux carrés des distances SA et Sa.

Mais on peut voir facilement que

$$\begin{aligned} Og &= Oa + ag &&= y + \tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{3}(3y+a), \\ OG &= AG - OA &&= \tfrac{1}{3}A - x = \tfrac{1}{3}(A-3x), \\ Gg &= SG - Sg &&= \tfrac{2}{3}A - \tfrac{2}{3}a = \tfrac{2}{3}(A-a). \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans (1) et multipliant par 3, il nous vient les équations

$$\frac{3y+a}{A^2} = \frac{A-3x}{a^2} = \frac{2(A-a)}{A^2-a^2} = \frac{2}{A+a},$$

qui donnent

$$3y = \frac{2A^2}{A+a} - a, \quad 3x = A - \frac{2a^2}{A+a}.$$

ou bien

$$3y = \frac{2A^2 - Aa - a^2}{A+a} = \frac{A-a}{A+a}(2A+a),$$

$$3x = \frac{A^2 + Aa - 2a^2}{A+a} = \frac{A-a}{A+a}(A+2a).$$

On en tire

$$\frac{x}{y} = \frac{A+2a}{a+2A},$$

ou, puisque les bases B et b sont proportionnelles aux distances $A = SA$, $a = Sa$,

$$\text{(I)} \qquad \frac{x}{y} = \frac{B+2b}{b+2B}.$$

C'est l'expression connue.

2. **Centre de gravité du tronc de pyramide.** Soient (Fig. 5.) A et a les centres de gravité des deux bases du tronc de pyramide; la droite Aa passera par le sommet commun S des deux pyramides, dont le tronc est la différence.

Si nous prenons

$$AG = \tfrac{1}{4}SA, \quad ag = \tfrac{1}{4}Sa,$$

les points G et g seront les centres de gravité de nos deux pyramides, dont nous pouvons représenter les volumes par V et v, lesquels sont proportionnels aux cubes des distances SA et Sa.

Posons $SA = A$, $Sa = a$; et soit O le centre de gravité du tronc de pyramide.

Faisons, pour plus de simplicité, $OA = x$, $Oa = y$.

Nous devons avoir

$$\frac{Og}{V} = \frac{OG}{v} = \frac{Gg}{V-v},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{Og}{A^3} = \frac{OG}{a^3} = \frac{Gg}{A^3 - a^3}$$

Mais il est aisé de voir que

$$\begin{aligned} Og &= Oa + ag = y + \tfrac{1}{4}a = \tfrac{1}{4}(4y + a), \\ OG &= AG - OA = \tfrac{1}{4}A - x = \tfrac{1}{4}(A - 4x), \\ Gg &= SG - Sg = \tfrac{3}{4}A - \tfrac{3}{4}a = \tfrac{3}{4}(A - a). \end{aligned}$$

Mettant ces valeurs dans (2) et multipliant par 4, on obtient les équations

$$\frac{4y+a}{A^3} = \frac{A-4x}{a^3} = \frac{3(A-a)}{A^3-a^3} = \frac{3}{A^2+Aa+a^2}.$$

On en tire de suite

$$4y = \frac{3A^3}{A^2+Aa+a^2} - a = \frac{3Aa^3 - A^2a - Aa^2 - a^3}{A^2+Aa+a^2},$$

$$4x = A - \frac{3a^3}{A^2+Aa+a^2} = \frac{A^3+2A^2a+Aa^2-3a^3}{A^2+Aa+a^2}.$$

Les numérateurs de ces fractions sont divisibles par $A-a$; mettant ce facteur en évidence, on trouve que

$$y = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{A-a}{A^2+Aa+a^2}(3A^2+2Aa+a^2),$$

$$x = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{A-a}{A^2+Aa+a^2}(A^2+2Aa+3a^2).$$

On en tire, en divisant membre à membre,

$$\frac{x}{y} = \frac{A^2+2Aa+3a^2}{a^2+2Aa+3A^2}.$$

Les distances A et a sont proportionnelles aux racines carrés des deux bases, que nous pouvons représenter par B^2 et b^2. Nous avons donc

$$(\text{II}) \qquad \frac{x}{y} = \frac{B^2+2Bb+3b^2}{b^2+2Bb+3B^2}.$$

2. **Centre de gravité du tronc de cône à bases circulaires.** Le tronc de cône peut être assimilé à un tronc de pyramide. Représentons par R et r les rayons des deux bases, par H la hauteur

du tronc, et par x, y les distances de son centre de gravité aux plans des deux bases.

Puisque, dans ce cas

$$B^2 = \pi R^2, \quad b^2 = \pi r^2, \quad Bb = \pi Rr, \quad x + y = H,$$

nous avons

$$\frac{x}{y} = \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{r^2 + 2Rr + 3R^2},$$

ou

$$\frac{x}{y} = \frac{(R+r)^2 + 2r^2}{(R+r)^2 + 2R^2}.$$

Nous en tirons

$$\frac{x}{(R+r)^2 + 2r^2} = \frac{y}{(R+r)^2 + 2R^2} = \frac{x+y}{2(R+r)^2 + 2(R^2+r^2)}$$
$$= \frac{H}{4(R^2 + Rr + r^2)}.$$

Si nous faisons remarquer que

$$R^2 + Rr + r^2 = (R+r)^2 - Rr,$$

nous trouverons, pour les valeur de x et y

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{4}H \cdot \dfrac{(R+r)^2 + 2r^2}{(R+r)^2 - Rr}, \\[2ex] y = \frac{1}{4}H \cdot \dfrac{(R+r)^2 + 2R^2}{(R+r)^2 - Rr}. \end{cases}$$

XIV.

Miscellen.

1.

Zur orthogonalen Axonometrie.

1. In der orthogonalen Axonometrie werden drei aufeinander senkrechte, durch einen Punkt O gehende Axen OX, OY und OZ vorausgesetzt, welche das räumliche Axensystem heissen und drei Coordinatenebenen OXY, OXZ und OYZ bestimmen. Projicirt man das räumliche Axensystem auf eine Ebene (Bildebene), welche gegen die 3 Coordinatenebenen beliebig geneigt ist, so muss, da jede Raumaxe auf der Ebene der beiden anderen senkrecht steht, die Projection einer jeden Axe auf der Spur der Ebene der beiden anderen Axen senkrecht stehen.

Schneiden die 3 Coordinatenebenen die Bildebene nach dem Dreiecke XYZ, welches gewöhnlich das Spurendreieck genannt wird, so muss also in Fig. 1.

Xx senkrecht auf YZ, Yy senkrecht auf ZX und Zz senkrecht auf XY

sein, d. h. die drei Höhen des axonometrischen Spurendreiecks sind die orthogonalen Bilder der Axen des räumlichen Axensystemes.

2. Setzt man voraus, dass der Ursprung O des räumlichen Axensystemes vor der Bildebene, welche durch das $\triangle XYZ$ repräsentirt ist, liege, und denkt sich das Raumdreieck YOZ um YZ in die Bildebene umgelegt, so erhält man ein rechtwinkeliges $\triangle YOZ$, dessen Scheitel O des rechten Winkels YOZ in die Dreieckshöhe xX zu liegen komme; woraus folgt, dass bei der angenommenen Lage der Bildebene Wkl. $X < R$ ist.

In gleicher Weise findet man, dass

$$\text{Wkl. } Y < R \text{ und Wkl. } Z < R$$

ist, d. h. ist die axonometrische Bildebene geneigt zu den 3 Coordinatenebenen, dann ist ihr Spurendreieck XYZ immer spitzwinkelig.

3. Verbindet man die Fusspunkte x, y und z der 3 Höhen im Spurendreiecke XYZ, so erhält man ein $\triangle xyz$, in welchem bekanntlich xX, yY und zZ die Winkelhalbirenden sind. Ihr Schnittpunkt O' ist die orthogonale Projection des Coordinatenursprunges O und zugleich der Mittelpunkt des dem $\triangle xyz$ eingeschriebenen Kreises.

Nun ist $XyO'z$ ein Sehnenviereck, und man hat nach dem Ptolomäischen Satze:

$$XO'.yz = Xy.zO' + Xz.yO'$$

und durch $\overline{XO'}^2$ dividirt:

$$\frac{yz}{XO'} = \frac{Xy}{XO'} \cdot \frac{zO'}{XO'} + \frac{Xz}{XO'} \cdot \frac{yO'}{XO'} \quad \ldots\ldots\ldots 1)$$

Wegen der Aehnlichkeit der betreffenden Dreiecke hat man:

$$\frac{Xy}{XO'} = \frac{Xx}{XZ}, \quad \frac{zO'}{XO'} = \frac{xY}{XY}, \quad \frac{Xz}{XO'} = \frac{xX}{XY}, \quad \frac{yO'}{XO'} = \frac{xZ}{XZ}.$$

Durch Substitution dieser Werte in die Gleichung 1) erhält man:

$$\frac{yz}{XO'} = \frac{Xx}{XZ} \cdot \frac{xY}{XY} + \frac{xX}{XY} \cdot \frac{xZ}{XZ} = \frac{xX.YZ}{XY.XZ}$$

und nach leichter Umformung, wenn man mit F die Fläche des Spurendreiecks bezeichnet:

$$\frac{yz}{XO'} = 4 \cdot \frac{F^2}{XY.YZ.ZX} \cdot \frac{1}{xX}.$$

In gleicher Weise findet man:

$$\frac{xy}{ZO'} = 4 \cdot \frac{F^2}{XY.YZ.ZX} \cdot \frac{1}{zZ}$$

und

$$\frac{xz}{YO'} = 4 \cdot \frac{F^2}{XY.YZ.ZX} \cdot \frac{1}{yY},$$

folglich

$$yz : xy : xz = \frac{XO'}{xX} : \frac{ZO'}{zZ} : \frac{YO'}{yY},$$

oder

$$yz : xy : xz = \frac{\overline{XO'}^2}{xX \,.\, XO'} : \frac{\overline{ZO'}^2}{zZ \,.\, ZO'} : \frac{\overline{YO'}^2}{yY \,.\, YO'} \quad \ldots\ldots 2)$$

Denkt man sich z. B. durch $O'Z$ den Kreuzriss gelegt, und denselben sammt dem dreieckigen Schnitte in die Bildebene nach ZOz umgelegt, dann ist bekanntlich $\frac{ZO'}{ZO}$ das Verkürzungsverhältniss für die Z Axe, und es ist im $\triangle ZOz$

$$zZ \,.\, ZO' = \overline{ZO}^2.$$

In gleicher Weise findet man

$$xX \,.\, XO' = \overline{XO}^2$$

und

$$yY \,.\, YO' = \overline{YO}^2.$$

Setzt man diese Werte in die Formel 2), so erhält man:

$$yz : xy : xz = \left(\frac{XO'}{XO}\right)^2 : \left(\frac{YO'}{YO}\right)^2 : \left(\frac{ZO'}{ZO}\right)^2,$$

d. h. die Seiten des Höhen-Fusspunktendreiecks xyz im axonometrischen Spurendreiecke XYZ verhalten sich wie die Quadrate der Verkürzungen der drei axonometrischen Axen. (Schlömilch'scher Satz).

Sind also die Verkürzungsverhältnisse (etwa durch Masszahlen) gegeben, so ist es leicht das $\triangle xyz$ zu construiren, und die Axenprojectionen xX, yY und zZ, sowie das Spurendreieck XYZ zu ermitteln.

4. Die obigen Gleichungen:

$$\overline{XO}^2 = xX \,.\, XO', \quad \overline{YO}^2 = yY \,.\, YO', \quad \overline{ZO}^2 = zZ \,.\, ZO'$$

lassen sich in nachstehender Weise umformen:

$$\left(\frac{XO'}{XO}\right)^2 = \frac{\overline{XO'}^2}{XO' \,.\, xX} = \frac{XO'}{xX},$$

$$\left(\frac{YO'}{YO}\right)^2 = \frac{\overline{YO'}^2}{YO' \,.\, yY} = \frac{YO'}{yY}$$

und

$$\left(\frac{ZO'}{ZO}\right)^2 = \frac{\overline{ZO'}^2}{ZO' \,.\, zZ} = \frac{ZO'}{zZ}.$$

Bildet man die Summe der Quadrate dieser Verkürzungsverhältnisse, so erhält man:

$$\left(\frac{XO'}{XO}\right)^2+\left(\frac{YO'}{YO}\right)^2+\left(\frac{ZO'}{ZO}\right)^2=\frac{XO'}{xX}+\frac{YO'}{yY}+\frac{ZO'}{zZ},$$

oder umgeformt:

$$=\frac{xX-O'x}{xX}+\frac{yY-O'y}{yY}+\frac{zZ-O'z}{zZ}=3-\left[\frac{O'x}{xX}+\frac{O'y}{yY}+\frac{O'z}{zZ}\right].$$

und wenn man die Seiten des Spurendreiecks XYZ einführt, ergibt sich:

$$=3-\left[\frac{O'x}{xX}\cdot\frac{YZ}{YZ}+\frac{O'y}{yY}\cdot\frac{XZ}{XZ}+\frac{O'z}{zZ}\cdot\frac{XY}{XY}\right]$$

und da die Nenner untereinander gleich sind und jeder den doppelten Inhalt des $\triangle XYZ$ ausmacht, so erhält man:

$$=3-\frac{O'x.YZ+O'y.XZ+O'z.XY}{2XYZ}$$

und da der Zähler wieder den doppelten Inhalt von XYZ ausmacht, so erhält man:

$$=3-\frac{2XYZ}{2XYZ}=2,$$

d. h. die Summe der Quadrate der Verkürzungsverhältnisse der axonometrischen Axen ist immer gleich 2.

5. Das letzte Resultat lässt sich noch einfacher in nachstehender Weise finden. Zieht man durch X, $Z'Y' \parallel YZ$,
„ Y, $X'Z' \parallel XZ$,
und „ Z, $X'Y' \parallel YX$,
so erhält man ein $\triangle X'X'Z'$, dessen Flächeninhalt $=4XYZ$ ist. Nun ist

$$\frac{XO'}{xX}=\frac{XO'}{xO}\cdot\frac{XY'}{YZ}=\frac{\triangle Z'O'Y'}{2.\triangle XOY}$$

und folglich die Summe der Quadrate der Verkürzungsverhältnisse der axonometrischen Axen

$$=\frac{\triangle Z'O'Y'+\triangle X'O'Z'+\triangle Y'O'X'}{2.\triangle XYZ}=\frac{\triangle X'Y'Z'}{2.\triangle XYZ}$$

$$=\frac{4.\triangle XYZ}{2\triangle XYZ}=2.$$

6. Indem wir mit diesen Beweisen schliessen, behalten wir uns vor, auf diesen Gegenstand gelegentlich nochmals zurück zukommen, und die Anisometrie, Dimetrie und Isometrie näher in's Auge zu fassen.

J. Streissler in Graz.

2.

Nachtrag zu der Dreiecksaufgabe T. LXIII. p. 300.

Nachdem es vielleicht von einigem Interesse sein dürfte die Grenzwerte mehrerer Grössen, deren algebraische Bestimmung in der diesem Nachtrage zu Grunde liegenden Arbeit im allgemeinen ausgeführt wurde, kennen zu lernen, so möge den folgenden Betrachtungen Raum gegönnt sein.

1.

Unter welchen Bedingungen hat der im Mitteldreiecke von den Seiten m, n, p der Seite m gegenüberliegende Winkel φ seinen kleinsten Wert, (φ ist, nach pag. 305., Gl. 10 stets grösser als 90^0) und welches Erzeugungsdreieck (von den Seiten x, y, z) ist durch den Minimalwert von φ charakterisirt?

Auf pag. 305. sagt Gl. 10:

$$m^2 \geqq n^2 + p^2 + n\sqrt{n^2 + 2p^2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ferner ist

$$m^2 = n^2 + p^2 + 2np\cos(180^0 - \varphi) \quad \ldots\ldots (2)$$

Die Comparation dieser beiden Gleichungen ergiebt:

$$\cos(180^0 - \varphi) \geqq \frac{1}{2p}\sqrt{n^2 + 2p^2},$$

d. h. der kleinste mögliche Wert von $\cos(180^0 - \varphi)$ beträgt:

$$\cos(180^0 - \varphi) = \frac{1}{2p}\sqrt{n^2 + 2p^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{2p^2} + 1\right)} \quad \ldots (3)$$

welcher Wert offenbar dem grössten Supplementwinkel von φ und daher dem kleinsten φ entspricht. Die Restitution von (3) in (2) ergiebt, dass jene Mitteldreiecke die kleinsten φ besitzen, welche zu rechtwinkeligen Erzeugungsdreiecken gehören; man erhält nämlich dann die Beziehung:

$$m^2 = n^2 + p^2 - n\sqrt{n^2 + 2p^2},$$

welche identisch ist mit der Form, die Gl. 9, pag. 306. für $t = 0$, also für ein rechtwinkeliges Erzeugungsdreieck, annimmt. Welches unter allen den möglichen rechtwinkeligen Erzeugungsdreiecken das kleinste φ besitzt, ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass $\cos(180^0 - \varphi)$ am kleinsten ist, wenn $u = 0$, also

$$\cos(180^0 - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist, d. h. wenn

$$\varphi = 135^0,$$

womit zugleich der erste Teil unserer Frage erledigt ist.

Unser gesuchtes Urdreieck, welches das Mitteldreieck mit dem kleinsten stumpfen Winkel erzeugt, ist also folgenden Bedingungen unterworfen:

$$t = 0 \quad \text{und} \quad n = 0,$$

welche mit der pag. 306. aufgestellten Gleichung

$$n^2 = 2s^2 - t^2$$

zusammengehalten, zur weiteren Bedingung $s = 0$ führen.

Da also der Radius s des dem gesuchten Urdreiecke eingeschriebenen Kreises Null ist, so ist es jenes rechtwinkelige Dreieck, in dem eine Kathete mit der Hypotenuse zusammenfällt, dessen andere Kathete also Null ist. Das Mitteldreieck, in welchem $\varphi = 135^0$ ist, wird gleichfalls durch eine Gerade repräsentirt, indem ja $n = 0$ gefunden wurde.

2.

Unter welchen Bedingungen hat das Mitteldreieck seinen relativ grössten Flächeninhalt und welches Urdreieck wird hierdurch charakterisirt?

Wir bilden aus (3)

$$\cos^2(180^0 - \varphi) \geqq \frac{n^2 + 2p^2}{4p^2},$$

woraus

$$\sin^2\varphi \leqq \frac{2p^2 - n^2}{4p^2}$$

und

$$\sin\varphi \leqq \frac{1}{2p}\sqrt{2p^2 - n^2}$$

folgt. Da φ stets grösser als 135^0 ist, so befindet sich das relativ grösste Mitteldreieck unter jenen, für welche φ möglichst klein, also

$$\sin\varphi = \frac{1}{2p}\sqrt{2p^2 - n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ist. Die Fläche F des gesuchten Mitteldreiecks hat die Form:

$$F = \frac{np}{2}\sin\varphi$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$F = \frac{n}{4} \sqrt{2p^2 - n^2},$$

worin noch das günstigste Verhältniss zwischen n und φ zu bestimmen ist. Wir bilden:

$$\frac{dF}{dn} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{2p^2 - n^2} - \frac{n^2}{\sqrt{2p^2 - n^2}}\right) = 0,$$

woraus

$$n = p$$

folgt, welcher Wert, wie leicht zu ersehn ist, F zu einem Maximum macht. Man findet ferner leicht:

$$n = m\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

somit ist

$$m : n : p = \sqrt{2 + \sqrt{3}} : 1 : 1$$

das Verhältniss, in welchem die Seiten m, n, p des Mitteldreiecks stehen müssen, damit seine Fläche ihr Maximum besitzt. Die Fläche selbst ist dann repräsentirt durch die coexistirenden Formeln:

$$F = \frac{m^2}{4}(2 - \sqrt{3}) = \frac{n^2}{4} = \frac{p^2}{4}.$$

Ferner ist, da in diesem Falle

$$\cos(180 - \varphi) = \frac{1}{2p}\sqrt{n^2 + 2p^2}$$

übergeht in

$$\cos(180 - \varphi) = \frac{1}{2n}\sqrt{n^2 + 2n^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$180 - \varphi = 30 \quad \text{resp.}$$

$$\varphi = 150^0$$

der stumpfe Winkel des relativ grössten Mitteldreiecks.

Schliesslich haben wir uns noch über die relativen Grössen der Seiten des entsprechenden Urdreiecks klar zu werden. Aus dem gesagten ist zunächst klar, dass es ebenfalls rechtwinkelig ist. Deshalb führt uns am bequemsten zum Ziele die Combination der Gl. $n = p$ mit den in Function von n und p für die Seiten x, y, z eines rechtwinkeligen Dreiecks auf pag. 308. aufgestellten Formeln:

$$z = n\sqrt{2 + \sqrt{2(n^2 + 2p^2)}}$$

$$x = n\sqrt{2 + \sqrt{2p^2 + \sqrt{4p^4 - n^4}}}$$

$$y = n\sqrt{2 + \sqrt{2p^2 - \sqrt{4p^4 = n^4}}}$$

Man erhält:

$$x = n\sqrt{\tfrac{3}{2}(1+\sqrt{3})}$$
$$y = n\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})}$$
$$z = n\sqrt{2(1+\sqrt{3})} \quad \text{resp.}$$
$$x : y : z = \sqrt{3} : 1 : 2$$

als das Seitenverhältniss im Erzeugungsdreiecke des Mitteldreiecks vom grössten Flächeninhalte.

Wien, den 23. März 1880. N. von Lorenz.

3.

Anmerkung zu dem Aufsatze: „Beitrag zur Ellipse". T. LXIII. p. 443.

Ich erlaube mir auf die bekannte Construction der Aufgabe „Einem gegebenen Parallelogramme eine Ellipse berührend einzuschreiben", welche Herr Th. Sinram im 63. Teile des Archivs S. 443. analytisch begründet hat, nochmals zurückzukommen und zu zeigen, dass dieselbe Construction aus der projectivischen Beziehung zweier bestimmter Strahlenbüschel sich ableiten lässt. Denn es bestimmt ein Parallelstrahlenbüschel Fig. 1., welches durch die Richtung der Diagonale $\overline{mm_1}$ bestimmt ist, auf den Geraden $\overline{vm}$, $\overline{v_1m_1}$ zwei perspectivische und ähnliche Punktreihen $(abcd\ldots)$, $a_1b_1c_1d_1\ldots)$, welche aus den Endpunkten s, s_1 des Durchmessers $\overline{ss_1}$ durch zwei projectivische Strahlenbüschel $s(abcd\ldots)$, $s_1(a_1b_1c_1d_1\ldots)$ projicirt werden. Die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen $\overline{sa}$ $\overline{s_1a_1}$, $\overline{sb}$ $\overline{s_1b_1}$, $\overline{sc}$ $\overline{s_1c_1}$, $\overline{sd}$ $\overline{s_1d_1}\ldots$ der Büschel $s(abcd\ldots)$, $s_1(a_1b_1c_1d_1\ldots)$ bestimmen also Punkte a', b', c', $d'\ldots$ eines Kegelschnittes $\breve{E}'$.

Wählt man die entsprechenden Punktepaare aa_1, bb_1, ... nur in Strecken $\overline{vm}$, $\overline{v_1m_1}$, so erhält man bloss Punkte des elliptischen Bogens $v'a'b'm'$ im ersten Quadranten. Um nachzuweisen, dass analoge Constructionen in den folgenden Quadranten nicht nur auch elliptische Bögen liefern, sondern dass alle diese derselben Ellipse $\breve{E}'$ angehören, muss man von einem allgemeineren Standpunkte auch die perspectivische Beziehung der Reihen $(abcd\ldots)$, $(a_1b_1c_1d_1\ldots)$; $(abcd\ldots)$, $(a_2b_2c_2d_2\ldots)$; $(abcd\ldots)$, $(a_3b_3c_3d_3\ldots)$; $(abcd\ldots)$, $(a_4b_4c_4d_4\ldots)$ durch jene Parallelstrahlenbüschel vermitteln, welche durch die Richtungen der Geraden $\overline{mm_1}$, $\overline{mm_2}$, $\overline{mm_3}$, $\overline{mm_4}$ bestimmt sind, und man erhält so

$$(abcd) = (a_1b_1c_1d_1) = (a_2b_2c_2d_2) = (a_3b_3c_3d_3) = (a_4b_4c_4d_4).$$

Denken wir uns diese Reihen aus den Punkten s, s_1 projicirt, so erhalten wir

$$s(abcd) = s(a_1b_1c_1d_1) = s(a_2b_2c_2d_2) = s(a_3b_3c_3d_3) = s(a_4b_4c_4d_4)$$
$$= s_1(abcd) = s_1(a_1b_1c_1d_1) = s_1(a_2b_2c_2d_2) = s_1(a_3b_3c_3d_3) = s_1(a_4b_4c_4d_4)$$

Nun kann man beweisen, dass die Strahlenbüschel $s_1(a_1b_1c_1d_1)$, $s_1(a_2b_2c_2d_2)$ identisch sind. Wählt man in der Reihe $(abcd\ldots)$ drei bestimmte Punkte m_1 $u_{1\infty}$ v_1 und einen beliebigen Punkt a_1 und in der Reihe $(a_2b_2c_2d_2\ldots)$ drei bestimmte Punkte m_2 $u_{2\infty}$ v_2 und einen beliebigen Punkt a_2 so, dass m_1m_2, $u_{1\infty}u_{2\infty}$, v_1v_2, a_1a_2 einander entsprechende Punktepaare sind, so hat man

$$(m_1u_{1\infty}v_1a_1) = (m_2u_{2\infty}v_2a_2).$$

Projicirt man diese Reihen aus s_1, so bekommt man

$$s_1(m_1u_{1\infty}v_1a_1) = s_1(m_2u_{2\infty}v_2a_2).$$

In den so erhaltenen concentrischen projectivischen Büscheln ist aber $\overline{s_1m_1} \equiv \overline{s_1m_2}$, $\overline{s_1u_{1\infty}} \equiv \overline{s_1u_{2\infty}}$, $\overline{s_1v_1} \equiv \overline{s_1v_2}$, folglich müssen auch die Strahlen $\overline{s_1a_1}$, $\overline{s_1a_2}$ identisch sein. Da die entsprechenden Punkte a_1 a_2 beliebig gewählt worden sind, so folgt, dass auch die übrigen entsprechenden Strahlen $\overline{s_1b_1}$ $\overline{s_1b_2}$, $\overline{s_1c_1}$ $\overline{s_1c_2}$, $\overline{s_1d_1}$ $\overline{s_1d_2}$ ... zusammenfallen, und dass auch die Büschel $s_1(a_1b_1c_1d_1\ldots)$, $s_1(a_2b_2c_2d_2\ldots)$ identisch sein müssen. Aus den Relationen $s(abcd) = s_1(a_1b_1c_1d_1)$, $s(abcd) = s_1(a_2b_2c_2d_2)$ und aus der Identität der Büschel $s_1(a_1b_1c_1d_1)$, $s_1(a_2b_2c_2d_2)$ ergibt sich, dass die projectivischen Strahlenbüschel $s(abcd\ldots)$, $s_1(a_1b_1c_1d_1\ldots)$; $s(abcd\ldots)$, $s_1(a_2b_2c_2d_2\ldots)$ dieselben Punkte $a'b'c'd'\ldots$ des Kegelschnittes $\breve{E}'$ erzeugen müssen. In derselben Weise kann die Identität der Büschel $s(a_3b_3c_3d_3\ldots)$, $s(a_4b_4c_4d_4\ldots)$ erwiesen werden, und man erkennt, dass auch die projectivischen Büschel $s_1(abcd\ldots)$, $s(a_3b_3c_3d_3\ldots)$ und $s_1(abcd\ldots)$ $s(a_4b_4c_4d_4\ldots)$ dieselben Punkte a'', b'', c'', d'' ... eines Kegelschnittes $\breve{E}''$ bestimmen. Beide Curven $\breve{E}'$ und $\breve{E}''$ sind aber durch die Punkte $v' \equiv v''$, m', m'', und durch die Tangenten $\overline{m's_1} \equiv \overline{m_1m_2}$, $\overline{m''s} \equiv \overline{m_3m_4}$ in den Punkten m', m'' vollkommen bestimmt, und müssen daher identisch sein. Nun erkennt man aus der Bestimmung der Punkte a', b', c', $d'\ldots$, a'', b'', c'', $d''\ldots$ die bekannte Ellipsenconstruction. Zugleich erhellt, dass bei der Construction der Ellipse die Strecken $\overline{vm}$, $\overline{v_1m_1}$ nicht in n gleiche Teile geteilt werden müssen, sondern dass es genügt, die einzelnen Teilpunkte aa_1, bb_1, ... auf den Strecken so zu wählen, dass sie auf Geraden $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$ ... liegen, welche parallel zu

$\overline{mm_1}$ sind. Analoge Bemerkungen beziehen sich auf die Teilung der Strecken $\overline{wm}$, $\overline{wm_2}$; $\overline{wm}$, $\overline{wm_3}$, $\overline{vm}$, $\overline{vm_4}$.

2. Nun wollen wir auch zeigen, wie analoge und bekannte Constructionen für die Hyperbel und Parabel sich ableiten lassen.

Es seien $\overline{ss_1}$, $\overline{vv_1}$ die conjugirten Durchmesser der Hyperbel. Die Punktreihe (Fig. 2.) $(abcd \ldots u \ldots v)$ des Trägers $\overline{vv_1}$ projiciren wir mittels Strahlen $\overline{a\,{}^1a}$, $\overline{b\,{}^1b}$, $\overline{c\,{}^1c}$, $\overline{d\,{}^1d} \ldots \overline{u\,{}^1u_1} \ldots \overline{v\,{}^1v_1}$, welche parallel zu der Diagonale A sind, auf die Gerade $\overline{ss_1}$, und die so erhaltene Punktreihe $({}^1b\,{}^1b\,{}^1c\,{}^1d \ldots {}^1u \ldots {}^1v \ldots)$ projiciren wir mittels eines durch die Diagonale A_1 bestimmten Parallelstrahlenbüschels auf die Gerade V. Die neue Punktreihe nennen wir $(a_1b_1c_1d_1..u_1..v_1)$. Da die Punktreihe $(abcd \ldots u \ldots v \ldots)$ perspectivisch und ähnlich ist zur Reihe $({}^1a\,{}^1b\,{}^1c\,{}^1d \ldots {}^1u \ldots {}^1v)$, und auch die Reihen $({}^1a\,{}^1b\,{}^1c\,{}^1d \ldots {}^1u \ldots {}^1v)$, $(a_1b_1c_1d_1 \ldots u_1 \ldots v_1 \ldots)$ perspectivisch und ähnlich sind, so müssen die Punktreihen $(abcd \ldots u \ldots v)$, $(a_1b_1c_1d_1 \ldots u_1 \ldots v_1)$ projectivisch sein. Wenn wir uns die Punktreihen $(abcd \ldots u \ldots v)$, $(a_1b_1c_1d_1 \ldots u_1 \ldots v_1 \ldots)$ aus den Punkten s, s_1 projicirt denken, so bekommen wir zwei projectivische Strahlenbüschel $s(abcd \ldots u \ldots v \ldots)$, $s_1(a_1b_1c_1d_1 \ldots u_1 \ldots v_1 \ldots)$, deren zugeordnete Strahlen $\overline{sa}$ $\overline{s_1a_1}$, $\overline{sb}$ $\overline{s_1b_1}$, $\overline{sc}$ $\overline{s_1c_1}$, $\overline{sd}$ $\overline{s_1d_1} \ldots \overline{su}$ $\overline{s_1u_1} \ldots \overline{sv}$ $\overline{s_1v_1} \ldots$ sich in den Punkten a', b', c', $d' \ldots u' \ldots v' \ldots$ eines Kegelschnittes $\breve{H}'$ schneiden müssen. Aus der Bestimmung der Punkte u'_∞, v'_∞ erkennt man sofort, dass der Kegelschnitt H', da er zwei unendlich ferne Punkte u'_∞, v'_∞ hat, eine Hyperbel ist, und dass A, A_1 Asymptoten dieser Hyperbel sind. In ähnlicher Weise könnte auch die zweite Construction, welche in der Figur ersichtlich gemacht ist, bewiesen werden.

Um auch noch den Fall zu behandeln, wenn eine Parabel durch den Durchmesser $\overline{vs_{1\infty}}$ Fig. 3. und durch die zum Durchmesser conjugirte Sehne $\overline{sm'}$ bestimmt ist, und construirt werden soll, so projiciren wir, wenn durch die Diagonale $\overline{mm_1}$ die Richtung eines projicirenden Parallelstrahlenbüschels bestimmt ist, die Punkreihe $(abcd\ldots)$ auf die Tangente T des Punktes v. Man erhält wieder zwei perspectivische und ähnliche Punktreihen $(abcd \ldots)$, $(a_1b_1c_1d_1 \ldots)$, welche aus den Punkten s, $s_{1\infty}$ (unendlich ferner Punkt des Durchmessers) durch zwei projectivische Strahlenbüschel $s(abcd \ldots,)$, $s_1(a_1b_1c_1d_1 \ldots)$ projicirt werden. Durch den gegenseitigen Durchschnitt der entsprechenden Strahlen $\overline{sa}$, $\overline{s_1a_1}$, $\overline{sb}$, $\overline{s_1b_1}$, $\overline{sc}$ $\overline{s_1c_1} \ldots$ sind die Punkte a', b', c', $d' \ldots$ der Parabel P' besimmt. Da der Schnittpunkt e' der entsprechenden Strahlen $\overline{se}$ $\overline{s_{1\infty}e_1}$ mit dem Punkte s zusammenfällt,

so muss $\overline{se} \equiv se'$ die Tangente der Parabel im Punkte s sein. Weil aber $\overline{vm} = \overline{e_1 s} = \overline{ev}$ ist, so ergibt sich die bekannte und einfache Construction der Tangente in einem beliebigen Parabelpunkte s, wenn man die Strecke $\overline{ev} = \overline{vm}$ macht und den so erhaltenen Punkt e mit s verbindet.

Die Figur zeigt noch eine andere Parabelconstruction, welche aus der projectivischen Beziehung der Büschel $s(abcd...)$, $v({}^1a\,{}^1b\,{}^1c\,{}^1d...)$ sich ergibt.

Teltsch am 1. October 1879. W. Jeřábek.

4.

Ueber den Schwerpunkt des Vierecks.

Bezeichnen a, b und c die Abstände der Ecken eines Dreiecks von einer Ebene, so ist der Abstand z des Schwerpunkts jenes Dreiecks von dieser Ebene bekanntlich gleich dem arithmetischen Mittel der drei Eckabstände. Es ist demnach $z = \frac{a+b+c}{3}$. (Möbius, Lehrbuch der Statik, pag. 209).

Offenbar liegt für die bestimmenden Punkte eines ebenen Vierecks $ABCD$ (Fig. 1.) und den Schwerpunkt S desselben eine entsprechende Beziehung vor. Diese zu ermitteln wird als fünfter Bestimmungspunkt neben den Eckpunkten der Durchschnittspunkt O der Diagonalen AB und BD des Vierecks gewählt. Die Abstände der Ecken von einer willkürlich angenommenen Ebene seien beziehlich a, b, c und d und der Abstand des Durchschnittspunkts der Diagonalen sei o. Um den Schwerpunkt S des Vierecks zu bestimmen, werden die Ecken A und C mit der Mitte M der Diagonale BD verbunden. Die Mittellinien AM und CM sind Schwerlinien der Dreiecke ABD und BCD und der Schwerpunkt S des Vierecks liegt auf der Schwerlinie PQ, welche die Schwerpunkte P und Q der Dreiecke verbindet. Alsdann ist PQ parall. AC und ausserdem $PQ = \frac{1}{3}AC$ und es liegt die Beziehung vor

$$\frac{QN}{PQ} = \frac{OC}{AC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Das Gleichgewicht dagegen bedingt die Proportion:

$$\frac{PS}{QS} = \frac{\triangle BCD}{\triangle BAD}.$$

Weil aber

$$\frac{\triangle BCD}{\triangle BAD} = \frac{OC}{OA},$$

so folgt:

$$\frac{PS}{QS} = \frac{OC}{OA},$$

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{OC}{AC} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

und aus den Gleichungen (1) und (2)

$$PS = QN \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Man erhält demnach den Schwerpunkt S, indem man auf der Strecke QP den durch die Diagonale BD gelieferten Abschnitt PN von Q aus abträgt*). Es ist alsdann:

$$PS = QN = \frac{OC}{3}.$$

Nun ist

$$z.PQ = p.QS + qPS,$$

$$z.\frac{AC}{3} = p\frac{AC}{3} + q\frac{OC}{3},$$

$$z = p + (q - p)\frac{OC}{AC}$$

und, indem man erwägt, dass

$$p = \frac{a + b + d}{3},$$

$$q = \frac{b + c + d}{3},$$

folgt hieraus:

$$3z = a + b + d + (c - a)\frac{OC}{AC} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Für die Diagonale AC und den Diagonalendurchschnittspunkt O liegt die Gleichung vor:

$$o.AC = a.OC + c.AO,$$

aus der sich ergiebt:

$$o = c + (a - c)\frac{OC}{AC} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Durch Addition von (4) und (5) folgt alsdann:

$$3z + o = a + b + c + d$$

woraus die bemerkenswerte Beziehung:

---

*) Wie bereits in T. LXIV. p. 439. bemerkt (Red.)

$$z = \frac{a+b+c+d-o}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

hervorgeht.

Ist das Viereck ein Parallelogramm, so ist

$$o = \frac{a+b+c+d}{4}$$

und daher auch

$$z = \frac{a+b+c+d}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Steht die Ebene des Vierecks $ABCD$ normal auf der Bestimmungsebene, und liegt die Seite CD in der letzteren, so sind die Abmessungen c und d gleich Null, und folgt demnach

$$z = \frac{a+b-o}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

als Bestimmungsgleichung für den Schwerpunkt eines Vierecks in der Ebene desselben.

Wird demnächst die Viereckseite $BC = O$ angenommen, geht also das Viereck $ABCD$ in das Dreieck BAD über, so wird gleichzeitig mit b auch o gleich Null und folgt für das Dreieck die bekannte Gleichung

$$z = \frac{a}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Es ist einleuchtend, dass dieselben Relationen stattfinden, wenn an Stelle der normalen Abmessungen a, b, c, d und O beliebige parallele Strecken a', b', c', d' und o' angenommen werden.

Das aufgestellte Gesetz dürfte an und für sich von Interesse sein. Dasselbe giebt ausserdem Veranlassung, einen Irrtum zu berichtigen, der in La Fremoire's wertvollen Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen — herausgegeben von Dr. Reuschle, Stuttgart 1858, — pag. 51. in Bezug auf den Schwerpunkt des Vierecks begangen wird, indem derselbe in den Durchschnittspunkt der geraden Verbindungslinien der Mitten gegenüberstehenden Seiten verlegt wird. Das Irrtümliche dieser Angabe tritt hervor, indem man die Mitten zusammenstossenden Seiten geradlinig verbindet, und dadurch ein Parallelogramm herstellt, in dem jene Strecken Diagonalen sind. Es folgt dann, wenn die die Normalen von den Punkten A, B, C, D und S auf eine Ebene wie vor bezeichnet werden:

$$z = \frac{\frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2}}{2}$$

$$= \frac{a+b+c+d}{4}$$

was nur zutrifft, wenn Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Brieg, November 1879. E. Noeggerath.

5.

Schwerpunkt des Vierecks.

Die Viereckdiagonalen AC und BD schneiden sich in E. Man trage die Strecke CE von A nach C hin nach AF. Dann hat das Dreieck BDF denselben Schwerpunkt wie das Viereck $ABCD$. Der Grund ist leicht zu sehen, und der Schwerpunkt des Vierecks hiernach leicht zu construiren.

Mülhausen im Elsass.

Dr. P. Jolmen, Oberlehrer.

6.

Théorème de Géométrie plane.

Lemme. La position qu' un point mobile partant d'un point fixe atteint en parcourant deux lignes brisées dont les éléments correspondent en longueur et en direction, mais diffèrent en ordre, est indépendante de cet ordre.

En effet on pourra toujours intervertir l'ordre de deux éléments consécutifs en considérant le parallélogramme construit sur ces deux éléments; par conséquent on peut intervertir l'ordre d'une manière arbitraire parce que tout changement d'ordre peut être décomposé en changements élémentaires de deux éléments consécutifs.

Corollaire. Une ligne brisée dont les éléments consécutifs correspondent alternativement en longueur et en direction avec les côtés de deux polygones quelconques, se fermera. J'appelle direction d'un côté la direction dans laquelle un point mobile parcourt ce côté

en parcourant dans un sens arbitraire le contour du polygone correspondant.

En effet on pourra remplacer cette ligne brisée par une autre dont les éléments successifs sont d'abord empruntés au premier et ensuite au second polygone. La première partie fera donc revenir le point mobile au point de départ et la seconde également.

Théorème. Soient $a_1 a_2 \dots a_n$ les côtés successifs d'un polygone quelconque et $p_1 p_2 \dots p_n$ les lignes qui joignent un point M de son plan aux sommets successifs d'un second polygone, soumis à la seule condition d'avoir le même nombre de côtés que le premier, on aura toujours, quelle que soit la position du point M:

$$a_1 p_1 \sin(a_1 p_1) + a_2 p_2 \sin(a_2 p_2) + \dots a_n p_n \sin(a_n p_n) = \text{constante}$$

pourv. qu' on compte les angles $(a_1 p_1)$, $(a_2 p_2) \dots (a_n p_n)$ entre a_1 et p_1, a_2 et $p_2 \dots a_n$ et p_n de la manière suivante:

Soient les directions de $p_1 p_2 \dots p_n$ toutes dirigées des sommets correspondants vers le point M et soient les directions des côtés $a_1 a_2 \dots a_n$ définies comme ci-dessus, les angles $(a_1 p_1)$, $(a_2 p_2) \dots (a_n p_n)$ sont les angles que décriront les côtés $a_1 a_2 \dots a_n$ en les tournant tous dans le même sens jusqu' à ce qu' ils coïncident avec les directions de $p_1 p_2 \dots p_n$.

Démonstration. Soient $b_1 b_2 \dots b_n$ les côtés successifs du second polygone de telle manière que les points d'intersection de b_n et b_1, b_1 et b_2 etc. correspondent avec les points de départ de $p_1 p_2 \dots p_n$, on pourra construire une ligne brisée dont les éléments successifs sont de même longueur et de même direction que ceux de $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n$. Cette ligne brisée se fermera; nous aurons donc un nouveau polygone.

Construisons sur les côtés $b_1 b_2 \dots b_n$ de ce nouveau polygone des triangles dont les deux autres côtés sont égales et parallèles aux lignes p_1 et p_2, p_2 et $p_3 \dots p_n$ et p_1 respectivement et joignons encore les sommets successifs de ces derniers triangles: il est évident que le nouveau polygone sera divisé par cette construction en diffèrentes parties et qu' on obtiendra la surface de ce polygone en additionnant.

a) Un polygone congru avec le premier polygone

b) la somme des triangles composant le second polygone

c) la somme des parallélogrammes $a_1 p_1 \sin(a_1 p_1)$, $a_2 p_2 \sin(a_2 p_2)$... $a_n p_n \sin(a_n p_n)$.

En changeant la position du point M, les deux premières parties de cette somme ne changeront pas de valeur, par conséquent la troisième partie, savoir la somme des parallélogrammes sera constante.

Cas particuliers. Supposons que quelques-uns des sommets consécutifs du second polygone coïncident: le second polygone se trouvera changé de cette manière en un autre polygone ayant moins de côtés, ou même en une ligne droite. Il est évident que la formule générale se modifiera d'une manière correspondante avec celle au moyen de laquelle ce second polygone ou cette ligne sera formé.

Comme application prenons deux quadrangles et supposons que le second se trouve changé en un ligne droite en faisant coïncider les deux extrémités de chacun des deux côtés b_2 et b_4. On aura dans ce cas $p_3 = p_2$ et $p_4 = p_1$ par conséquent la formule générale se modifiera en

$$a_1 p_1 \sin(a_1 p_1) + a_2 p_2 \sin(a_2 p_2) + a_3 p_2 \sin(a_3 p_2) + a_4 p_1 \sin(a_4 p_1) = \text{constante}.$$

Remarque. A l'aide d'une section plane menée parallèlement aux deux bases parallèles d'un prismatoïde on pourra aussi démontrer le théorème en considérant les polygones suivant les quels cette section est coupée par les pyramides suivantes, dans les quelles on peut décomposer ce corps.

a) La pyramide qu' on obtiendra en joignant un point M d'une des bases avec les sommets de l'autre, le point M étant choisi de manière que cette pyramide soit complètement contenue dans le corps de la prismatoïde.

b) Les pyramides ayant pour bases les triangles formés par la jonction du point M et des sommets de la base dans laquelle on a choisi ce point et dont les sommets coïncident avec les sommets de l'autre base.

En choisissant les polygones d'une manière convenable on peut démontrer avec le théorème précédent plusieurs théorèmes de géométrie plane.

Utrecht le 30 Mars 1880.

Dr. W. Kapteyn.

7.

Verstellbare Brillen.

Wenn man durch eine optische Linse einen Gegenstand betrachtet, so ist die optische Wirkung, jenachdem die Sehlinie rechtwinklig oder schräg durch die Linie fällt, eine verschiedene. Fällt die Sehlinie rechtwinklig durch die Mitte der Linse, so erscheint das Object einfach vergrössert oder verkleinert je nach dem Schliff der Linse (bei concaven verkleinert, bei convexen vergrössert). Fällt die Sehlinie jedoch schräg durch die Linse, so entsteht eine prismatische Nebenwirkung und das Object erscheint verzerrt.

Bei den bisher gebräuchlichen Brillen stehen die Brillengläser rechtwinklig zu den Brillenhaltern vertical und unbeweglich vor den Augen. Es ist dies für das Sehen in die Entfernung auch vollkommen richtig. Anders verhält es sich bei dem Abwärtssehen. Das Abwärtssehen wird fast nur durch eine Drehung des Augapfels nach unten bewirkt, während die Kopfstellung, und mit dieser die Stellung der Brillengläser fast dieselbe bleibt. Es ist daher unmöglich, dass bei dem Abwärtssehen mit einer solchen Brille, d. h. bei dem Lesen oder Arbeiten, die Sehlinie gleichfalls rechtwinklig und durch die Centren der Gläser fallen kann, sondern sie wird unbedingt schräg am untern Brillenrande durch dieselben gehen, wodurch die oben erwähnte prismatische Wirkung entsteht und der häufige Gebrauch einer solchen Brille nachteilig wirkt.

Um diesem Uebelstande zu begegnen, habe ich Brillen construirt, bei welchen man mit Hilfe eines zweiten Charniers an jeder Seite die Brillengläser so verstellen kann, dass bei dem Abwärtssehen die Sehlinie rechtwinklig und durch die Centren der Brillengläser fallen muss.

Die Charniern sind äusserst sorgfältig gearbeitet und lassen sich nur in dem erforderlichen Winkel (gewöhnlich 45^0) verstellen, was durch eine Arretirung bewirkt wird.

Schlesicky-Stroehlein.

Frankfurt a. M. October 1879.

XV.

Ueber die theoretisch möglichen Fälle der Polhöhen-Bestimmung.

Von

Herrn Dr. **C. Israel**,
Oberlehrer in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Die astronomische und die mathematische Bestimmung der Polhöhe sind zwei sehr verschiedene Aufgaben. Nicht selten bietet eine Methode dem Mathematiker gar keine, dem Astronomen hingegen fast unüberwindliche Schwierigkeiten. Immerhin wird man zugeben müssen, dass bei einem rationellen Verfahren die mathematische Behandlung des Problems der astronomischen vorherzugehen hat. Denn erst nach Feststellung aller möglichen Methoden — die sich selbstredend nur auf mathematischen Wege erreichen lässt — kann füglich die Frage aufgeworfen und beantwortet werden, welche dieser Methoden sich zu astronomischen Zwecken ausbauen lassen, welche nicht. Eine solche systematische Darstellung des Polhöhen-Problems soll im Folgenden versucht werden.

Definition der Aufgabe.

Es handelt sich darum den Neigungswinkel der Ebene irgend eines Sternparallels gegen die der Lage nach als bekannt voraus zusetzende Ebene des Horizonts zu ermitteln.

Die Lage einer Ebene ist am einfachsten durch drei ihrer Punkte gegeben. Doch können auch andere Bedingungen dafür eintreten, etwa die Bedingung, auf einer gegebenen Ebene senkrecht zu stehen, oder eine gegebene Kugel zu berühren u. s. f. Und in der Tat kommen derartige Bedingungen sowol einzeln als verbunden bei den fraglichen Methoden vielfach zur Anwendung.

Wir werden uns vorerst auf diejenigen Methoden beschränken, die sich auf die Beobachtung eines einzigen Sterns — entweder in einer oder in mehreren Positionen — gründen. Die andern Methoden, denen die Beobachtungen mehrerer Sterne zu Grunde liegen, gestatten eine analoge Behandlung und sollen in einer spätern Untersuchung besprochen werden.

Unter jener Annahme, dass nämlich Beobachtungen von nur einem Sterne bekannt sind, hat man zur Bestimmung der Polhöhe über folgende Elemente zu verfügen:

1) drei Höhen,
2) drei Azimuthe (oder drei Azimmuthdifferenzen),
3) zwei Stundenwinkel,
4) drei Zwischenzeiten,
5) die Declination,
6) die Lage der Meridianebene.

Dass nur zwei Stundenwinkel in Betracht kommen können, ist leicht einzusehen. Denn die Kenntniss des Stundenwinkels involvirt auch die des Meridians. Es wird aber niemals die Beobachtung von drei Sternpositionen — mithin auch nicht von drei Stundenwinkeln — erfordert, sobald die Meridianebene der Lage nach gegeben ist. — Auch ist klar, dass unter den Bestimmungsstücken stets Horizontalelemente — Höhen oder Azimuthe oder beide — vertreten sein müssen. Erst durch die Horizontalelemente wird die Polhöhe individualisirt. Aus Declination, Stundenwinkel, Zwischenzeiten allein lässt sich keine Polhöhe berechnen. Denn diese Elemente enthalten nichts Charakteristisches für den betrachteten Horizont.

Aus gleich zu erörternden Gründen empfiehlt es sich die Methoden einzuteilen in solche, welche

1) sowohl die Declination als den Meridian,
2) nur die Declination,
3) nur den Meridian,
4) weder die Declination noch den Meridian

als bekannt voraussetzen.

Fragen wir nämlich zunächst, welche geometrische Bedeutung die Kenntniss der Declination und der Lage der Meridianebene für unsere Aufgabe hat. In Fig. 1. werde durch die grössere Kugel die Himmelssphäre dargestellt; PR sei der Parallel des Sterns. Denken wir uns concentrisch mit der Himmelskugel eine kleinere Kugel, deren Radius $CT = r \sin\delta$, wo r den Radius der Himmelssphäre und δ die Declination des Sterns bedeutet, so ist einleuchtend, dass die Ebene des Sternparallels diese kleinere Kugel jedenfalls irgendwo (in der Figur: im Punkte T) berühren muss. Wir können demnach sagen: der Sternparallel ist ein Kreis der Himmelssphäre, dessen Ebene eine Kugel vom Radius $r \sin\delta$ berührt.

Ferner sei in Fig. 1. HO der Horizont, AQ der Aequator, HZO der Meridian, N der Pol, Z das Zenith. Die Ebene des Sternparallels steht senkrecht auf der Meridianebene. Ist also diese letztere ihrer Lage nach gegeben, dann weiss man von der Ebene des Sternparallels, dass sie mit einer bekannten Ebene einen rechten Winkel bildet.

Hieraus folgt:

1) Sind Declination und Meridian gegeben, dann hat die Ebene des Sternparallels bereits zwei geometrischen Bedingungen zu genügen. Zur völligen Bestimmung dieser Ebene bedarf es deshalb im Allgemeinen nur noch einer Bedingung, etwa der Bedingung, dass die Ebene durch einen der Lage nach bestimmten Punkt sich erstrecke.

2) Ist nur die Declination bekannt, dann werden zur Lagenbestimmung des fraglichen Parallels noch zwei weitere Bedingungen hinzutreten müssen, z. B. Durchgang durch zwei gegebene Punkte.

3) Der gleiche Fall tritt ein, wenn nur die Lage des Meridians als bekannt vorausgesetzt wird.

4) Ist endlich Keins von Beiden — weder Declination noch Meridian — gegeben, dann hat der Parallel drei selbständige Bedingungen (z. B. Durchgang durch drei Punkte) zu erfüllen.

Damit rechtfertigt sich die obige Einteilung der Methoden.

Es kann sich ereignen, dass die Polhöhe in dem einen oder andern Falle nicht eindeutig bestimmt ist. Ist z. B. das Azimuth und die Höhe eines Sterns S' (Fig. 1.) beobachtet, während Declination und Meridian als bekannt vorauszusetzen sind, dann kann dieser Stern sowohl dem Kreise PR als dem Kreise $P'R'$ angehören. Im ersten Falle würde der Pol nach N, im zweiten nach N' fallen. Die beiden Kreise PR und $P'R'$ stehen hier in dem Zusammenhange,

dass der Schnittpunkt J ihrer in der Meridianebene liegenden Durchmesser die senkrechte Projection des Sterns S' auf die Meridianebene darstellt. — Etwas Aehnliches tritt unter übrigens gleichen Umständen ein, wenn nicht Azimuth und Höhe, sondern etwa Stundenwinkel und Höhe beobachtet sind. Wir werden hier diese einer Specialuntersuchung zugehörigen Fälle nicht besonders, sondern immer nur die Methode im Allgemeinen betrachten.

A.

Methoden, bei denen die Declination und die Lage der Meridianebene als bekannt angenommen werden.

Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Höhe und Azimuth,

b) Stundenwinkel und Höhe,

c) Stundenwinkel und Azimuth

sind durch Beobachtung gegeben.

Im Falle a) ist der zur Bestimmung des Problems noch erforderliche Punkt S des Parallels PR direct durch die Coordinaten MO und MS, in dem Falle b) durch den Durchschnitt des Declinationskreises NG und des durch S gelegten Almikantharets, im Falle c) durch den Durchschnitt desselben Declinationskreises und des Höhenkreises MZ gegeben, so jedoch, dass in den beiden letzten Fällen die Lage des Punkts nur durch die hier jedes mal mit auftretende Bedingung $NS = 90 - \delta$ ihre völlige Bestimmung findet.

In den beiden ersten Fällen sind zwei Seiten und ein Gegenwinkel, in dem letzten Falle eine Seite, ein anliegender und ein Gegenwinkel des Dreiecks Zenith-Pol-Stern gegeben, so dass sich in allen drei Fällen — von der oben berührten Zweideutigkeit abgesehen — ohne Weiteres die Seite NZ, d. h. die Aequatorhöhe, berechnen lässt.

B.

Methoden, welchen die Kenntniss der Declination zu Grunde liegt.

Die Ebene des Parallelkreises, dessen Neigung gegen den Horizont gesucht wird, erscheint in diesem Falle zunächst nur als Berührungsebene einer Kugel vom Radius $r \sin \delta$ (vgl. weiter oben). Ihre ausreichende Bestimmung erfordert mithin noch zwei weitere Bedingungen.

Die Natur der Aufgabe führt hier auf folgende Fälle:

a) Zwei Höhen und die entsprechende Azimuthdifferenz,
b) Zwei Höhen und die Zwischenzeit beider Beobachtungen,
c) Eine Höhe, eine Azimuthdifferenz und die Zwischenzeit der Beobachtungen,
d) Zwei Azimuthänderungen und die beiden zugehörigen Zeitincremente

sind durch Beobachtung ermittelt.

Aus Fig. 1. erhellt, dass der Neigungswinkel des Parallels PR gegen den Horizont HO gegeben ist, sobald man die

$$\text{Höhe } SM = h$$
$$\text{die Höhe } S'K = h'$$

und die Azimuthdifferenz

$$KM = \Delta\omega$$

beobachtet hat. Auf den Anfangspunkt der Azimuthe — ob dieselben vom Südpunkte O oder von irgend einem andern Punkte des Horizonts aus gezählt werden — kommt es dabei nicht an. Denn die Verschiedenheit des Anfangspunkts ändert zwar die absolute Lage des Parallels in Bezug auf den Horizont, ohne indessen den Neigungswinkel zu afficiren. Die Berechnung der Aequatorhöhe NZ ist übrigens der nach Methode b) (der s. g. Donnern'schen Methode) ganz analog. Beide Male ergiebt sich dieselbe durch Auflösung der Dreiecke ZSS', SNS' und NSZ und zwar muss das eine Mal vom Dreieke ZSS', das andere Mal vom Dreiecke SNS' ausgegangen werden.

Was die Methode c) betrifft, so sind zunächst in dem Dreiecke SNS' zwei Seiten und der Zwischenwinkel ($NS = NS' = 90 - \delta$ und Wkl. SNS' = Zwischenzeit) gegeben. Aus der Auflösung dieses Dreiecks findet sich sodann die Seite SS'. Mit dieser, der beobachteten Höhe h oder h', sowie der Azimuthdifferenz $SZS' = \Delta\omega$ lässt sich die Berechnung des Dreiecks SZS' und nächstdem die des Dreiecks NSZ ausführen.

Sind — wie in Methode d) — ausser der Declination (δ) zwei Azimuthänderungen ($\Delta\omega$, $\Delta\omega_1$) und die entsprechenden Zeitincremente ($\Delta\sigma$, $\Delta\sigma'$) gegeben, dann lassen sich aus erstern und den beiden letztern (Fig. 2.) leicht die drei Seiten SS'', SS' und $S'S''$ finden. Man hat nämlich:

$$\sin\frac{SS'}{2} = \cos\delta \,.\, \sin\frac{\Delta\sigma}{2}$$

$$\sin\frac{SS''}{2} = \cos\delta \,.\, \sin\frac{\varDelta\sigma + \varDelta\sigma'}{2}$$

$$\sin\frac{S'S''}{2} = \cos\delta \,.\, \sin\frac{\varDelta\sigma'}{2}.$$

Mithin sind die beiden Winkel am Zenith ($\varDelta\omega$ und $\varDelta\omega_1$) sowie das $\triangle SS'S''$ bekannt, und die Aufgabe reducirt sich auf das „Pothenot'sche Problem auf der Kugeloberfläche". Die Bedingungsgleichungen sind folgende (wenn mit z, z', z'' die allein noch unbekannten Zenithdistanzen der Punkte S, S', S'' bezeichnet werden):

$$\begin{aligned}
\cos SS' &= \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos\varDelta\omega \\
\cos S'S'' &= \cos z' \cos z'' + \sin z' \sin z'' \cos\varDelta\omega' \\
\cos SS'' &= \cos z \cos z'' + \sin z \sin z'' \cos(\varDelta\omega + \varDelta\omega_1).
\end{aligned}$$

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichungen führt auf eine Gleichung des 4. Grades. Man findet sie u. A. in dem Lehrbuche der Trigonometrie von E. Heis, auf das wir deshalb hier verweisen.

Sehr einfach gestaltet sich die Auflösung, wenn die Azimuthdifferenzen $\varDelta\omega$ und $\varDelta\omega'$ beide $= 90^0$ gewählt werden — ein Fall, der wohl auch vom praktischen Standpunkte aus die grössere Beachtung verdient. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned}
\cos SS' &= \cos z \cos z' \\
\cos S'S'' &= \cos z' \cos z'' \\
SS'' &= z + z''.
\end{aligned}$$

Durch Division der beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{\cos z}{\cos z''} = \frac{\cos SS'}{\cos S'S''}.$$

Hieraus:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{\cos SS'}{\cos S'S''} \,.\, \cos z'' \\
&= \frac{\cos SS'}{\cos S'S''} \cos(SS'' - z) \\
&= \frac{\cos SS'}{\cos S'S''} \cos SS'' \cos z + \frac{\cos SS'}{\cos S'S''} \sin SS'' \sin z
\end{aligned}$$

Also:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\cos S'S'' - \cos SS' \cos SS''}{\cos SS' \sin SS''}$$

Nächstdem ergiebt sich:

$$z'' = SS'' - z \quad \text{und}$$

$$\cos z' = \frac{\cos SS'}{\cos z}.$$

Bezeichend für die vorstehende Methode ist, wie man sieht, der Umstand, dass sie weder die Kenntniss des Meridians noch die Beobachtung von Höhen erfordert. Wir werden später noch auf eine andere, ihr ähnliche Methode stossen, die selbst die Notwendigkeit einer Kenntniss der Declination ausschliesst.

C.

Auf die Kenntniss der Lage des Meridians gestützte Methoden.

Die Ebene des Sternparallels steht senkrecht auf der Ebene des Meridians und hat ausserdem noch den beiden (durch Beobachtung gefundenen) Punkten S und S' (Fig. 1.) zu genügen. Jeder dieser Punkte, z. B. S, kann nun gegeben sein

entweder durch Azimuth und Höhe,
oder durch Stundenwinkel und Höhe
oder durch Stundenwinkel nnd Azimuth.

Dabei ist jedoch zu beachten, dass durch Stundenwinkel und Höhe oder durch Stundenwinkel und Azimuth allein — so lange der Pol unbekannt — die Lage eines Punktes nicht hinreichend bestimmt, vielmehr erst durch die hier stets mit hinzutretende Bedingung:

$$NS = NS'$$

die Lage beider Punkte fixirt wird.

Im vorliegenden Falle wird man also im Ganzen 6 verschiedene Methoden erwarten dürfen, nämlich:

a) jeder der beiden Punkte ist durch Azimuth und Höhe,
b) beide Punkte sind durch Stundenwinkel und Höhe,
c) beide Punkte sind durch Stundenwinkel und Azimuth,
d) der eine Punkt ist durch Azimuth und Höhe, der andere durch Stundenwinkel und Höhe,
e) der eine Punkt ist durch Azimuth und Höhe, der andere durch Stundenwinkel und Azimuth,
f) der eine Punkt ist durch Stundenwinkel und Höhe, der andere durch Stundenwinkel und Azimuth

gegeben.

In diesen sämmtlichen Fällen wird übrigens — zum Unterschiede von den unmittelbar vorhergehenden Methoden — nicht blos die Höhe des Pols, sondern auch dessen absolute Lage in Bezug auf den Horizont gefunden.

Fall a)

In dem $\triangle NZS'$ (Fig. 1.) kennt man die Seite $S'Z = 90 - h'$ und den Winkel $NZS' = 180 - \omega'$, analog in dem $\triangle NZS$ die Seite $SZ = 90 - h$ und den Winkel $NZS = 180 - \omega$. Wir haben deshalb:

$$\cos NS = \cos NZ . \sin h + \sin NZ \cos h \cos (180 - \omega)$$
$$\cos NS' = \cos NZ . \sin h' + \sin NZ \cos h' \cos (180 - \omega').$$

Da $NS = NS'$, so folgt durch Gleichsetzung:

$$\cos NZ \sin h - \sin NZ \cos h \cos \omega = \cos NZ \sin h' - \sin NZ \cos h' . \cos \omega'$$

und hieraus, durch Division mit $\cos NZ$:

$$\operatorname{tg} NZ = \frac{\sin h' - \sin h}{\cos h' \cos \omega' - \cos h \cos \omega}.$$

Fall b)

Aus dem $\triangle NZS'$ ergiebt sich:

$$\sin h' = \cos NS' . \cos NZ + \sin NS' . \sin NZ . \cos \sigma',$$

aus dem $\triangle NZS$:

$$\sin h = \cos NS . \cos NZ + \sin NS . \sin NZ . \cos \sigma$$

Durch Fortschaffung von $NS = NS'$ folgt die gesuchte Gleichung für die Aequatorhöhe NZ.

Fall c)

Aus

$$\operatorname{tg} NS' = \frac{\operatorname{tg} (180 - \omega') . \sin NZ}{\sin \sigma' + \operatorname{tg} (180 - \omega') \cos \sigma' \cos NZ}$$

und

$$\operatorname{tg} NS = \frac{\operatorname{tg} (180 - \omega) \sin NZ}{\sin \sigma + \operatorname{tg} (180 - \omega) \cos \sigma \cos NZ}$$

erhält man durch Gleichsetzung von $\operatorname{tg} NS'$ und $\operatorname{tg} NS$ unter nachfolgender Division mit $\sin NZ$ sofort eine Beziehung für $\cos NZ$.

Fall d)

Man hat:

$$\cos NS = \cos NZ \sin h + \sin NZ \cos h \cos (180 - \omega)$$

und

$$\sin h' = \cos NS' \cos NZ + \sin NS' \sin NZ \cos \sigma'.$$

Die Elimination von $NS = NS'$ führt auf die verlangte Relation für NZ.

Fall e)

Es ist

$$\cos NS = \cos NZ \sin h + \sin NZ \cos h \cos (180 - \omega)$$

und

$$\operatorname{tg} NS' = \frac{\operatorname{tg}(180 - \omega') . \sin NZ}{\sin \sigma' + \operatorname{tg}(180 - \omega') \cos \sigma' . \cos NZ},$$

woraus, unter Berücksichtigung der Gleichheit von NS und NS' die Aequatorhöhe NZ erhalten wird.

Fall f)

Durch Fortschaffung von $NS = NS'$ aus den Gleichungen:

$$\sin h = \cos NS . \cos NZ + \sin NS \sin NZ \cos \sigma$$

$$\operatorname{tg} NS' = \frac{\operatorname{tg}(180 - \omega') \sin NZ}{\sin \sigma' + \operatorname{tg}(180 - \omega') \cos \sigma' \cos NZ}$$

ergiebt sich NZ.

D.

Methoden, welche von der Kenntniss der Declination und des Meridians unabhängig sind.

Die Beobachtungen müssen sich hier stets auf drei, in einem Falle sogar auf vier Punkte des Sternparallels erstrecken.

Am leichtesten gewinnt man eine Uebersicht über alle hier möglichen Methoden, wenn man sie einteilt:

1) in solche, bei denen drei Höhen,
2) in solche, bei denen zwei Höhen,
3) in solche, bei denen eine Höhe

zu den beobachteten Elementen gehören,

4) in solche, welche von Höhenbeobachtungen unabhängig sind.

D_1.

Sind drei Höhen (h, h', h'') oder, was dasselbe ist, drei Zenithdistanzen (z, z', z'') gegeben (s. Fig. 2.), dann bedarf man zur Lösung der Aufgabe noch ausserdem

entweder I) der beiden zugehörigen Azimuthdifferenzen ($\Delta\omega$, $\Delta\omega_1$)
oder II) der beiden entsprechenden Zeitdifferenzen ($\Delta\sigma$, $\Delta\sigma'$)
oder III) eine Azimuthdifferenz ($\Delta\omega$) und eine Zeitdifferenz ($\Delta\sigma'$).

Im Falle I) hat man aus den Dreiecken NZS'', NZS', NZS:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\delta - \sin\varphi\cos z''}{\cos\varphi\sin z''}$$

$$\cos(\alpha + \Delta\omega_1) = \frac{\sin\delta - \sin\varphi\cos z'}{\cos\varphi\sin z'}$$

$$\cos(\alpha + \Delta\omega_1 + \Delta\omega) = \frac{\sin\delta - \sin\varphi\cos z}{\cos\varphi\sin z}.$$

In diesen drei Gleichungen sind nur die Grössen α, δ und φ unbekannt. Eine elegante Auflösung derselben verdankt man Gaus (vgl. u. A. „Samml. u. Aufl. Mathem. Aufgaben von K. H. Schellbach“, p. 172.).

Im Falle II) wo ausser den Zenithdistanzen die beiden Zwischenzeiten $\Delta\sigma$ und $\Delta\sigma'$ bekannt sind — ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{SS'}{2} &= \cos\delta\sin\frac{\Delta\sigma}{2}\\
\sin\frac{S'S''}{2} &= \cos\delta\sin\frac{\Delta\sigma'}{2}\\
\sin\frac{SS''}{2} &= \cos\delta\sin\frac{\Delta\sigma + \Delta\sigma'}{2}\\
\cos SS' &= \cos z'\cos z + \sin z\sin z'\cos\Delta\omega\\
\cos S'S'' &= \cos z'\cos z'' + \sin z'\sin z''\cos\Delta\omega'\\
\cos SS'' &= \cos z\cos z'' + \sin z\sin z''\cos(\Delta\omega + \Delta\omega')
\end{aligned}\right\} . \qquad (m)$$

Substituirt man aus den drei ersten Gleichungen die Werte von $\sin\frac{SS'}{2}$, $\sin\frac{S'S''}{2}$, $\sin\frac{SS''}{2}$ in die drei letzten (indem man setzt $\cos SS' = 1 - 2\sin^2\frac{SS'}{2}$ u. s. f.), dann bleiben drei Gleichungen mit den Unbekannten δ, $\Delta\omega$, $\Delta\omega'$, deren Lösung zwar mit Umständen, aber keinen erheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Im Falle III) kann man sich derselben 6 Gleichungen zur Auflösung bedienen. Nur erscheinen diesmal die Grössen SS', $S'S''$, SS'', δ, $\Delta\sigma$, $\Delta\omega'$ als die Unbekannten.

D_2.

Sind zwei Höhen aus Beobachtung bekannt, so ist es nicht immer einerlei, ob h und h' oder h und h'' (Fig. 2.) diese Höhen sind, wie man aus der folgenden Uebersicht aller hier möglichen Fälle ersieht, wo namentlich der erste Fall — obwohl an sich ganz dem Falle 4) entsprechend — eine eigentümliche Behandlung gestattet.

Beobachtet sind

entweder 1) : h, h', $\Delta\omega$, $\Delta\sigma$
oder 2) : h, h', $\Delta\omega$, $\Delta\omega'$, $\Delta\sigma'$
oder 3) : h, h', $\Delta\sigma$, $\Delta\sigma'$, $\Delta\omega'$
oder 4) : h, h'', $\Delta\omega$, $\Delta\sigma$, $\Delta\omega'$
oder 5) : h, h'', $\Delta\omega$, $\Delta\sigma'$, $\Delta\omega'$
oder 6) : h, h'', $\Delta\sigma$, $\Delta\sigma'$, $\Delta\omega'$.

Im Falle 1) hat man zuerst das vollständig gegebene Dreieck ZSS' aufzulösen. Aus der so gefundenen Seite SS' und dem weiterhin gegebenen Zeitunterschiede $\Delta\sigma$ folgt leicht die Poldistanz NS u. s. f.

In allen andern Fällen (2 bis 6) sind die Gleichungen (m) aus D_1 zu Hülfe zu nehmen. Diese Gleichungen, 6 an der Zahl, enthalten 11 Elemente, von denen hier allemal 5 als gegeben vorausgesetzt werden. Die tatsächliche Auflösung kann nur Gegenstand einer Specialuntersuchung sein.

D_3.

Kennt man nur eine einzige Höhe — entweder h oder h' oder h'' —, dann bleibt blos der eine Fall zu betrachten:

Gegeben: h, $\Delta\omega$, $\Delta\sigma$, $\Delta\omega'$ $\Delta\sigma'$.

Auch hier hat man in den mehr erwähnten Gleichungen (m) die ausreichende Zahl von Bedingungsgleichungen.

D_4.

Ein hervorragendes Interesse nimmt schliesslich noch der Fall in Anspruch, wo über gar keine Höhenbeobachtung verfügt und eben-

sowenig die Kenntniss der Declination und des Meridians vorausgesetzt wird.

Der Stern muss alsdann in 4 Positionen S, S', S'' und S''' (Fig. 2.) beobachtet werden und zwar bilden folgende 6 Stücke die Gegenstände der Beobachtung:

$$\varDelta\omega,\quad \varDelta\sigma,\quad \varDelta\omega',\quad \varDelta\sigma',\quad \varDelta\omega'',\quad \varDelta\sigma''.$$

Es ergeben sich damit leicht nachstehende Gleichungen:

$$\cos SS' = 1 - 2\cos^2\delta\sin^2\frac{\varDelta\sigma}{2} = \cos z\cos z' + \sin z\sin z'\cos\varDelta\omega$$

$$\cos S'S'' = 1 - 2\cos^2\delta\sin^2\frac{\varDelta\sigma'}{2} = \cos z'\cos z'' + \sin z'\sin z''\cos\varDelta\omega'$$

$$\cos S''S''' = 1 - 2\cos^2\delta\sin^2\frac{\varDelta\sigma''}{2} = \cos z''.\cos z''' + \sin z''\sin z'''\cos\varDelta\omega''$$

$$\cos SS'' = 1 - 2\cos^2\delta\sin^2\frac{\varDelta\sigma + \varDelta\sigma'}{2}$$
$$= \cos z\cos z'' + \sin z\sin z''\cos(\varDelta\omega + \varDelta\omega')$$

$$\cos SS''' = 1 - 2\cos^2\delta\sin^2\frac{\varDelta\sigma + \varDelta\sigma' + \varDelta\sigma''}{2}$$
$$= \cos z\cos z''' + \sin z\sin z'''\cos(\varDelta\omega + \varDelta\omega' + \varDelta\omega'')$$

$$\cos S'S''' = 1 - 2\cos^2\delta\sin^2\frac{\varDelta\sigma' + \varDelta\sigma''}{2}$$
$$= \cos z'\cos z''' + \sin z'\sin z'''\cos(\varDelta\omega' + \varDelta\omega'').$$

Da nur δ, z, z', z'' und z''' unbekannt sind, so genügen offenbar schon 5 dieser Gleichungen zur Bestimmung des Problems.

Ein Specialfall verdient hier namentlich Beachtung, derjenige nämlich, wo jedes der drei beobachteten Zwischenazimuthe $\varDelta\omega$, $\varDelta\omega'$ und $\varDelta\omega''$ = einem Rechten. Dies setzt allerdings voraus, dass ein Azimuthfall von mindestens 270^0 der Beobachtung zugänglich ist (indem je zwei Beobachtungen in entgegengesetzter Lage des Fernrohrs angestellt werden). Die Gleichungen vereinfachen sich aber alsdann der Art, dass sie eine Auflösung ohne Schwierigkeit zulassen. Man erhält nämlich durch zweckmässige Division (mit Berücksichtigung von $\cos\varDelta\omega = \cos\varDelta\omega'$ u. s. f. $= 0$):

$$\frac{1 - 2\cos^2\delta\sin^2\frac{\varDelta\sigma}{2}}{1 - 2\cos^2\delta\sin^2\frac{\varDelta\sigma'}{2}} = \frac{\cos z}{\cos z''}$$

$$\frac{1-2\cos^2\delta\sin^2\dfrac{\Delta\sigma+\Delta\sigma'+\Delta\sigma''}{2}}{1-2\cos^2\delta\sin^2\dfrac{\Delta\sigma''}{2}}=\frac{\cos z}{\cos z''}$$

Hiernach:

$$\frac{1-2\cos^2\delta\sin^2\dfrac{\Delta\sigma}{2}}{1-2\cos^2\delta\sin^2\dfrac{\Delta\sigma'}{2}}=\frac{1-2\cos^2\delta\sin^2\dfrac{\Delta\sigma+\Delta\sigma'+\Delta\sigma''}{2}}{1-2\cos^2\delta\sin^2\dfrac{\Delta\sigma''}{2}}$$

woraus sich, nach Entfernung der Nenner, sofort der Wert von $\cos\delta$ herleitet, und nächstdem, in Verbindung mit der 4. der obigen Gleichungen, auch die Werte von z, z'' ergeben u. s. f.

Bei der vorstehend gegebenen Uebersicht der Methoden zur Bestimmung der Polhöhe ist wesentlich nur der mathematische Gesichtspunkt festgehalten worden, gleichviel, ob die eine oder andere Methode astronomisch verwertbar oder wegen der auftretenden und nicht zu beseitigenden Beobachtungsfehler zu praktischen Zwecken ungeeignet erscheint. Hier war es lediglich unsere Absicht, alle theoretisch zum Ziele führenden Methoden aufzusuchen und zu classificiren. Dabei sind in der Regel nur die allgemeinen Methoden hervorgehoben worden, während Specialfälle ausser Acht gelassen wurden. Diese entstehen, wenn die Beobachtungselemente besondere Werte annehmen, wenn z. B. die Höhe h = Null, d. h. der Stern bei seinem Auf- oder Untergange beobachtet wird u. dgl. Solcher Specialmethoden giebt es selbstredend eine geraume Anzahl, und es macht nicht die mindeste Schwierigkeit, sie heraus zufinden. Insbesondere ist hierher die bekannte Methode zu rechnen, die Polhöhe als das arithmetische Mittel der beiden Meridianhöhen eines Circumpolarsterns zu bestimmen. Dieselbe reiht sich offenbar derjenigen der obigen Methoden an, bei denen der Meridian als bekannt vorausgesetzt wird, und erscheint insofern als specieller Fall, als die Stundenwinkel oder — wenn man will — die Azimuthe besondern Wert (0^0 und 180^0) annehmen. Aehnlich verhält es sich mit der Methode, welche in der Gleichung

$$90^0-\varphi=\delta-h \quad \text{u. s. f.}$$

ihren Ausdruck findet, wo φ die gesuchte Polhöhe, δ die als bekannt angenommene Declination, und h die beobachtete Meridianhöhe eines Sterns bezeichnet.

Unerwähnt geblieben sind ferner Methoden von ausgesprochen astronomischen Charakter, so die vorzüglichste unter allen bis jetzt in Anwendung gebrachten Methoden, die Bessel'sche. Bekanntlich stützt sich dieselbe auf eine zweimalige Beobachtung der Höhe desselben Sterns im ersten Vertical, auf die Kenntniss der Beobachtungszeiten u. s. f., während die Declination ebenfalls als bekannt vorausgesetzt wird. Unter dieser letztern Voraussetzung genügt aber zur Bestimmung der Polhöhe — wenn man die Sache rein mathematisch nimmt — schon die einmalige Beobachtung der Höhe eines Sterns im ersten Vertical. Denn damit ist im Dreiecke Zenith-Pol-Stern ausser der Declination und Höhe auch das Azimuth ($= 90^0$ oder 270^0) gegeben. Alles Andere, was nach Bessel's Methode noch beobachtet wird, kann mithin nur den Zweck haben, die Fehler der Voraussetzungen, der Beobachtungen und des Instruments zu eliminiren. Dasselbe gilt von der Methode der correspondirenden Höhen. Die Zwischenzeit beider Höhen ist der doppelte Stundenwinkel, der deshalb auf diesem Wege gefunden werden kann. Dem Mathematiker aber ist es gleichgültig, ob der Stundenwinkel durch directe Messung (mittelst Aequatorialinstrumente) oder wie immer ermittelt wird. Für ihn bleibt allein der Umstand bestimmend, dass in der obigen Methode Declination, Stundenwinkel und Höhe eines Sterns als bekannt angenommen werden.

Wird der Stern zwar in correspondirenden Höhen beobachtet, aber nicht diese, sondern die entsprechenden Azimuthe berücksichtigt — ein Verfahren, das man die Methode der correspondirenden Azimuthe nennen könnte — , dann bildet die Azimuthdifferenz, auf welche es hier allein ankommt, das Doppelte des vom Meridian aus gezählten Sternazimuths, während die Zwischenzeit beider Beobachtungen wieder den doppelten Stundenwinkel angiebt. Mathematisch betrachtet fällt die Methode also mit derjenigen zusammen, bei der Declination, Stundenwinkel und Azimuth die Data bilden. U. s. f.

Die nächste Aufgabe würde nun darin bestehen, einerseits die oben blos skizzirten Methoden mathematisch zu vollenden — so weit dies überhaupt angeht — , andererseits dieselben durch diejenigen Methoden zu ergänzen, welche aus der Beobachtung mehrerer Sterne resultiren. Wir denken auf Beides später zurück zukommen.

XVI.

Ueber rationale Regelflächen vierten Grades.

Von

Adolf Ameseder.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit behandeln wir die allgemeine Regelfläche vierten Grades, jedoch in kurz gedrängter Darstellung, da wir nicht erfahren konnten, was über diese Fläche bereits bekannt ist und uns insbesondere die von Cremona über diesen Gegenstand veröffentlichte Abhandlung: „Sulle superficie gobbe di quarto grado, Memorie dell' Accademia di Bologna, 1868“ derzeit nicht erreichbar ist.

Zum Ausgangspunkt dieser Untersuchung wählten wir die — sich zu diesem Zweck besonders eignende — Entstehungsart der Fläche durch zwei projectivische Tangentenebenen-Systeme zweiter Classe.

Wir bewiesen u. A., dass auf der Regelfläche unendlich viele Kegelschnitte liegen, und dass die Ebenen derselben eine allgemeine, developpable Fläche dritter Classe umhüllen, benutzten diese Eigenschaft zum Uebergang zu der noch nicht behandelten Regelfläche (ψ^4) vierten Grades, mit einer einfachen Leitgeraden; indem wir zeigten, dass, wenn ein der Fläche eingeschriebener Kegelschnitt in zwei Gerade degenerirt, dies mit allen geschieht, und alle ein und dieselbe Gerade — die einfache Leitlinie — zum Bestandteil haben.

Hierauf wandten wir uns der Beschreibung der interessanteren, der eben genannten reciproken Regelfläche Φ^4, mit einer dreifachen

Geraden zu; um im letzten Abschnitt jene Eigenschaften der Specialität dieser — der Fläche mit einer einfachen und dreifachen Geraden — zur Sprache zu bringen, durch welche sie sich von den früher erwähnten unterscheidet.

Halas in Ungarn, im December 1879.

I.

Die allgemeine rationale Regelfläche vierten Grades.

Art. 1. Zwei projectivische Tangentenebenen-Systeme T_1, T_2, auf zwei Kegeln K_1^2, K_2^2 zweiten Grades erzeugen eine Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ vierten Grades. Denn legen wir aus einem Punkte α einer beliebigen Geraden g die zwei an K_1^2 möglichen Tangentialebenen τ_1', τ_1'', so entsprechen diesen in T_2 zwei Ebenen, und zwar der Ebene τ_1' — die Ebene τ_2' und der Ebene τ_1'' — die Ebene τ_2''.

Diese Ebenen schneiden g bzw. in den Punkten β' und β'', welche, wie leicht einzusehen, mit α in zwei-zweideutiger Beziehung stehen. Lassen wir einen dieser drei Punkte die Gerade g durchlaufen, so bilden die ihm entsprechenden auf g eine Reihe, welche der durch ihr gebildeten zweideutig verwandt ist. Beide coaxialen Reihen haben also vier Doppelpunkte δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, und jeder derselben hat die Eigenschaft, dass sich in ihm zwei einander entsprechende Ebenen der erzeugenden Gebilde schneiden, d. h. dass er auf Erzeugenden $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{f}^4$ liegt. Die Gerade g schneidet vier Erzeugende der untersuchten Fläche — diese ist vom vierten Grade.

Der im 63ten Bande des Crelle'schen Journales befindlichen Abhandlung Schröters entnehmen wir, dass das Erzeugniss zweier projectivischer Tangenten-Systeme auf zwei Kegelschnitten eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten C_6^4 ist. Eine Ebene von allgemeiner Lage schneidet nun T_1^2 und T_2^2 in den bezeichneten, erzeugenden Gebilden, also $\mathfrak{f}^4$ selbst in einer Curve C_6^4, woraus unmittelbar folgt, dass $\mathfrak{f}^4$ eine Raumcurve D^3 dritter Ordnung zur Doppellinie hat. Dass diese Doppellinie nicht degenerirt, sehen wir wieder aus dem 38ten Artikel unserer Abhandlung: „Theorie der Regelflächen vierten Grades mit einer Doppelgeraden und einem Doppelkegelschnitt“ [1]), in welcher wir die Bedingungen unter welcher die D^3 in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt entwickeln; auch

---

1) Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien vom Februar 1879.

ist bei der Allgemeinheit der Annahme ein derartiges Zerfallen der Doppellinie ohnehin ausgeschlossen.

Eine durch eine Erzeugende gelegte Ebene bestimmt auf $\mathfrak{f}^4$ eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Eine Ebene E, welche durch zwei Erzeugende $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ gelegt wird, die sich selbstverständlich in einem Punkte α von D^3 schneiden, hat mit $\mathfrak{f}^4$ noch einen Kegelschnitt C^2 gemein, welcher α nicht enthält, jede der zwei Erzeugenden aber, ausser in ihren zweiten mit D^3 gemeinschaftlichen Punkten β' bzhw. β'', in noch je einem Punkte b' und b'' schneidet, welche Punkte die Berührungspunkte der Doppeltangentenebene E mit $\mathfrak{f}^4$ sind.

Durchläuft α die Curve D^3, so umhüllt E eine developpable dritter Classe, vierter Ordnung d^3, welche man auch als den geometrischen Ort der Geraden $\overline{b'b''}$ ansehen kann [1]).

Jeder Kegelschnitt C^2 schneidet D^3 in zwei Punkten β', β'', wogegen zwei willkürlich gewählte der unendlich vielen $\mathfrak{f}^4$ eingeschriebenen Kegelschnitte sich nicht schneiden.

Jede Erzeugende begegnet einem C^2 nur einmal, woraus folgt, dass man $\mathfrak{f}^4$ auch als Erzeugniss zweier projectivischer Punktsysteme auf zwei Kegelschnitten von möglichst allgemeiner Lage ansehen kann. Auch ist unmittelbar klar, dass $\mathfrak{f}^4$ durch D^3 und einen C^2 eindeutig gegeben ist, weil eine Gerade $\mathfrak{e}$, welche sich derart bewegt, dass sie constant eine zweipunktige Secante von D^3 und eine einpunktige von C^2 bleibt, dem Gesagten zufolge, eine $\mathfrak{f}^4$ erzeugt, welche D^3 zur Doppellinie hat und durch C^2 einmal geht.

Ebenso ist $\mathfrak{f}^4$ durch zwei Kegelschnitte und drei Erzeugende bestimmt, da die genannten Erzeugenden ebensoviele, einander entsprechende Punkte der früher erwähnten, auf allen C^2 von den Erzeugenden der $\mathfrak{f}^4$ bestimmten Punktsysteme fixiren.

Art. 2. Die reciproken Betrachtungen sind leicht zu bilden.

Der aus einem Punkt P des Raumes der $\mathfrak{f}^4$ umschriebene Kegel K_4^6, ist von der vierten Classe und sechsten Ordnung, er hat die aus P an d^3 gelegten drei Tangentialebenen zu Doppeltangentenebenen [2]).

---

1) Siehe Art. 5.

2) Die Classenzahl eines einer Regelfläche umschriebenen Kegels ist immer gleich der Gradzahl derselben; während die Ordnungszahl desselben gleich der Classenzahl des allgemeinsten ebenen Schnittes der Fläche ist.

Liegt P auf $\mathfrak{f}^4$, so degenerirt K_4^6 in einen Kegel K_3^4 dritter Classe, vierter Ordnung und ein Ebenenbüschel, welches die durch P laufende Erzeugende $\mathfrak{e}$ zur Axe hat. Der Kegel K_3^4 hat jene aus P an d^3 gelegte Tangentialebene zur Doppeltangentenebene, welche $\mathfrak{e}$ nicht enthält.

Für einen Punkt α der Doppellinie D^3 zerfällt K_4^6 in die durch die in α sich schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ bestimmten zwei Ebenenbüschel und einen Kegel K^2 zweiten Grades, welcher ausser der Ebene $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'')$ jede der zwei aus α und d^3 gelegten Tangentenebenen berührt.

Zu dem System dieser Kegel, welche sämmtlich ihre Spitzen auf D^3 haben, gehören auch die Trägerkegel K_1^2 und K_2^2 der $\mathfrak{f}^4$ erzeugenden Gebilde. Um dies zu beweisen, legen wir durch die Spitze α_1 von K_1^2 die zwei Tangentialebenen τ_2', τ_2'' an K_2^2; jeder entspricht auf K_1^2 eine Tangentialebene τ_1' bzw. τ_1'', welche Ebenen mit den ersten die zwei durch α_1 gehenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_1''$ von $\mathfrak{f}^4$ liefern. Es schneiden sich also sowohl in der Spitze von K_1^2 als auch in der von K_2^2 zwei Erzeugende, d. h. jede derselben liegt auf D^3.

Umgehrt ist aus der Bemerkung, dass jede Erzeugende der Fläche einen Kegel K^2 berührt, und ein solcher durch diesen Berührungspunkt eindeutig bestimmt ist, unmittelbar klar, dass irgend zwei der Fläche umschriebene Kegel zweiten Grades als Träger zweier projectivischer $\mathfrak{f}^4$ erzeugender Tangentenebenen-Systeme angenommen werden können.

Aus dieser Tatsache folgt die Eigenschaft der Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ durch ihre Doppellinie D^3 und fünf Erzeugende $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ ... $\mathfrak{e}_5$ eindeutig bestimmt zu sein. Denn legen wir durch irgend einen Punkt α von D^3 und die fünf Erzeugenden die Ebenen E_1, E_2 ... E_5, so bestimmen diese einen $\mathfrak{f}^4$ umschriebenen Kegel K^2, der, wenn α die Curve D^3 durchläuft, die behandelte Regelfläche zur Enveloppe hat. Jede der gegebenen Erzeugenden kann durch einen Punkt ersetzt werden, weil durch einen solchen eine Erzeugende von $\mathfrak{f}^4$ als zweipunktige Secante von D^3 vollkommen fixirt ist.

Art. 3. Die zwei Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, welche sich in einem Punkte α von D^3 schneiden, treffen diese Curve noch in je einem Punkte β', β''; welche wir kurz als die dem Punkte α conjugirten bezeichnen wollen.

Wir können aber auch β' und β'' als einander entsprechende Punkte betrachten, diese Zuordnung gibt uns ein Mittel an die Hand zu bestimmen, wie oft die sich in einem Punkte α von D^3 schnei-

denden Erzeugenden coincidiren, d. h. wie viele Cuspidalpunkte die Regelfläche besitzt.

Die zweite Erzeugende $\mathfrak{e}_1$, welche durch β' läuft, schneidet D^3 noch in α_1, durch welchen Punkt auch noch eine, der Curve D^3 in β_1'' begegnende Erzeugende $\mathfrak{e}_1'$ geht. Da der Punkt β_1'' in derselben Weise wie β'' dem Punkte β' zugeordnet ist, sehen wir, dass die Beziehung zwischen β' und β'' eine zwei-zweideutige ist. Projiciren wir D^3, und also alle Punkte β', β'' aus irgend einem Punkte α_n dieser Curve; so erhalten wir einen Kegel zweiten Grades $(\alpha_n D^3)$, dessen Erzeugende $\overline{\alpha_n\beta'}$, $\overline{\alpha_n\beta''}$, ... zwei-zweideutig auf einander bezogen sind. Beide Strahlensysteme haben bekanntlich vier Doppelelemente, d. h. es fällt $\overline{\alpha_n\beta'}$ viermal mit $\overline{\alpha_n\beta''}$ zusammen, wenn sie den Kegel $(\alpha_n D^3)$ beschreibt. Ebenso oft coincidirt notwendig auch β' mit β'', da ja jeder Kante des Kegels $(\alpha_n D^3)$ die Curve D^3 nur in einem variablen Punkt schneidet.

Wir können jedoch auch in anderer Weise zeigen, dass unter allen Erzeugenden von $\mathfrak{f}^4$, viere existiren, deren jede aus zwei unendlich nahen, in einem Punkt von D^3 sich schneidenden Erzeugenden besteht.

Zu dem Ende legen wir durch $\overline{\alpha_n\alpha}$ und die ihr conjugirten Kanten $\overline{\alpha_n\beta'}$ und $\overline{\alpha_n\beta''}$ die Ebenen $(\alpha_n\alpha\beta')$ und $(\alpha_n\alpha\beta'')$. Die Gesammtheit derselben umhüllt den $\mathfrak{f}^4$ aus α_n umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2, welcher $(\alpha_n D^3)$ in vier Erzeugenden $\overline{\alpha_n c_1}$, $\overline{\alpha_n c_2}$, $\overline{\alpha_n c_3}$ und $\overline{\alpha_n c_4}$, und daher D^3 in den vier Punkten c_1, c_2, c_3, c_4 schneidet. Um unter Vermittlung von K^2 jene zwei Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ zu construiren, welche sich in dem Punkt α von D^3 begegnen, legen wir durch $\overline{\alpha_n\alpha}$ die zwei Tangentialebenen an K^2, sie schneiden D_1^3 in den Punkten β' bzhw. β'', welche mit α verbunden bereits $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ liefern. Wir sehen auch, dass, wenn α ausserhalb K^2 lag, die aus ihm an den Kegel gelegten Tangentialebenen und mithin auch die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ reell getrennt sind. Bewegt sich α auf D^3 so lange fort, bis er mit c_1 coincidirt; so fallen auch die Ebenen $(\alpha_n\alpha\beta')$ und $(\alpha_n\alpha\beta'')$ mit der K^2 längs $\overline{\alpha_n c_1}$ berührenden Ebene $(\alpha_n c_1 d_1)$ zusammen. Die Punkte β' und β'' rücken unendlich nahe, einen Doppelpunkt d_1 der durch sie bestimmten zweideutigen Punktsysteme bildend; die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ werden zu benachbarten, unendlich nahen in c_1 sich schneidenden Erzeugenden. Sie bilden eine s i n g u l ä r e Erzeugende $\overline{c_1 d_1} \equiv e_1$ von $\mathfrak{f}^4$, welche die Eigenschaft hat, dass die durch sie und die Tangente t_1 von D^3 in d_1 bestimmte Ebene v_1 die Regelfläche längs ihrer ganzen Ausdehnung berührt. Die Ebene v_1 selbst wird C u s p i-

dalebene genannt; sie ist in ihren Eigenschaften dem Cuspidalpunkt c_1 reciprok.

Die charakteristischen Eigenschaften des letzteren sind die folgenden:

Jede durch ihn gehende Gerade ist eine eigentliche Tangente der Regelfläche, da sie in ihm die zwei unendlich nahen, in e_1 vereinigten Erzeugenden schneidet. Jede Ebene des Büschels e_1 berührt die Regelfläche in ihm; weil die e_1 benachbarte Erzeugende diese in c_1 trifft. Die Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ durchschneidet sich in irgend einem Punkte α von D^3; der Winkel, unter welchem dies geschieht, wird durch die zwei Tangentialebenen B_1, B_2 im bezeichneten Punkt gemessen, welche Ebenen wieder durch die Tangente τ, von D^3 in α, und durch diesen Punkt laufenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ bzhw. $\mathfrak{e}''$ gegeben sind. Für den Punkt c_1 sind nun $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ identisch mit e_1, also die Ebenen B_1, B_2 mit $(e_1\tau_1)$, wenn τ_1 die Tangente von D^3 in c_1 ist — die Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ berührt sich im Punkte c_1 selbst.

Bewegt sich α in der eingeschlagenen Richtung auf D^3 über c_1 fort, so gelangt er in das Innere des Kegels K^2. Jetzt ist es nicht möglich aus ihm an K^2 Tangentialebenen zu legen, diese sind und mit ihnen die zwei sich in α begegnenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ imaginär. Der Punkt α ist im Gegensatz zu einem ausserhalb K^2 gelegenen Punkt von D^3 ein ideeller Doppelpunkt der Fläche. Wir sehen also, dass die vier Cuspidalpunkte c_1, c_2, c_3, c_4 von $\mathfrak{f}^4$ (jeder dieser Punkte ist ja ein solcher), die Doppellinie D^3 in ebensoviele Strecken teilen, von welchen je zwei angrenzende ungleichartig, d. h. bzhw. eigentlich und ideell sind.

Die Cuspidalebene v_1 schneidet $\mathfrak{f}^4$ in einem eigentlichen Kegelschnitt C^2, der e_1 ausser in d_1 in einem Punkte i_1 schneidet. Jede in v_1 durch i_1 gezogene Gerade hat in diesem Punkt mit $\mathfrak{f}^4$ drei unendlich nahe Punkte gemein, weshalb wir ihn und jeden der drei andern, in derselben Weise construirten Punkte i_2, i_3, i_4 Inflexionspunkt der Fläche nennen.

Art. 4. Legen wir durch einen Punkt P und eine Erzeugende $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{f}^4$ die Ebene E, so berührt diese die Fläche in einem auf $\mathfrak{e}$ liegenden Punkt b. Lassen wir $\mathfrak{e}$ nach einander alle möglichen Lagen einnehmen, so umhüllt bekanntlich E den $\mathfrak{f}^4$ aus P umschriebenen Kegel, den wir auch als geometrischen Ort von $\overline{Pb}$ ansehen können. Coincidirt $\mathfrak{e}$ mit einer singulären Erzeugenden e, so fällt $\overline{Pb}$ mit der Verbindungslinie des Punktes P und des auf e liegenden Cuspidalpunktes c zusammen.

Jeder der Regelfläche umschriebene Kegel (K_4^6, K_4^5, K_4^4, K_4^3, K_3^4, K_3^3, K^2) berührt, dem Gesagten zufolge, die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten. Wie leicht zu beweisen ist, gilt dieser Satz in seiner ganzen Allgemeinheit nur für die Kegel K_4^6, K_3^4 und K^2, d. h. nur diese gehen durch alle vier Cuspidalpunkte; während K_4^5, K_4^4 und K_4^3, deren Spitzen bzhw. in einer, zwei oder drei Cuspidalebenen liegen, resp. drei, zwei und einen Cuspidalpunkt enthalten.

Für die Kegel K^2, deren Spitzen sich auf D^3 befinden, ist noch zu erwähnen, dass sich innerhalb derselben nur imaginäre [1]) einfache- und ideelle Doppel-Punkte befinden; während jeder ausserhalb derselben gelegene Punkt von $\mathfrak{f}^4$ reell und eigentlich ist.

Dies beachtend, betrachten wir den Schnitt von $\mathfrak{f}^4$ mit irgend einer Fläche $\mathfrak{f}^n$ $n$ter Ordnung. Er ist von der $4n$ten Ordnung und hat die $3n$ Schnittpunkte α von D^3 und $\mathfrak{f}^n$ zu Doppelpunkten. Die Tangenten in einem derselben erhalten wir als die Schnittlinien t_1 und t_2 der in ihm an $\mathfrak{f}^4$ gelegten Tangentialebenen B_1, B_2 mit der Tangentenebene T von $\mathfrak{f}^n$. Enthält $\mathfrak{f}^n$ einen Cuspidalpunkt c von $\mathfrak{f}^4$, so hat die Schnittlinie R^{4n} beider Flächen in ihm einen Doppelpunkt mit coincidirenden Tangenten $t_2 \equiv t_1 \equiv t$; weil für einen solchen B_1 und B_2 zusammenfallen. Die Curve R^{4n} hat die Tendenz im Punkte c der durch ihre Tangente t angegebenen Richtung zu folgen; weil aber innerhalb eines K^2 kein reeller einfacher Punkt der Fläche $\mathfrak{f}^4$ liegt, was doch sein müsste, wenn R^{4n} im Punkt c in das Innere von K^2 eindränge, d. h. einen Berührungsknoten mit einer von e verschiedenen Tangente hätte; sehen wir, dass jede auf $\mathfrak{f}^4$ liegende Curve, welche durch einen Cuspidalpunkt läuft, entweder in ihm einen Rückkehrpunkt hat, oder die durch ihn gehende singuläre Erzeugende berührt.

Dieser Satz gilt natürlich auch für ebene Curven. Ihm entnehmen wir, dass Regelfläche $\mathfrak{f}^4$, ihren vier Cuspidalpunkten entsprechend, vier ebene Curven C_3^4, vierter Ordnung, dritter Classe, mit drei Rückkehrpunkten hat; dass ferner jede Tangentialebene des aus einem Cuspidalpunkt c der $\mathfrak{f}^4$ umschriebenen Kegels K^2, die Fläche in einer Curve C_3^3 dritter Ordnung schneidet, die c zum Rückkehrpunkt hat. Jede Curve C^3 hingegen, welche eine durch e gehende Ebene besitzt, berührt diese singuläre Erzeugende in c.

Die Curve R^{4n} schneidet jede Erzeugende in n und jeden $\mathfrak{f}^4$ eingeschriebenen Kegelschnitt C^2 in $2n$ Punkten. Von den n Schnitt-

---

1) Weil jede Erzeugende einen jeden Kegel K^2 berührt.

punkten derselben mit einer singulären Erzeugenden, in welchen sie die durchgehende Cuspidalebene v berührt, ist jeder für v doppelt zu zählen, weil eben e als Schnitt von v mit $\mathfrak{f}^4$ doppelt zu zählen ist.

Geht nun $\mathfrak{f}^n$, also auch R^{4n} durch i, den zweiten Schnittpunkt von e mit dem in v liegenden Kegelschnitt C^2, den wir früher als Inflexionspunkt von $\mathfrak{f}^4$ bezeichnet haben; so hat sie mit e ausser i, $2n-2$ Punkte gemein und schneidet C^2 in i und in noch $2n-1$ Punkten. Da aber R^{4n} von v in $4n$ Punkten getroffen wird, sehen wir, dass die fehlenden drei Punkte in i vereinigt sind.

Jede der Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ eingeschriebene (ebene oder räumliche) Curve berührt die Cuspidalebenen in Punkten der singulären Erzeugenden. Geht sie durch einen Inflexionspunkt der Fläche, so hat sie in ihm, im Allgemeinen bzhw. einen Inflexionspunkt, oder die durchgehende Cuspidalebene zur Osculationsebene.

Art. 5. Die Berührungscurve B^6 des aus einem Punkt P des Raumes der $\mathfrak{f}^4$ umschriebenen Kegels $K_4{}^6$ ist von der sechsten Ordnung; weil in jeder Ebene des Bündels P sechs Kanten von $K_4{}^6$ sind, und auf jeder ein Punkt von B^6, nämlich ihr Berührungspunkt mit $\mathfrak{f}^4$ liegt. Die sechs Rückkehrkanten $r_1, r_2 \dots r_6$ sind Tangenten der Berührungscurve, da diese im Allgemeinen keinen wirklichen Doppelpunkt, also auch keinen Rückkehrpunkt besitzt [1]); sie liegen auf einem Kegel zweiten Grades und sind die in P sich schneidenden Haupt- oder Inflexionstangenten der Regelfläche $\mathfrak{f}^4$. Dass dem wirklich so ist, sehen wir, indem wir durch r_1 eine Ebene E legen; sie schneidet $K_4{}^6$, weil r_1 als Schnitt doppelt zu zählen ist, noch in vier Kanten $s_1, s_2 \dots s_4$, deren jede als einfache Kante von $K_4{}^6$ auch eine einfache Tangente der Schnittcurve $C_6{}^4$ von E mit $\mathfrak{f}^4$ ist; während r_1, weil sie für zwei s gilt und nur einen Berührungspunkt hat, eine Inflexionstangente von $C_6{}^4$, also auch von $\mathfrak{f}^4$ sein muss.

Durch eine Gerade g des Bündels P kann man vier Tangentialebenen an $K_4{}^6$ legen, und in jeder liegt eine Tangente der Curve B^6. Die Gerade g wird also ausser von den sechs, sich in P schneidenden Tangenten von vier Tangenten, und zwar bzhw. in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 getroffen. Lassen wir g sich um P drehend, eine Ebene E von möglichst allgemeiner Lage beschreiben, so erzeugen die Punkte $p_1 \dots p_4$ eine Curve zehnter Ordnung, welche in P einen

---

1) Wenn man eine Raumcurve projicirt, so bilden sich die Berührungspunkte der aus dem Centrum an die Curve gelegten Tangenten als Rückkehrpunkte ab. Umgekehrt entspricht, im Allgemeinen, einer Spitze des Bildes eine aus dem Centrum an die Curve gelegte Tangente.

sechsfachen Punkt hat, und der Schnitt von E mit der durch die Tangenten von B^6 gebildeten developpablen Fläche ist. Diese ist also von der zehnten Ordnung und B^6 selbst vom zehnten Rang.

Befindet sich P auf einer Tangente t der Doppellinie D^3, so hat B^6 im Berührungspunkt b derselben einen wirklichen Doppelpunkt. Ist b ein Cuspidalpunkt, so ist er für B^6 ein Rückkehrpunkt.

Ist P ein Punkt der Regelfläche, so ist die Berührungscurve B^5 von der fünften Ordnung und dem achten Rang; sie berührt in P die eigentliche Haupttangente der Fläche. Ebenso sind die Doppelpunktstangenten der Berührungscurve B^4 des aus einem Punkt α von D^3 der $\mathfrak{f}^4$ umschriebenen Kegels K^2 welche in α einem Doppelpunkt hat, Inflexionstangenten der Fläche.

Während alle diese Berührungscurven, mit Ausnahme jener mit einem Rückkehrpunkt, die vier singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten tangiren; tun dies die Berührungscurven der Kegel $K_4{}^5$, $K_4{}^4$ und $K_4{}^3$, welche bzhw. von der 5, 4 und 3ten Ordnung sind, nur teilweise, d. h. sie berühren resp. nur 3, 2 und 1 singuläre Erzeugende.

In Curven dritter Ordnung wird $\mathfrak{f}^4$ auch von jenen Kegeln K^2 berührt, welche einen der Punkte d_1, d_2, d_3, d_4 zur Spitze haben.

Reciprok den Berührungscurven sind die Berührungsflächen, deren bemerkenswerteste die Asymptotenfläche der Regelfläche ist. Sie ist eine developpable Fläche sechster Classe, zehnter Ordnung und berührt die vier Cuspidalebenen längs der singulären Erzeugenden.

An dieser Stelle wollen wir auch noch der im ersten Artikel besprochenen developpablen Fläche d^3 Erwähnung tun.

Eine diese längs einer Erzeugenden ϱ berührende Ebene E ist Doppeltangentenebene der Regelfläche $\mathfrak{f}^4$; sie schneidet diese in zwei sich in einem Punkt α von D^3 begegnenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ und einem Kegelschnitt C^2. Zwei von den Schnittpunkten dieses Kegelschnittes mit den Erzeugenden sind die α zugeordneten Punkte β' und β'' von D^3; wogegen die andern zwei die Berührungspunkte b' und b'' seiner Ebene mit $\mathfrak{f}^4$ sind. Die Verbindungslinie $\overline{b'b''}$ ist, als die Schnittlinie der zwei Ebenen E und E', von welchen die letztere durch die zwei in dem α unendlich nahen Punkt α_1 laufenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2''$ gelegt ist, die also als Tangentialebene von d^3 der Ebene E unmittelbar folgt — die mit ϱ bezeichnete Erzeugende von d^3.

Durch einen Punkt m_1 von C^2 ist eine Erzeugende $\mathfrak{e}_1$ von $\mathfrak{f}^4$ fixirt; sie schneidet D^3 in zwei Punkten, welche zwei weitere, C^2 in m_1 bzhw. m_3 schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ bestimmen. Die Punkte m_1 und m_2, m_3 stehen in zwei-zweideutiger Beziehung; die Verbindungslinien $\overline{m_1 m_2}$ und $\overline{m_1 m_3}$ umhüllen — wenn m_1 den Kegelschnitt C^2 durchläuft — einen Kegelschnitt J^2 *), welcher, weil sich auch b' und b'' — b' und β' — sowie b'' und β'' in angegebener Weise entsprechen, die Geraden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ und $\overline{b'b''} \equiv \varrho$ zu Tangenten hat.

Jede der Tangenten $\overline{m_1 m_2}$, $\overline{m_1' m_2'}$ ... des Kegelschnittes J^2 befindet sich in einer Tangentenebene E, E' ... der Fläche d^3; und zwar bestimmen zwei auf einander folgende dieser Ebenen auch zwei benachbarte in einem Punkte m von J^2 sich schneidende Tangenten. Daraus und aus dem Umstand, dass zwei unendlich nahe Tangentialebenen [2]) der Fläche d^3 sich in einer Erzeugenden derselben schneiden, geht hervor, dass jeder Punkt m von J^2 ein Punkt dieser Fläche ist, und dass daher J^2 und ϱ den Gesammtschnitt ihrer Ebene E mit d^3 bilden [3]).

Der Kegelschnitt J^2 schneidet den Kegelschnitt C^2 in vier Punkten v, deren geometrischer Ort eine Raumcurve vierter Ordnung ist. Die Punkte b' und b'' — deren jeder für die Ebene E doppelt zu zählen ist — und die Berührungspunkte der Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ mit J^2 erfüllen eine Raumcurve B^1 sechster Ordnung, von der Eigenschaft, dass sich in allen ihren Punkten die Flächen $\mathfrak{f}^4$ und d^3 berühren.

Nachdem das oben Gesagte für jeden $\mathfrak{f}^4$ eingeschriebenen Kegelschnitt C^2 und dem ihm zugeordneten Kegelschnitt J^2 gilt, kann man d^3 auch als geometrischen Ort von J^2 betrachten [4]).

Jene Ebene E, welche durch eine singuläre Erzeugende e und die diese schneidende Erzeugende $\mathfrak{e}$ gelegt ist, berührt $\mathfrak{f}^4$ im Cuspidalpunkt c und einem Punkt b von $\mathfrak{e}$; also d^3 längs $\overline{cb}$. Daraus er-

---

*) Siehe einen Beweis im 7. Art. der Abhandlung: „Theorie der Regelflächen 4ten Grades etc.“.

2) Es ist hier immer nur von solchen Tangentenebenen der Fläche d^3 die Rede, welche sie längs Erzeugenden berühren.

3) Aus dieser Tatsache folgt auch, dass d^3 eine allgemeine developpable Fläche dritter Classe ist.

4) Die Erzeugenden von $\mathfrak{f}^4$ bestimmen auf irgend einer ihr eingeschriebenen ebenen Curve $C_4{}^6$ zwei zweideutige Systeme. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen in diesem Falle eine Curve vierter Ordnung, dritter Classe — den Schnitt der Ebene $(C_6{}^4)$ mit d^3.

hellt, dass B^6 durch den Cuspidalpunkt c läuft, und zwar, nach Art. 3., hier die singuläre Erzeugende berührt.

Die Fläche d^3 tangirt auch die vier Cuspidalebenen, und zwar längs der in den Inflexionspunkten an die in ihnen liegenden Kegelschnitte gezogenen Tangenten.

Die Rückkehrcurve R^3 der developpablen Fläche wird von dem Berührungspunkt r des Kegelschnittes J^2 und der Geraden $\overline{b'b''}$ beschrieben.

Die reciproken Betrachtungen lehren, dass D^3 eine allgemeine Raumcurve dritter Ordnung ist, dass sie von einer Berührungscurve sechster Ordnung (welcher ein Berührungskegel zukommt), ausser in den vier Cuspidalpunkten in sechs variablen Punkten geschnitten wird etc.

Art. 6. Eine Haupttangente der Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ schneidet in ihrem Inflexionspunkt drei benachbarte Erzeugende $\mathfrak{e}$; und und umgekehrt sind alle Transversalen dieser Haupttangenten, und ihr geometrischer Ort das sich $\mathfrak{f}^4$ längs $\mathfrak{e}$ anschmiegende Hyperboloid.

Da sich in einem Punkte P des Raumes sechs Haupttangenten der behandelten Fläche schneiden, und jede eine Erzeugende des Schmiegungshyperboloids ist, welche die durch ihren Berührungspunkt laufende Erzeugende zur Berührungserzeugenden hat, kann man durch jeden Punkt sechs Schmiegungshyperboloide legen.

Reciprok wird jede Ebene von sechs Hyperboloiden genannter Art berührt.

Durch einen Punkt der Fläche selbst kann man nur drei Hyperboloide legen, welche sich derselben längs einer, nicht durch den Punkt laufenden Erzeugenden anschmiegen etc.

Art. 7. Von den an der Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ vorzunehmenden Constructionen wollen wir nur einige beispielsweise erwähnen und für's Allgemeine bemerken, dass die Schwierigkeiten bei der Ausführung der Constructionen höheren Grades, welche für jeden Fall angedeutet werden können, nur iu der Undurchführbarkeit der Hilfsconstructionen ihren Grund haben.

Für's Folgende wollen wir voraussetzen, dass $\mathfrak{f}^4$ durch eindeutig bestimmende Daten, etwa die Doppellinie D^3 und fünf Erzeugende (der Punkte) $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ ... $\mathfrak{e}_5$ gegeben ist.

Will man die Schnittpunkte einer Geraden G mit $\mathfrak{f}^4$ construiren,

so lege man durch G eine beliebige Ebene E; sie schneidet D^3 in den Punkten Δ_1, Δ_2, Δ_3 und die gegebenen Erzeugenden in p_1, p_2 ... p_5. Ihr Schnitt mit $\mathfrak{f}^4$ ist eine Curve $C_6{}^4$, vierter Ordnung, welche Δ_1, Δ_2, Δ_3 zu Doppelpunkten hat, durch die p_1, p_2 ... p_5 einfach geht, und den Schnitt T^2 der Ebene E mit irgend einem $\mathfrak{f}^4$ umschriebenen, aus den gegebenen Daten leicht zu construirenden Kegel K^2 zum vierfach berührenden Kegelschnitt hat. Wie aus den Abhandlungen: „Ueber Curven 4ter Ordnung mit 3 Doppelpunkten" und „Ueber vierfach berührende Kegelschnitte der Curven 4ter Ordnung etc." [1]) ersichtlich ist, kann man unter Vermittlung von T^2 die Schnittpunkte G mit $C_6{}^4$, also auch mit $\mathfrak{f}^4$, ohne $C_6{}^4$ zu zeichnen, insoferne bestimmen, als man ihre Construction auf die Bestimmung der Schnitpunkte von T^2 mit dem G „zugeordneten" Kegelschnitt zurückführt.

Wie in Art. 7. der erst erwähnten Arbeit gezeigt wurde, kann man die Tangente in einem beliebigen Punkt einer $C_6{}^4$ zeichnen, ohne die Curve zu construiren; man kann also auch in einem beliebigen Punkt der Fläche an sie die Tangentialebene legen.

Wichtig ist die Construction der Cuspidalpunkte [2]); für die gemachten Prämissen haben wir ihre Bestimmung in Art. 3. angegeben. Diese kann auch in derselben Weise geschehen, wenn $\mathfrak{f}^4$ durch zwei Kegelschnitte $C_1{}^2$ und $C_2{}^2$ und drei Erzeugende $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ gegeben ist. Die Schnitte von $C_2{}^2$ mit $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, nämlich β_1, β_2, β_3, entsprechen den homologen Punkten α_1, α_2, α_3 von $C_1{}^2$ projectivisch; sie fixiren mit diesen die erzeugenden Punktsysteme eindeutig. Legen wir durch die Tangente τ_1 von $C_1{}^2$ in α_1 jene zwei Ebenen, welche den aus α_1 dem $C_2{}^2$ umschriebenen Kegel berühren, so geht durch ihre Berührungspunkte b_1 bzhw. b_2 mit $C_2{}^2$ je eine Erzeudende $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, welche auf $C_1{}^2$ die zwei Punkte a_1 und a_2 bestimmen. Diese Punkte ordnen wir dem Punkte α_1 zu, sie bilden, wenn sich α_1 auf $C_1{}^2$ bewegt, eine Reihe, welche mit der von α_1 gebildeten zwei-zweideutig verwandt ist. Beide Reihen haben vier Doppelpunkte, und daher $\mathfrak{f}^4$ ebenso viele singuläre Erzeugende. Denn es ist klar, dass jene Erzeugende e, welche durch einen der Doppelpunkte läuft, mit den Tangenten τ' und τ'' der $C_1{}^2$, $C_2{}^2$ in den Schnittpunkten dieser mit ihr, in einer Ebene — einer Cuspidalebene von $\mathfrak{f}^4$ liegt.

---

1) Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. z. Wien vom 23. Januar und 3. Juli 1879.

2) Für die in der Abhandlung: „Theorie der Regelflächen vierten Grades mit einer Doppelgeraden und einem Doppelkegelschnitt" behandelten Flächen zerfällt die Bestimmung dieser Singularitäten in zwei quadratische Aufgaben. Siehe die Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wiss. z. Wien vom Februar 1879.

Die Ebene (C_1^2) schneidet den Kegelschnitt C_2^2 in zwei Punkten β_I, β_{II}, welchen auf C_1^2 die Punkte α_I bzhw. α_{II} zukommen. Die Erzeugenden $\overline{\alpha_I \beta_I}$ und $\overline{\alpha_{II} \beta_{II}}$ treffen sich in einem Doppelpunkt Δ der Fläche, welcher mit fünf Erzeugenden, etwa $\mathfrak{e}_1$, e_1, e_2, e_3 und e_4 einen Kegel K^2 bestimmt, der die letzten vier Erzeugenden in den Cuspidalpunkten der Regelfläche berührt.

Die zweiten Schnittpunkte Δ_1 und Δ_2 der in der Ebene (C_1^2) liegenden Erzeugenden und C_1^2 sind auch Punkte der Doppellinie D^3, sie bestimmen im Verein mit den vier Cuspidalpunkten diese eindeutig. Auch ist D^3 durch die Punkte Δ, Δ_1, Δ_2 und die in gleicher Weise für die Ebene (C_2^2) zu bestimmenden Punkte Δ', Δ_1', Δ_2' vollkommen fixirt.

Diese wenigen Beispiele mögen genügen. In ähnlicher Weise werden alle andern Probleme, wenn schon nicht graphisch durchgeführt, so doch theoretisch gelöst werden können.

II.

Die Regelfläche vierten Grades mit einer einfachen geraden Leitlinie und einer Doppellinie dritter Ordnung, und die ihr reciproke Regelfläche mit einer dreifachen Geraden.

Art. 8. Die zwei Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ der Regelfläche $\mathfrak{f}^4$, welche sich in einem Punkte α der Doppellinie D^3 begegnen, treffen diese noch in zwei Punkten β' resp. β''. Die durch sie bestimmte Ebene E schneidet die Fläche in einem eigentlichen Kegelschnitt C^2, welcher die Punkte β' und β'' enthält, $\mathfrak{e}'$ noch in b' und $\mathfrak{e}''$ noch in b'' trifft.

Angenommen, der Kegelschnitt C^2 würde degeneriren, so könnte dies nur in der Weise geschehen, dass er in die Verbindungslinie $\overline{\beta' \beta''} \equiv \mathfrak{e}'''$ der Punkte β' und β'', und in eine Gerade L zerfällt, welche mit D^3 keinen Punkt gemein hat.

Irgend eine durch L gelegte Ebene E_n bestimmt mit D^3 drei Punkte α_n, β_n', β_n'' und schneidet $\mathfrak{f}^4$ in einer Curve dritter Ordnung, welche diese Punkte zu Doppelpunkten haben muss, also aus den drei Verbindungslinien $\mathfrak{e}_n'$, $\mathfrak{e}_n''$ und $\mathfrak{e}_n'''$ derselben besteht.

Das Zerfallen eines $\mathfrak{f}^4$ eingeschriebenen Kegelschnittes C^2 hatte also das aller andern zur Folge. Ein Teil desselben ist als variable zweipunktige Secante $\mathfrak{e}'''$ von D^3 eine Erzeugende; während der zweite Teil, nämlich die Gerade L, fix ist,

und da durch jeden ihrer Punkte nur eine zweipunktige Secante von D^3 läuft, als einfache Leitlinie der durch obige Annahme specialisirten, nun mit Ψ^4 zu bezeichnenden Fläche erscheint.

Die Regelfläche Ψ^4 ist durch ihre gerade Leitlinie L und ihre Doppellinie D^3 vollkommen bestimmt, da sie durch Gleiten einer Geraden $\mathfrak{e}$ an diesen Linien erzeugt wird.

Jede durch L gelegte Ebene E ist eine dreifache Tangentialebene der Fläche Ψ^4, ihre Berührungspunkte γ', γ'', γ''' sind die Schnittpunkte der drei in ihr liegenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}'''$ mit L; sie bilden auf dieser Geraden eine kubische Involution $L(\gamma)$, welche mit der von den Schnittpunkten α, β', β'' der E mit D^3 gebildeten kubischen Involution projectivisch ist. Die letztere Involution $D^3(\alpha\beta)$ erzeugt die Regelfläche Ψ^4, ihre vier Verzweigungspunkte sind die Cuspidalpunkte der Fläche [1]).

Drehen wir die Ebene E so lange, bis β' und β'' coincidiren, also einen der vier Doppelpunkte d von $D^3(\alpha\beta)$ bilden; so fallen auch die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, sich um den mit E variablen Punkt α drehend, zusammen. Sie bilden eine singuläre Erzeugende e; α wird Cuspidalpunkt C, und E zur Cuspidalebene V. Diese, welche Ψ^4 in allen Punkten von e berührt, gehört dem Büschel L an; ihr auf dieser befindlicher Berührungspunkt δ, der Schnitt von L mit e ist ein Inflexionspunkt der Fläche, und ein Doppelpunkt — oder sich selbst entsprechender Punkt — der Punkt-Involution $L(\gamma)$.

Diese Auseinandersetzungen zeigen uns den Weg die genannten Singularitäten in einfacher Weise zu construiren.

Wir umschreiben aus einem beliebigen Punkt γ der Geraden L der Doppellinie D^3 den Kegel; dieser ist von der dritten Ordnung und vierten Classe, und hat vier durch L gehende Tangentialebenen V_1, V_2, V_3 und V_4 [2]). Jede dieser Ebenen, so V_1, berührt D^3 in einem Punkte d_1 und schneidet sie in einem Punkt c_1. Die Verbindungslinie beider Punkte, von welchen c_1 ein Cuspidalpunkt ist, ist

---

1) Wir verweisen den Leser an dieser Stelle ein für alle Mal auf die, die kubischen Involutionen eingehend behandelnde: „Theorie der kubischen Involutionen" v. Prof. Dr. Emil Weyr. Abhandlg. d. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. z. Prag. 1871.

2) Bezüglich der Durchführung dieser Constructionen siehe: „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde" von Prof. Emil Weyr. Leipzig, B. G. Teubner 1869; und unsern Aufsatz: „Ueber rationale ebene Curven dritter und vierter Ordnung" Sitzb. d. k. Akademie der Wissensch. z. Wien. Octoberheft 1879.

eine singuläre Erzeugende e_1; ihr Schnittpunkt d_1 mit L ein Inflexionspunkt.

Die Tangente $\mathfrak{e}_1$ von D^3 in d_1 ist auch eine Erzeugende von Ψ^4, und zwar als eine Verbindungslinie der unendlich nahen in d_1 vereinigten, sich entsprechenden Punkte von $D^3(\alpha\beta)$; sie trifft L in einem Punkt z_1, welcher der δ_1 entsprechende Verzweigungspunkt von $L(\gamma)$ ist.

Art. 9. Den drei Schnittpunkten α, β', β'' einer Ebene E des Büschels L und der Doppellinie D^3 entsprechend, wird E von drei Ψ^4 umschriebenen Kegeln zweiten Grades K_1^2, K_2^2 und K_3^2 berührt. Der Kegel K_1^2, dessen Spitze α ist, hat $\overline{\alpha\gamma'}$, die Verbindungslinie seiner Spitze und des Schnittes γ' der nicht durch α gehenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ mit L zur Berührungskante.

Die Berührungskanten von K_2^2 und K_2^2 sind bzhw. $\overline{\beta'\gamma''}$ und $\overline{\beta''\gamma'''}$; sie schneiden sich in einem Punkt α_1 und die Gerade $\overline{\alpha\gamma'}$ resp. in β_1' und β_1''.

Dreht sich E um L, so erzeugen die Geraden $\overline{\alpha\gamma_{,}}$, $\overline{\beta'\gamma''}$ und $\overline{\beta''\gamma'''}$ eine Regelfläche Ψ_1^4, welche L zur Leitlinie hat, in allen Punkten derselben die Fläche Ψ^4 berührt und die von den Punkten α_1, β_1', β_1'' beschriebene Curve D_1^3 dritter Ordnung zur Doppellinie hat.

Die Beziehungen zwischen den Schnittpunkten der Ebene E mit D^3 und D_1^3 lassen sich durch die folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$(\beta', \gamma', \beta_1'', \beta_1') = (\beta'', \gamma'', \beta_1'', \alpha_1) = (\alpha, \gamma''', \beta_1', \alpha_1) = -1$$

Fällt E mit einer Cuspidalebene V der Fläche Ψ^4 zusammen, so coincidiren die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ mit e, der Punkt α wird zum Cuspidalpunkt c, die Punkte β' und β'' rücken unendlich nahe und bilden den Doppelpunkt d_1, während in derselben Weise δ_1 von γ' und γ'' constituirt wird.

Dieses Zusammenfallen der bezeichneten Elemente von Ψ^4 hat eine Coincidenz der homologen Elemente von Ψ_1^4 zur Folge. Die Erzeugenden $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_1''$ rücken unendlich nahe und fallen mit der von $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ gebildeten singulären Erzeugenden e zusammen; diese gehört also in derselben Eigenschaft auch Ψ_1^4 an. Ebenso bleibt V eine Cuspidalebene von Ψ_1^4, und hat auch diese Fläche mit Ψ_1^4 den Inflexionspunkt δ gemein. Der Punkt c spielt für Ψ_1^4 die Rolle des Punktes d_I, wogegen jener Cuspidalpunkt c_I dieser Fläche, welcher auf e liegt, dem Punkte c bezüglich d und δ harmonisch conjugirt ist.

Der Fläche Ψ_1^4, diese als erste Fläche angenommen, gehört wieder in derselben Weise, wie sie Ψ^4 zugeordnet ist, eine Fläche Ψ_2^4 an; dieser entspricht wieder eine Regelfläche Ψ_3^4, und so in infinitum.

Alle diese unendlich vielen Flächen sind derselben Gattung, berühren sich längs der einfachen Leitlinie L und haben dieselben vier singulären Erzeugenden und Cuspidalebenen. Zwischen einem Inflexionspunkt δ, der ebenfalls allen Ψ_n^4 angehört, und den Cuspidalpunkten $c, c_I, c_{II} \ldots c_{m+n}$ dieser Flächen, welche auf der durch δ laufenden singulären Erzeugenden e liegen, bestehen die folgenden Relationen:

$$
\begin{array}{l}
(\delta,\ d,\ c,\ c_I) = -1 \\
(\delta,\ c,\ c_I,\ c_{II}) = -1 \\
(\delta,\ c_I,\ c_{II},\ c_{III}) = -1 \\
(\delta,\ c_{II},\ c_{III},\ c_{IV}) = -1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\delta,\ c_m,\ c_{m+1},\ c_{m+2}) = -1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\delta,\ c_{m+n-2},\ c_{m+n-1},\ c_{m+n}) = -1,
\end{array}
$$

aus welchen wir mit Leichtigkeit das Teilverhältniss des Inflexionspunktes δ, bezogen auf die zwei auf e gelegenen Cuspidalpunkte c_{m+1} und c_{m+n} irgend zweier der unendlich vielen Flächen berechnen können, wenn die Cuspidalpunkte der zwischen liegenden Flächen bekannt sind. Es lautet:

$$
\frac{c_{m+1}\delta}{c_{m+n}\delta} = (-1)^{n-1} \times \frac{\overline{c_m c_{m+1}} \cdot \overline{c_{m+1} c_{m+2}} \cdot \overline{c_{m+2} c_{m+3}} \ldots \overline{c_{m+n-2} c_{m+n-1}}}{\overline{c_m c_{m+2}} \cdot \overline{c_{m+1} c_{m+3}} \cdot \overline{c_{m+2} c_{m+4}} \ldots \overline{c_{m+n-2} c_{m+n}}}
$$

Art. 10. Betrachten wir das Verhältniss, in welchem das Ebenenbüschel L zu irgend einem Ψ^4 umschriebenen Kegel K^2 zweiten Grades steht.

Jede Erzeugende e' der Fläche berührt den Kegel, sie bestimmt mit ihm eine Tangentialebene τ', und umgekehrt schneidet jede Tangentialebene von K^2 — die durch L gelegte ausgenommen — Ψ^4 nur in einer Erzeugenden e', welche mit L eine Ebene E dieses Büschels fixirt. Diese Ebene schneidet Ψ^4 ausser in e', noch in zwei Erzeugenden e'' und e''', welche wir als Schnittlinien der durch sie an K^2 gelegten Tangentialebenen τ'' und τ''' mit E ansehen können.

Wären wir von der Tangentialebene τ'', die Ψ^4 in der in E liegenden Erzeugenden e'' trifft, ausgegangen; so wären wir durch E zu denselben Ebenen τ' und τ''' gelangt. Die Gesammtheit der Ebenen τ bildet eine kubische Tangentenebenen-Involution $K^2(\tau)$, welche K^2 zum Träger hat, mit dem Büschel $L(E)$ projectivisch ist und mit demselben die durch die Spitze von K^2 gehende Ebene E_s, welche diesen Kegel auch berührt, sich selbst entsprechend gemein hat. Das Letztere ersehen wir daraus, dass in E_s eine Erzeugende e liegt, die nicht durch die Spitze s von K^2 geht; also nur als Schnittlinie von E_s, diese als Element von $K^2(\tau)$ betrachtet, mit sich selbst, diesmal als Element von $L(E)$ angesehen, entstanden gedacht werden kann.

Aus diesen Auseinandersetzungen und denen des letzten Artikels fliessen die folgenden zwei wichtigen Erzeugungsarten der Fläche:

„Das Erzeugniss einer axialen[1]) kubischen Punkt-Involution auf einer Raumcurve dritter Ordnung D^3 ist eine Regelfläche Ψ^4 vierten Grades, welche D^3 zur Doppellinie und die Axe der Involution zur einfachen Leitlinie hat.“

„Das Erzeugniss eines Ebenenbüschels $L(E)$ und einer ihm projectivischen kubischen Tangentenebenen-Involution $K^2(\tau)$ auf einem Kegel zweiten Grades K^2 ist eine Regelfläche Ψ^4 vierten Grades; wenn die Axen des Büschels den Kegel K^2 berührt, und die beiden Gebilden gemeinschaftliche Ebene sich einmal selbst entspricht.“

Diese Erzeugungsart der behandelten Fläche Ψ^4 gestattet uns, mit Leichtigkeit zu der ihr reciproken Regelfläche Φ^4 vierten Grades mit einer dreifachen Geraden, und zwar dadurch überzugehen, dass man die den erzeugenden Gebilden von Ψ^4 reciproken zur Grundlage nimmt. Für diese Fläche gilt der Satz:

„Eine kubische Punkt-Involution $C^2(\pi)$ auf einem Kegelschnitt C^2 und eine ihr projectivische Punktreihe $L(P)$ auf einer Geraden L, die C^2 in einem sich einmal selbst entsprechenden Punkte P_0 schneidet, er-

---

1) Wie man eine Punkt-Involution auf einer ebenen Curve eine centrale nennt, wenn die Verbindungslinien conjugirter Punkte durch einen Punkt — das Centrum — gehen, so kann man ein derartiges Gebilde auf einer Raumcurve ein axiales nennen, wenn conjugirte Punkte in Ebenen liegen, die einem Büschel angehören.

zeugen eine Regelfläche Φ^4 vierten Grades, welche L zur dreifachen Geraden hat [1])."

Um diesen Satz direct zu beweisen, legen wir durch eine willkürlich angenommene Gerade g eine Ebene ε. Sie schneidet L in einem Punkte P, welchem drei Punkte π', π'' und π''' von $C^2(\pi)$ eine Terne bildend, zugeordnet sind; sie fixiren mit g eben soviele Ebenen ε', ε'', ε''', welche wir als die ε entsprechenden betrachten wollen. Da umgekehrt einer solchen Ebene, ihren zwei Schnittpunkten π' und π_1' mit C^2 correspondirend, zwei Ebenen ε und ε_1 beigeordnet sind; sehen wir, dass die Beziehung zwischen den coaxialen Büscheln $g(\varepsilon)$ und $g(\varepsilon')$ eine zwei-dreideutige ist, dass demnach dieselben fünf Doppelebenen besitzen. Während eine dieser Ebenen, nämlich (gP_0) constant durch P_0 geht, sind die andern vier, weil jede derselben einen Punkt von $L(P)$ und den ihm entsprechenden auf $C^2(\pi)$ enthält, Tangentialebenen der Regelfläche. Jede dieser Ebenen bestimmt eine Erzeugende, welche g schneidet.

Jede Terne π', π'', π''' bestimmt ein C^2 eingeschriebenes Dreieck. Die Gesammtheit dieser Dreiecke umhüllt einen Kegelschnitt J^2 — den Weyr'schen Involutionskegelschnitt (siehe Theorie der kubischen Involutionen), welcher den Trägerkegelschnitt C^2 in vier Punkten v_1, v_2, v_3 und v_4, den Verzweigungspunkten der Involution schneidet.

Liegt π' ausserhalb J^2, so kann man an ihn zwei reelle Tangenten t_1', t_1'' legen, welche auf C^2 die π' conjugirten Punkte π'' und π''', welche in diesem Fall immer reell sind, bestimmen. Dieser Terne entspricht auf L ein Punkt P, welcher, weil sich in ihm drei reelle Erzeugende $\overline{P\pi'}$, $\overline{P\pi''}$ und $\overline{P\pi'''}$ treffen, ein eigentlicher dreifacher Punkt der Fläche ist.

Bewegt sich π' auf C^2 in einer bestimmten Richtung, so muss er mit einem Verzweigungspunkte v_1 zusammenfallen. Die ihm conjugirten Punkte π'', π''' coincidiren mit dem zweiten Schnittpunkte d_1, des Kegelschnittes C^2 und der in v_1 an J^2 gelegten Tangente T_1, in ihm einen Doppelpunkt der Involution bildend.

Von den drei Erzeugenden e', e'', e''', die sich in dem v_1 zugeordneten Punkt c_1 von L begegnen, fallen zwei mit der Verbindungs-

---

[1]) Diese Fläche ist die allgemeinste dieser Art, weil von zwei projectivischen Gebilden [hier $L(P)$ und $C^2(\pi)$], deren eines immer eindeutig ist, die Elemente des mehrdeutigen sich zu Gruppen vereinigen, deren Elemente involutorisch sind. Eine Gruppe (hier Terne) entspricht einem Element des andern Gebildes.

linie e_1 der Punkte c_1 und d_1 zusammen. Sie bilden eine singuläre Erzeugende, welche demnach aus zwei benachbarten sich in dem Punkt c_1 schneidenden und in der durch e_1 und der Tangente T_I' von C^2 in d_1 bestimmten Ebene V_1 liegenden Erzeugenden besteht.

Diese Ebene berührt die Fläche längs der ganzen Ausdehnung der Erzeugenden e_1, da jede Gerade derselben in ihrem Schnitt mit e_1 mit der Regelfläche zwei unendlich nahe Punkte gemein hat — sie ist eine Cuspidalebene derselben. Der Punkt c_1 ist ein Cuspidalpunkt; er hat die Eigenschaft, dass jede durch ihn gehende Gerade, als durch den Schnitt zweier benachbarter in e_1 vereinigter Erzeugenden laufend, in ihm die Regelfläche berührt. Aus demselben Grunde berührt auch jede Ebene des Büschels e_1 die Fläche in c_1.

Die Regelfläche Φ^4 schneidet sich in einem Punkte P der dreifachen Geraden L zweimal; die Winkel E_1E_2 und E_2E_3, unter welchen dieses Schneiden vor sich geht, werden durch die drei Tangentialebenen $E_1 \equiv (Le')$, $E_2 \equiv (Le'')$ und $E_3 \equiv (Le''')$ im bezeichneten Punkt gemessen. Für einen Cuspidalpunkt, so c_1, fallen zwei der genannten Ebenen, der Coincidenz zweier durch c_1 laufenden Erzeugenden $e'' \equiv e''' \equiv e_1$ entsprechend, zusammen; d. d. die Regelfläche berührt und schneidet sich einmal in einem Cuspidalpunkt.

Ueberschreitet π' bei seiner Bewegung den Punkt v_1, so gelangt er in das Innere des Kegelschnittes J^2, weshalb man an diesen aus ihm keine reellen Tangenten legen kann, und die ihm entsprechenden Punkte π'' und π''' imaginär sind. Die in dem dieser complexen Terne zugeordneten Punkt P von L zusammentreffenden Erzeugenden zerfallen in eine reelle, welche nach π' zielt, und zwei imaginäre durch π'' und π''' fixirte. Der Punkt P ist ein uneigentlicher dreifacher Punkt der Fläche.

Da dem Ueberschreiten des Punktes v_1 durch π', der Durchgang von P durch c_1 correspondirt, und $C^2(\pi)$ vier Verzweigungspunkte besitzt; gilt der Satz:

„Den vier Schnittpunkten des Involutionskegelschnittes mit dem Trägerkegelschnitt der kubischen Punkt-Involution entsprechen auf der dreifachen Geraden die vier Cuspidalpunkte der Regelfläche. Sie teilen diese Gerade in eben soviele Strecken, von welchen je zwei benachbarte ungleichartig, d. i. bzhw. eigentlich und uneigentlich sind."

Art. 11. In diesem Artikel wollen wir die einander reciproken Regelflächen Φ^4 und Ψ^4 gleichzeitig behanden; oder vielmehr die Eigen-

schaften der ersten nachweisen und die der letztern blos citiren; da sie sich nach dem Gesetze der Reciprocität aus den ersteren leicht ableiten lassen, und übrigens aus dem ersten Abschnitt auch ergeben, weil Ψ^4 eine Specialität der Fläche $\mathfrak{f}^4$ ist.

Irgend eine Ebene $\mathfrak{E}$ schneidet Φ^4 in einer Curve C_6^4 vierter Ordnung, welche den Schnittpunkt P von $\mathfrak{E}$ und K zum dreifachen Punkt hat und deshalb von der sechsten Classe ist. Die drei Tangenten in P ergeben sich als Schnittlinien von $\mathfrak{E}$ und den drei Tangentialebenen E_1, E_2, E_3 der Fläche Φ^4 im bezeichneten Punkt.

„Eine Ebene von allgemeiner Lage schneidet die Regelfläche Φ^4 in einer Curve C_6^4 vierter Ordnung, welche auf der dreifachen Geraden einen dreifachen Punkt hat."

„Der aus einem Punkt des Raumes der Regelfläche Ψ^4 umschriebene Kegel K_4^6 ist von der vierten Classe und hat die durch die gerade Leitlinie gelegte Ebene zur dreifachen Tangentialebene."

Die Berührungscurve des Kegels K_4^6 mit der Fläche Ψ^4 ist von der sechsten Ordnung und dem zehnten Rang. Sie schneidet die Leitgerade L in jenen drei Punkten γ', γ'', γ''', in welchen diese von den drei in der dreifachen Tangentenebene $(\mathfrak{P}L)$ befindlichen Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}'''$ getroffen wird.

Liegt $\mathfrak{P}$ in einer Cuspidalebene V der Fläche Ψ^4, so zerfällt K_4^6 in diese und einen Kegel K_4^5 fünfter Ordnung, welcher V zur Tangentialebene und Inflexionsebene hat. Die Inflexionskante zielt nach dem V beigeordneten Inflexionspunkt d der Fläche; während die einfache Berührungskante $\mathfrak{P}$ mit dem Verzweigungspunkt z verbindet. Die Berührungscurve des Kegels ist von der fünften Ordnung und hat in d die Ebene V zur Osculationsebene. (Siehe Art. 4.).

Reciprok schneidet eine durch einen Cuspidalpunkt c von Φ^4 gelegte Ebene diese Fläche in einer Curve C_5^4 vierter Ordnung, fünfter Classe, welche in c einen Rückkehrpunkt und einfachen Punkt hat. Die Rückkehrtangente liegt in der durch L und die singuläre Erzeugende e fixirte Doppelebene D, des ebenfalls eine kubische Involution bildenden Büschels $L(E)$; wogegen die einfache Tangente, der D zugehörigen Verzweigungsebene W von $L(E)$ angehört.

Ist $\mathfrak{E}$ eine Tangentialebene der Fläche Φ^4, enthält sie also eine Erzeugende $\mathfrak{e}'$; so schneidet sie dieselbe noch in einer Curve dritter Ordnung C_4^3, welche auf L einen Doppelpunkt hat. Dieser ist der

Schnitt von e' und L, und seine Tangenten liegen in den durch e'' und e''' gehenden Ebenen des Büschels L. Die Curve C_4^3 schneidet e', ausser in P, in noch einem Punkt b, welcher der Berührungspunkt von $\mathfrak{E}$ ist, und sich leicht construiren lässt [1]).

„Eine Tangentialebene der Fläche Φ^4 schneidet sie in einer Curve C_4^3 dritter Ordnung, welche auf L einen Doppelpunkt hat."

„Aus einem ihrer Punkte wird die Fläche Ψ^4 durch einen Kegel K_3^4 projicirt, welcher von der dritten Classe ist und eine durch L gehende Doppeltangentenebene hat."

Wie oben erörtert wurde, berührt jede Ebene $\mathfrak{E}$ des Büschels einer singulären Erzeugenden e die Regelfläche Φ^4 im Cuspidalpunkt c; woraus ersichtlich ist, dass die Schnittcurve C_4^3, welche in c einen Doppelpunkt hat, die singuläre Erzeugende zur Doppunktstangente besitzt.

Je drei Erzeugende e', e'', e''', welche für die Fläche Φ^4 sich in einem Punkte P schneiden, oder für Ψ^4 einer Ebene des Büschels $L(E)$ angehören, bilden eine involutorische Gruppe, welche wir eine Erzeugende-Terne nennen wollen. Diese Terne besteht für einen Cuspidalpunkt c von Φ^4, oder eine Cuspidalebene v von Ψ^4 aus einer singulären Erzeugenden e, welche man als Doppelelement des von den Ternen gebildeten involutorischen Strahlensystems zu betrachten hat, und einer einfachen Erzeugenden e, welche wir Verzweigungserzeugende nennen.

Legen wir durch eine solche Erzeugende der Regelfläche Φ^4 eine Ebene $\mathfrak{E}$, so schneidet diese die Fläche noch in einer Curve C_3^3 dritter Ordnung, welche in dem auf e gelegenen Cuspidalpunkt c einen Doppelpunkt mit coincidirenden Doppelpunktstangenten ($\mathfrak{E}$, D) [2]), d. h. einen Rückkehrpunkt hat.

Eine Erzeugende-Terne e', e'', e''' fixirt drei Doppeltangentenebenen $(e'e'')$, $(e'e''')$ und $(e''e''')$, und durch diese eben soviele Φ^4 eingeschriebene Kegelschnitte C_1^2, C_2^2 und C_3^2. Ein solcher Kegel-

1) Siehe Prof. Dr. Emil Weyrs: „Theorie der mehrdeutigen geometr. Elementargebilde etc." und die Abhandlung: „Ueber rat. eb. Curven 3. u. 4 ter Ordnung".

2) So bezeichnen wir den Schnitt zweier Ebenen, hier der Doppelebene D und der Ebene $\mathfrak{E}$.

schnitt, so C_1^2, bildet mit den seine Ebene $\mathfrak{E}_1$ bestimmenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ den Gesammtschnitt mit Φ^4; woraus in Gemeinschaft mit der Tatsache, dass dieser in dem Punkt $P \equiv (L, \mathfrak{E}_1)$ einen dreifachen Punkt haben muss, hervorgeht, dass C_1^2 den Punkt P enthält und in ihm eine in der Ebene $(L\mathfrak{e}''') \equiv E_3$ liegende Tangente hat. Der Kegelschnitt C_1^2 schneidet die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ nochmals, und zwar in den Berührungspunkten b' und b'' seiner Ebene mit Φ^4.

Der Erzeugenden-Terne $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$ ist eine zweite $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_1''$, $\mathfrak{e}_1'''$ benachbart; diese bestimmt auf L einen Punkt P', welcher dem von der ersten fixirten Punkt P unendlich nahe ist. Ihre Erzeugenden sind in der angegebenen Reihenfolge den Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$ der ersten Terne unendlich nahe; so dass $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}_1'$ — $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}_1''$ — und $\mathfrak{e}'''$ und $\mathfrak{e}_1'''$ benachbarte Erzeugende der Fläche Φ^4 sind. Die Doppeltangentenebenen $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'') \equiv \mathfrak{E}_1$ und $(\mathfrak{e}_1'\mathfrak{e}_1'') \equiv \mathfrak{E}_1'$ sind aufeinander folgende Tangentialebenen der von allen Doppeltangentenebenen umhüllten developpablen Fläche d^3; welche wir die Doppeltangentenebenenfläche der Regelfläche Φ^4 nennen. Sie kann auch als geometrischer Ort der Schnittlinie $(\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_1')$, welche die Punkte b' und b'' verbindet, angesehen werden, und ist von der dritten Classe.

Um dies zu beweisen, kehren wir zur Betrachtung der Regelfläche Φ^4, als Erzeugniss der Punktreihe $L(P)$ und der kubischen Involution $C^2(\pi)$, auf dem L in P_0 schneidenden Kegelschnitt C^2 zurück. Der Involutionskegelschnitt J^2 wird von den durch die Ternen π', π'', π''' gebildeten Dreiecken umhüllt, hat also auch die in der Ebene des Kegelschnittes C^2 liegenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_0'$ und $\mathfrak{e}_0''$ und die Verbindungslinie $\overline{b_0'b_0''}$ ihrer zweiten Schnittpunkte b_0' und b_0'' mit dem Kegelschnitt C^2 zu Tangenten.

Die Classenzahl der Fläche d^3 lässt sich leicht finden, wenn wir bemerken, dass sie das Erzeugniss der Punktreihe $L(P)$ und der kubischen Tangenten-Involution $J^2(\overline{\pi'\pi''}, \overline{\pi''\pi'''}, \overline{\pi'''\pi'})$ auf dem Kegelschnitt J^2 ist, und dass dem Punkte P_0 von L, ausser $\overline{b_0'b_0''}$ die zwei Erzeugenden $\mathfrak{e}_0'$ und $\mathfrak{e}_0''$, diese als Elemente von $J^2(\overline{\pi'\pi''} \ldots)$ angesehen, entsprechen. Wir umschreiben zu dem Zwecke dem Kegelschnitt J^2 aus einem willkürlich angenommenen Punkt $\mathfrak{P}$ des Raumes den Kegel $(\mathfrak{P}J^2)$ und suchen die Anzahl der sich selbst entsprechenden Punkte der Reihe $L(P)$ und jener Reihe $L(Q)$, welche von der mit $J^2(\overline{\pi'\pi''} \ldots)$ perspectivischen Tangentenebenen-Involution $\mathfrak{P}J^2[\mathfrak{P}\overline{\pi'\pi''}, \mathfrak{P}\overline{\pi''\pi'''}, \mathfrak{P}\overline{\pi'''\pi'}]$ mit dem Träger $(\mathfrak{P}J^2)$ auf L gebildet wird. Jedem P sind die Tangenten $\overline{\pi'\pi''}$, $\overline{\pi''\pi'''}$ und $\overline{\pi'''\pi'}$, also auch

drei Tangentialebenen $\mathfrak{P}\pi'\pi''$, $\mathfrak{P}\pi''\pi'''$, $\mathfrak{P}\pi'''\pi'$ und daher ebenso viele Punkte Q_1, Q_2 und Q_3 — die Schnitte der drei Ebenen mit L zugeordnet. Umgekehrt entsprechen einem Q nur zwei Punkte in $L(P)$, P_1 und P_2, da man aus ihm nur zwei Tangentialebenen an $(\mathfrak{P}J^2)$ legen kann, diese ebenso viel Tangenten von J^2 fixiren, deren jeder ein Punkt von $L(P)$ zukommt.

Die Beziehung zwischen P und Q ist eine zwei-dreideutige, daher die Anzahl der sich selbst entsprechenden Punkte fünf. Zwei dieser Punkte sind in P_0 vereinigt; weil zwei der ihm entsprechenden Ebenen von $\mathfrak{P}J^2(\ldots)$, nämlich $(\mathfrak{P}\mathfrak{e}_0')$ und $(\mathfrak{P}\mathfrak{e}_0'')$ durch ihn gehen, also auf L zwei Punkte der Reihe Q fixiren, die ihm entsprechen und mit ihm zusammenfallen, was auch umgekehrt geschieht, wenn man P_0 als Element von $L(Q)$ betrachtei, weil eben die durch $\overline{P_0\mathfrak{P}}$ an $\overline{\mathfrak{P}J^2}$ gelegten Ebenen $(\mathfrak{P}\mathfrak{e}_0')$ und $(\mathfrak{P}\mathfrak{e}_0'')$ die Tangenten $\mathfrak{e}_0'$ und $\mathfrak{e}_0''$ von J^2 bestimmen, welche P_0 zugeordnet sind.

Die Reihen $L(P)$ und $L(Q)$ haben noch drei Doppelpunkte $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$. Ein solcher kommt dann zu Stande, wenn eine Tangentialebene $(\mathfrak{P}\pi'\pi'')$ von $\overline{\mathfrak{P}J^2}$ die Gerade L in einem ihr entsprechenden Punkt P schneidet, also P, zwei Punkte π' und π'' der ihm entsprechenden Terne, und $\mathfrak{P}$ in einer Ebene liegen. Weil aber dann auch die Erzeugenden $\overline{P\pi'} \equiv \mathfrak{e}'$ und $\overline{P\pi''} \equiv \mathfrak{e}''$ mit $\mathfrak{P}$ in einer Ebene liegen, ist diese eine Doppeltangentenebene; es entspricht also jedem der drei Punkte $\varDelta$ eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Doppeltangentenebene, womit bewiesen ist, dass d^3 von der dritten Classe ist.

„Durch jeden Punkt der dreifachen Geraden L der Regelfläche Φ^4 laufen drei derselben eingeschriebene Kegelschnitte. Ihre Ebenen sind Doppeltangentenebenen der Fläche und umhüllen eine developpable Fläche d^3 dritter Classe."

„Jede Ebene der einfachen Leitlinie der Regelfläche Ψ^4 wird von drei der Fläche umschriebenen Kegeln zweiten Grades berührt. Die Spitzen dieser Kegel sind Doppelpunkte der Fläche und erfüllen eine Raumcurve dritter Ordnung."

Art. 12. Bevor wir die Fläche d^3 näher untersuchen, haben wir noch den folgenden Satz nachzuweisen:

„Jeder der Regelfläche Φ^4 eingeschriebene Kegelschnitt kann als Träger einer kubischen Punkt-Involution betrachtet werden,

„Jeder der Regelfläche Ψ^4 umschriebene Kegel zweiten Grades kann als Träger einer kubischen Tangentenebenen-Involution betrach-

welche mit der Punktreihe $L(P)$ die Fläche Φ^4 erzeugt." tet werden, welche mit dem Ebenenbüschel $L(E)$ die Fläche erzeugt."

Wir fassen irgend einen Kegelschnitt C^2 ins Auge; sein Schnittpunkt mit L sei P. Durch einen willkürlich gewählten Punkt π' desselben läuft nur eine Erzeugende $\mathfrak{e}_n'$ von Φ^4, welche L in einem Punkte P_n trifft. Die durch diesen Punkt gehenden weitern Erzeugenden $\mathfrak{e}_n''$ und $\mathfrak{e}_n'''$ bilden mit $\mathfrak{e}_n'$ eine Erzeugende-Terne, schneiden also C^2 in Punkten π_n'' bzhw. π_n''', welche mit π_n' involutorisch sind. Dass dies wirklich der Fall ist, sehen wir, wenn wir von π_n'' ausgehen. Durch ihn läuft die Erzeugende $\mathfrak{e}_n''$, L in P_n treffend, durch welchen Punkt noch $\mathfrak{e}_n'$ und $\mathfrak{e}_n'''$, auf C^2 die Punkte π_n' und π_n'' fixirend, geht. Der Punkt P entspricht sich auch jetzt einmal selbst, da nur zwei Erzeugende $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ in der Ebene des Kegelschnittes C^2 liegend, ihn in den zwei weitern P entsprechenden Punkten b' und b'' schneiden.

Die Gerade $\overline{b'b''}$ ist als die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Doppeltangentenebenen $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'')$ mit Φ^4, die Schnittlinie derselben mit der ihr unmittelbar folgenden unendlich nahen Doppeltangentenebene $(\mathfrak{e}_1'\mathfrak{e}_1'')$ und als solche eine Erzeugende der Fläche d^3.

Dies gilt allgemein von irgend zwei benachbarten Doppeltangentenebenen $(\mathfrak{e}_n'\mathfrak{e}_n'')$ und $(\mathfrak{e}_{n+1}'\mathfrak{e}_{n+1}'')$ der Fläche Φ^4; zwei solche schneiden sich immer in einer Geraden ε_n, welche Erzeugende von d^3 ist, und längs welcher diese Fläche von $(\mathfrak{e}_n'\mathfrak{e}_n'')$ berührt wird. Da aber zwei auf einander folgende Doppeltangentenebenen die Ebene $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'')$ in unendlich nahen Tangenten $\overline{\pi_n'\pi_n''}$, $\overline{\pi_{n+1}'\pi_{n+1}''}$ des Involutionskegelschnittes J^2 schneiden, also der Schnittpunkt dieser auf J^2 selbst liegt; sehen wir, dass weil dieser Punkt sich auf beiden genannten Ebenen befindet, ihre Schnittlinie ε_n durch ihn geht, er also ein Punkt der developpablen Fläche d^3 ist.

Daraus, dass sowohl der Kegelschnitt C^2, also auch sein Involutionskegelschnitt J^2, als auch die Ebenen $(\mathfrak{e}_n'\mathfrak{e}_n'')$ und $(\mathfrak{e}_{n+1}'\mathfrak{e}_{n+1}'')$ beliebig angenommen wurden, geht hervor, dass jeder der unendlich vielen Involutionskegelschnitte der Regelfläche Φ^4 ein eingeschriebener Kegelschnitt der Doppeltangentenebenenfläche d^3 ist.

Der Involutionskegelschnitt J^2 bildet mit der, als Berührungserzeugende doppelt zu zählenden Geraden $\overline{b'b''}$, welche ihn in einem Punkte r berührt, den Gesammtschnitt seiner Ebene $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'')$ mit d^3. Diese Fläche hat eine Rückkehrcurve R^3 dritter Ordnung, deren drei Schnittpunkte mit $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'')$, weil diese Ebene eine Osculations- oder Schmiegungsebene derselben ist, nur in r vereinigt sein können.

Jene Ebene ($\mathfrak{e}e$), welche eine Verzweigungserzeugende $\mathfrak{e}$ und die dieser zugeordnete singuläre Erzeugende e enthält, berührt Φ^4 in dem Cuspidalpunkt $c \equiv \mathfrak{e}$, $e \equiv b'$ und einem zweiten auf $\mathfrak{e}$ gelegenen Punkt b''; schneidet also die Regelfläche in einem Kegelschnitt C^2, welcher durch b'' läuft und e in c berührt. Daraus geht aber hervor, dass der C^2 zukommende Involutionskegelschnitt die Verzweigungserzeugende $\mathfrak{e} \equiv \overline{b'b''}$ in b'' tangirt, dass demnach $\mathfrak{e}$ auch Erzeugende von d^3 ist, und die diese Fläche längs ihr berührende Ebene ($\mathfrak{e}e$) die Curve R^3 in b'' osculirt.

Auch die Cuspidalebenen V_1, V_2, V_3, V_4 der behandelten Regelfläche Φ^4 sind Tangentialebenen von d^3. Eine solche schneidet Φ^4 in einem Kegelschnitt C_c^2, welcher e ausser in c in einem Punkte i schneidet, den wir Inflexionspunkt der Fläche nennen. Jede durch ihn in V gezogene Gerade hat nämlich mit Φ^4 drei unendlich nahe in ihm vereinigte Punkte gemein. Die in i an C_c^2 gelegte Tangente ist eine Erzeugende der Fläche d^3, deren weiterer Schnitt — J_c^2 — mit V durch C läuft.

Irgend eine Erzeugende $\overline{b'b''}$ der developpablen Fläche d^3 ist eine Doppeltangente der Regelfläche Φ^4; woraus erhellt, dass beide Flächen ausser den vier Verzweigungserzeugenden $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{e}_4$ nur noch eine Berührungscurve, und zwar sechster Ordnung gemein haben können; welche, wie leicht einzusehen, die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten berührt [1]).

„Jedem der Regelfläche Φ^4 eingeschriebenen Kegelschnitt kommt, als Träger einer von den Erzeugenden auf ihm gebildeten kubischen Punkt-Involution, ein Involutionskegelschnitt zu.

Die Gesammtheit dieser Involutionskegelschnitte erfüllt die von den Doppeltangentenebenen der Regelfläche Φ^4 umhüllte developpable Fläche d^3 dritter Classe. Diese Fläche hat auch die vier Cuspidalebenen zu Tangentialebenen, schneidet Φ^4 in den vier Verzweigungserzeugenden und berührt sie in einer Raumcurve sechster Ordnung, welche die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten tangirt [2]).

---

1) Siehe vor. Art.

2) Der reciproke für Ψ^4 geltende Satz ist leicht zu bilden. Wegen Raumersparniss führen wir ihn nicht an.

Art. 13. Was wir oben von den Φ^4 eingeschriebenen Kegelschnitten gesagt haben, gilt zum Teil von irgend einer der behandelten Fläche eingeschriebenen ebenen Curve.

Betrachten wir den allgemeinsten Schnitt C_6^4; er hat auf L einen dreifachen Punkt und wird von jeder Erzeugenden nur in einem Punkt getroffen. Umgekehrt läuft durch einen Punkt π' von C_6^4 nur eine Erzeugende $\mathfrak{e}'$. Diese schneidet L in einem Punkt P, durch welchen noch zwei mit $\mathfrak{e}'$ eine Terne constituirende Erzeugende $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}'''$ gehen. Diese Erzeugenden begegnen der Curve C_6^4 bzhw. in den Punkten π'' und π''', welche π' involutorisch conjugirt sind. Diese drei Punkte sind die Ecken eines Dreiecks, dessen jede Seite Tangente des Schnittes C_3^4 der Ebene (C_6^4) und der Fläche d^3 ist; da eine solche immer in einer Tangentialebene $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'')$ ... dieser Fläche liegt. Durchläuft π' die Curve C_6^4, so umhüllt das Dreieck $\pi'\pi''\pi'''$ die Curve C_3^4, welche wir dieser Eigenschaft wegen Involutionscurve der kubischen Punkt-Involution $C_6^4(\pi', \pi'', \pi''')$ nennen wollen.

Diese Punkt-Involution hat den dreifachen Punkt der Curve C_6^4 zum dreifachen Punkt, weil die drei in ihm sich schneidenden Ergeugenden von Φ^4 mit C_6^4 keinen weitern Punkt gemein haben. Doppelpunkte der Involution sind die vier Schnittpunkte p_1, p_2, p_3, p_4 ihres Trägers mit den singulären Erzeugenden; während die Verzweigungserzeugenden die Curve C_6^4 in den vier Verzweigungspunkten $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ und $\mathfrak{v}_4$ treffen, diese sind auch die Schnittpunkte der Curve C_3^4. Jeder andere der sechs beiden Curven gemeinschaftlichen Punkte ist ein Berührungspunkt [1]).

Die Untersuchung wurde an einer willkürlich angenommenen ebenen Curve C_6^4 von Φ^4 durchgeführt, und es ist demnach klar, dass die auf allen Curven bezeichneter Art durch die Erzeugenden bestimmten Involutionen gleichartig, d. h. gleichzeitig reelle oder imaginäre Doppel- und Verzweigungspunkte haben.

Dass dies auch von einer ebenen Curve C_4^3 dritter Ordnung, und jeder andern Φ^4 eingeschriebenen Curve gilt, braucht wohl nicht mehr bewiesen zu werden; für die Kegelschnitte wurde es ohnehin bereits ausführlich erörtert.

„Die Erzeugenden der Regelfläche Φ^4 bestimmen auf irgend einer ihr eingeschriebenen ebenen Curve C eine

---

1) Es gilt ganz allgemein: „Das Erzeugniss einer kubischen Punkt-Involution auf einer ebenen Curve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkt ist eine Curve C_3^4 vierter Ordnung und dritter Classe, wenn der dreifache Punkt der Trägercurve zugleich ein dreifacher Punkt der Involution ist etc.“

kubische Involution, welche den Schnitt ihrer Ebene mit der developpablen Fläche d^3 zur Involutionscurve J hat. Conjugirte Punkte liegen immer auf einer Terne von Erzeugenden. Die Verzweigungspunkte und Doppelpunkte der Involution sind bzhw. die Schnitte ihres Trägers mit den Verzweigungserzeugenden und singulären Erzeugenden."

Art. 14. Der allgemeinste Schnitt C_6^4 einer Ebene E mit Φ^4 ist durch E, also drei seiner Punkte vollkommen bestimmt; wenn diese nicht auf einer Geraden liegen.

Eine Curve C_4^3 hingegen ist durch zwei Punkte p_1 und p_2 zweideutig gegeben. Denn $\overline{p_1 p_2}$ schneidet Φ^4 noch in zwei Punkten q_1 und q_2; und sowohl die, durch die Gerade $\overline{p_1 p_2}$, und die durch den Punkt q_1 laufende Erzeugende $\mathfrak{e}_1$ fixirte E_1, als auch jene, welche durch $\overline{p_1 p_2}$ und die den Punkt q_2 enthaltende Erzeugende $\mathfrak{e}_2$ gelegt ist, schneidet Φ^4 in einer Curve C_4^3, welche beide gegebene Punkte enthält.

Durch einen Punkt p der Regelfläche kann man drei Tangentialebenen an die developpable Fläche d^3 legen. Zwei enthalten die durch p gehende Erzeugende $\mathfrak{e}'$ und je eine jener Erzeugenden $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$, welche mit $\mathfrak{e}'$ eine Terne bilden. Sie schneiden die Regelfläche in Kegelschnitten, welche nicht durch p gehen. Die dritte Ebene schneidet die Erzeugende $\mathfrak{e}'$ in p, und Φ^4 in einem Kegelschnitt C^2 und zwei Erzeugenden $\mathfrak{e}_n'$ und $\mathfrak{e}_n''$. Da p der Annahme zufolge ein einfacher Punkt der Fläche ist, kann er nur auf C^2 liegen.

Wäre p ein Schnitt der Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ mit dem durch $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'')$ fixirten Kegelschnitt C_1^2, so müsste er als ein Berührungspunkt b' der Ebene $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'')$ mit Φ^4 auf d^3 liegen. Man könnte an diese durch ihn nur noch eine Tangentialebene — die Ebene $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}''')$ legen, deren Schnitt C_2^2 mit Φ^4 offenbar nicht mehr p enthalten kann.

„Ein Kegelschnit der Regelfläche Φ^4 ist durch einen (nicht auf der dreifachen Geraden befindlichen) Punkt eindeutig gegeben."

Die Erzeugenden der Fläche Φ^4 schneiden irgend zwei ihr eingeschriebene ebene Curven in Punkten projectivischer Systeme. Umgekehrt kann Φ^4 immer, bestimmte Bedingungen vorausgesetzt, als das Erzeugniss zweier derartiger Gebilde angesehen und definirt werden.

Ein specieller Fall, zugleich der wichtigste, soll das Gesagte erläutern.

Wir fassen irgend zwei Kegelschnitte C^2 und C_1^2 ins Auge, die im Allgemeinen keinen Punkt gemein haben sollen. Die Ebene E des ersten schneidet die des zweiten in einer Geraden g, deren Schnitte mit C^2, a und b heissen mögen. Dem ersten dieser Punkte können wir auf C_1^2 einen ganz beliebigen Punkt a_1, als entsprechend zuweisen; wogegen der b zugeordnete Punkt b_1, falls das Erzeugniss der Punktsysteme C^2 und C_1^2 eine Fläche Φ^4 sein soll, nicht mehr willkürlich ist, sondern so gewählt werden muss, dass $\overline{bb_1}$ und $\overline{aa_1}$ sich in einem Punkte von C_1^2, dem zweiten Schnittpunkt P_1 der Geraden $\overline{aa_1}$ mit diesem Kegelschnitt treffen; also vollkommen fixirt ist.

Die projectivischen Punktsysteme sind durch Angabe noch eines Punktepaares bestimmt. Wir ordnen, was am zweckmässigsten ist, dem einen Schnittpunkt c_1 von C_1^2 mit g den Punkt c auf C^2 zu. Er liefert mit diesem verbunden eine Erzeugende $\overline{cc_1} \equiv \mathfrak{e}_3$ die C^2 noch in einem Punkt P begegnet.

Die Regelfläche Φ^4, welche durch diese Daten gegeben ist, hat $\overline{PP_1}$ zur dreifachen Geraden. Weil nämlich $\overline{PP_1}$ in P_1 drei und in P zwei unendlich nahe Punkte mit dem Erzeugniss $(C^2C_1^2)$ gemein hat, ist sie ein Bestandteil desselben. Dass sie eine dreifache Gerade und demnach $(C^2C_1^2)$ identisch mit Φ^4 ist, können wir folgend nachweisen.

Wir projiciren die Punktsysteme $C^2(p)$ und $C^2(p_1)$ bzhw. aus den auf ihren Trägern liegenden Punkten P und P_1 auf die Gerade g. Da a, b, c ihre Plätze nicht ändern, a_1, b_1, c_1 aber durch die angegebene Manipulation der Reihe nach, nach a, b, c verschoben werden, sind die Projectionen, weil sie projectivisch sind und drei entsprechende Punkte aa_1', bb_1', $c'c_1$ gemein haben, auch identisch.

Um nun die durch einen beliebigen Punkt p von C^2 laufende Erzeugende $\mathfrak{e}$ zu construiren, projicirt man p aus P auf g, verbindet den so erhaltenen Punkt π mit P_1, sucht den zweiten Schnitt p_1 dieser Geraden $\overline{\pi P_1}$ mit C_1^2, um so in $\overline{pp_1}$ das gewünschte Resultat zu erhalten. Nachdem die Erzeugende $\overline{pp_1}$ mit $\overline{PP_1}$ in der Ebene $(PP_1\pi)$ liegt, trifft sie dieselbe in einem Punkt P_n.

Die zwei aus einem willkürlich gewählten Punkt $\overline{P_m}$ von PP_1 den Trägerkegelschnitten C^2 und C_1^2 umschriebenen Kegel K^2 und K_1^2 schneiden sich ausser in $\overline{PP_1}$ in drei Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}'''$;

welche auch Erzeugende des Erzeugnisses $(C^2 C_1^2)$ sind. Um dies für eine derselben, etwa e′, nachzuweisen, brauchen wir nur zu bemerken, dass ihre Schnittpunkte p' und p_1' mit den Kegelschnitten C^2 und C_1^2 bzhw. mit P und P_1 verbunden, Linien liefern, die sich in einem Punkte π' von g notwendîg schneiden müssen, um in der Umkehrung dieses Vorganges in p' und p_1' entsprechende Punkte der erzeugenden Systeme zu erkennen.

In jedem Punkt von $\overline{PP_1}$ schneiden sich die Erzeugende von $(C^2 C_1^2)$, diese ist eine Regelfläche Φ^4 und hat $\overline{PP_1}$ zur dreifachen Geraden.

„Zwei projectivische Punktsysteme auf zwei Kegelschnitten erzeugen dann eine Regelfläche Φ^4, wenn die in der Ebene des einen Kegelschnittes liegenden Erzeugenden sich in einem Punkt desselben schneiden."

„Zwei projectivische Tangentenebenen-Systeme auf zwei Kegeln zweiten Grades erzeugen eine Regelfläche Ψ^4, wenn die in der Spitze des einen Kegels sich begegnenden Erzeugenden in einer Tangentialebene desselben liegen."

Sollen zwei projectivische Punktsysteme auf zwei sich in einem Punkt P schneidenden Kegelschnitten C_1^2 und C_2^2 eine Regelfläche Φ^4 erzeugen, so haben wir die Zuordnung derart zu treffen, dass die zweiten Schnittpunkte a_1 und a_2 der durch P gehenden Schnittlinie g mit den Trägerkegelschnitten sich entsprechen.

Bemerken wir noch, dass der aus einem Punkt P der dreifachen Geraden irgend einem Kegelschnitt der Regelfläche Φ^4 umschriebene Kegel K, ausser der dreifachen Geraden, die sich in P schneidenden Erzeugenden enthält, so bedürfen die folgenden Sätze und die ihnen reciproken keines Beweises.

„Gleitet eine Gerade an zwei Kegelschnitten C_1^2, C_2^2 und einer Geraden L, welche jeden der Kegelschnitte einmal schneidet, so erzeugt sie eine Regelfläche Φ^4, welche L zur dreifachen Geraden hat."

„Die aus irgend einem Punkt der dreifachen Geraden der Regelfläche Φ^4, dem System ihrer eingeschriebenen Kegelschnitte C^2 umschriebenen Kegel bilden ein Kegelschnittsbüschel K^2, welches mit dem Kegelschnittssystem projectivisch ist."

Die durch L gehende Tangentialebene E eines Kegels K^2 fixirt

durch ihren Berührungspunkt b dem K^2 entsprechenden Kegelschnitt eindeutig. Dieser läuft durch b und berührt in ihm E.

Art. 15. Die reciproken Eigenschaften der Regelfläche Φ^4 sind nun schnell besprochen.

Der aus einem Punkt $\mathfrak{P}$ des Raumes der Fläche Φ^4 umschriebene Kegel K_4^6 ist von der vierten Classe sechsten Ordnung, und hat die drei durch $\mathfrak{P}$ an d^3 gelegten Tangentialebenen zu Doppeltangentenebenen; wogegen er die durch L gelegte Ebene E nur einfach berührt.

Er hat mit Φ^4 eine doppelt zu zählende Berührungscurve B_{10}^6 sechster Ordnung, zehnten Ranges (dem Geschlechte Null), und eine Schnittcurve zwölfter Ordnung R^{12} gemein. Da jeder Punkt von B_{10}^6 als Doppelpunkt im Gesammtschnitt gilt, kann dieser in seinen mit L gemeinschaftlichen Punkten höchstens Doppelpunkte haben.

Jene Ebene E, welche durch $\mathfrak{P}$ und eine singuläre Erzeugende e gelegt ist, berührt Φ^4 in dem auf e befindlichen Cuspidalpunkt c und schneidet auch die Fläche in demselben. Durch diesen Punkt läuft sowohl B^6 als auch R^{12}; jede Curve jedoch nur einfach. Die Berührungscurve hat mit einer Erzeugenden einen Punkt gemein, schneidet daher jeden Φ^4 eingeschriebenen Kegelschnitt viermal. Da dies auch für den in der Φ^4 längs e berührenden Cuspidalebene V befindlichen Kegelschnitt gilt, ausser ihm in V nur e liegt, und E die Fläche Φ^4 blos in c berührt, können die weitern zwei Schnittpunkte von V und B^6 nur in c vereinigt sein. Die Tangente der Berührungscurve B^6 im Punkte c liegt daher in V und ist, weil sie auch der Ebene ($\mathfrak{P}e$) angehören muss, mit e identisch.

„Der aus einem Punkt des Raumes der Regelfläche Φ^4 umschriebene Kegel K_4^6 ist von der vierten Classe sechster Ordnung und hat die drei durch seine Spitze von d_3 gelegten Tangentialebenen zu Doppeltangentenebenen. Er berührt die Regelfläche in einer Curve sechster Ordnung, zehnten Ranges, welche die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten berührt."

„Eine Ebene von allgemeiner Lage schneidet die Regelfläche Ψ^4 in einer Curve C_6^4 vierter Ordnung sechster Classe, welche die drei Schnittpunkte ihrer Ebene mit der Doppellinie zu Doppelpunkten hat etc."

Wie bei der allgemeinen Regelfläche $\mathfrak{f}^4$ sind auch hier die sechs Rückkehrkanten des Kegels $K_4{}^6$ Haupttangenten der Regelfläche, welche ebenso viele durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehende Schmiegungshyperboloide derselben bestimmen. Für einen Punkt einer Cuspidalebene ist der umschriebene Kegel und seine Berührungscurve von der fünften Ordnung; der erste hat die genannte Ebene zur Inflexionsebene.

Der aus einem Punkt $\mathfrak{P}$ der Fläche ihr umschriebene Kegel $K_3{}^4$ ist von der dritten Classe und vierten Ordnung[1]). Seine Doppeltangentenebene ist die Ebene des durch $\mathfrak{P}$ gehenden Kegelschnittes der Fläche Φ^4. Diese wird von $K_3{}^4$ längs einer Curve $B_8{}^5$ fünfter Ordnung, achten Ranges berührt, welche durch $\mathfrak{P}$ läuft, in diesem Punkt die durchgehende eigentliche Haupttangente der Fläche berührt und die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten tangirt. Die Curve $B_8{}^5$ ist durch zwei Punkte zweideutig bestimmt. Denn legen wir in diesen zwei Punkten p_1 und p_2 die Tangentialebenen τ_1 bzhw. τ_2 an Φ^4, so können wir jeden jener zwei Schnittpunkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ihrer Schnittlinie mit Φ^4 als Spitze des diese Fläche längs einer durch p_1 und p_1 gehenden Berührungscurve $B_8{}^5$ tangirenden Kegels annehmen, welche nicht auf den durch die gegebenen Punkte bestimmten Erzeugenden liegen.

Aus einem Punkt $\mathfrak{P}$ einer singulären Erzeugenden e wird Φ^4 durch einen Kegel $K_3{}^4$ projicirt, welcher die Fläche längs der genannten Geraden und einer Raumcurve B^4 vierter Ordnung berührt, die durch den auf e gelegenen Cuspidalpunkt nicht geht.

Befindet sich hingegen $\mathfrak{P}$ auf einem in einer Cuspidalebene V liegenden Kegelschnitt, so zerfällt $K_3{}^4$ in diese Ebene und einen Kegel dritter Orgnung und Classe, dessen Berührungscurve von der vierten Ordnung ist und den V zugehörigen Cuspidalpunkt nicht enthält.

Diese Curve degenerirt, wenn $\mathfrak{P}$ mit einem Inflexionspunkt i der Fläche coincidirt, in die durchgehende singuläre Erzeugende e und eine Raumcurve dritter Ordnung, welche durch den auf e befindlichen Cuspidalpunkt nicht läuft.

In Raumcurven dritter Ordnung B^3 wird Φ^4 auch von jenen Kegeln vierter Classe dritter Ordnung berührt, welche den Schnitt-

---

1) Fassen wir $K_4{}^6$ als geometrischen Ort auf, so zerfällt er für einen Punkt der Fläche in die doppelt zu zählende Tangentialebene desselben und den Kegel K^4; während er als Enveloppe betrachtet in das Ebenenbüschel, welches die durch den Punkt gehende Erzeugende zur Axe hat, und einen Kegel K_3 dritter Classe zerfällt. K^4 und K_3 sind selbstverständlich identisch. (Siehe auch Art. 4.)

punkt dreier Cuspidalebenen zur Spitze haben. Jeoe derartige Berührungscurve hat die genannten drei Cuspidalebenen in den auf ihnen liegenden Inflexionspunkten zu Osculationsebenen, berührt jedoch nur die in der vierten befindliche singuläre Erzeugende im Cuspidalpunkt. Sie ist durch diesen eindeutig fixirt.

Umschriebene Kegel zweiten Grades besitzt Φ^4 ebenso wenig, als die Fläche Ψ^4 nach einem eigentlichen Kegelschnitt geschnitten werden kann.

Erwähnenswert sind noch die Berührungscurven mit einem Rückkehrpunkt, dieser ist immer in einem Cuspidalpunkt und das Centrum der Curve in der zugehörigen Doppelebene gelegen.

Art. 16. Eine Fläche $\mathfrak{f}^n$ $n$ter Ordnung durchschneidet Φ^4 in einer Curve R^{4n} $4n$ter Ordnung, welche die n Schnittpunkte P_1, $P_2 \ldots P_n$ der Fläche $\mathfrak{f}^n$ mit der dreifachen Geraden L zu dreifachen Punkten hat. Die Tangenten der Curve in einem dieser Punkte P erhalten wir als die Schnittlinien t_1, t_2, t_3 der Tangentialebene T von $\mathfrak{f}^n$ mit den drei Tangentenebenen E_1, E_2, E_3 der Regelfläche Φ^4 im bezeichneten Punkt.

Daraus geht hervor, dass zwei der genannten Tangenten, etwa t_2 und t_3 coincidiren, wenn $\mathfrak{f}^n$ durch einen der Cuspidalpunkte c gelegt wurde; und zwar entsprechend dem Zusammenfallen zweier Tangentialebenen E_2 und E_3 zu einer Doppelebene D des Büschels $L(E)$, in welcher auch immer $t_3 \equiv t_2 \equiv t$ liegen muss.

Die sich im Allgemeinen in einem Punkt P zweimal durchschneidende Curve R^{4n} berührt sich daher, wenn P mit c zusammenfällt, entweder einmal, oder sie hat in ihm einen Rückkehrpunkt.

Berühren zwei Zweige der Curve die Gerade t in c, während der dritte sie in diesem Punkt schneidet, so hat t mit ihr und daher auch mit Φ^4 fünf unendlich nahe Punkte gemein, von welchen einer auf den Schnitt mit dem dritten Curvenzweig und viere auf die Berührung der zwei andern Aeste entfallen [1]). Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn t seiner ganzen Ausdehnung nach auf Φ^4 liegt; was aber, da T immer sich in D befinden muss, zur Folge hat, dass t

---

1) Die Tangentialebene T einer Raumcurve R in einem Doppelpunkt hat in diesem mit ihr — den zwei Doppelpunktstangenten t_2 und t_3 entsprechend — vier unendlich nahe Punkte gemein. Coincidiren t_2 und t_3 zu einer Geraden t; so hat jede Ebene des Büschels der letztern, wie leicht einzusehen, die Bedeutung von T, d. h. t selbst mit R vier unendlich nahe Punkte gemein.

mit e coincidirt, also die Tangeetialebene T durch die singuläre Erzeugende e geht.

Besteht c aus einem Rückkehrpunkt, welcher von dem zweiten Ast einmal geschnitten wird, so hat t mit R^{4n} und daher auch mit Φ^4 vier in c vereinigte Punkte gemein. Drei als Rückkehrtangente in c, zu welchen noch der vierte, als Schnitt mit dem zweiten durch c laufenden Ast tritt.

In diesem Fall — welcher der allgemeinere ist — kann t irgend eine durch c in D gehende Gerade sein, also die Tangentialebene T von $\mathfrak{f}^n$ in c eine beliebige Lage haben.

Weil jede Φ^4 eingeschriebene Curve als teilweiser- oder Gesammtschnitt dieser Fläche mit einer zweiten angesehen werden kann, gilt der Satz:

„Eine der Regelfläche Φ^4 eingeschriebene [ebene oder räumliche] Curve, welche durch einen Cuspidalpunkt läuft, hat in ihm entweder einen Rückkehrpunkt oder die durchgehende singuläre Erzeugende zur Tangente[1]."

Eine Cuspidalebene V berührt Φ^4 in allen Punkten einer singulären Erzeugenden e. Wenn daher R^{4n} die Gerade e schneidet, so berührt sie in diesen Punkten immer auch V.

Ausser den n Schnittpunkten von e mit R^{4n}, deren jeder für V doppelt zu zählen ist, schneidet diese Ebene die Curve in $2n$-Punkten, welche sich also auf dem in V gelegenen Kegelschnitt C^2 befinden müssen.

Geht $\mathfrak{f}^n$ und mithin auch R^{4n} durch den in V liegenden Inflexionspunkt i, so hat diese Curve mit V drei unendlich nahe in i vereinigte Punkte gemein, nachdem sie C^2 noch in $2n-1$- und e in $n-1$-Punkten — ausser in i — schneidet, und jeder auf e gelegene Punkt für V für zwei Punkte gilt. Ist also R^{4n} eine ebene Curve, wo dann $n \leqq 1$ ist, so hat sie in i einen Wendepunkt, ist sie hingegen räumlich, dann wird sie von V in i osculirt.

„Eine der Regelfläche Φ^4 eingeschriebene (ebene oder Raum-) Curve berührt in ihren Schnittpunkten mit den singulären Erzeugenden die Cuspidalebenen."

---

1) Siehe die Berührungscurven.

Läuft sie durch einen Inflexionspunkt, so hat sie in ihm im Allgemeinen bzhw. einen Wendepunkt, oder die durchgehende Cuspidalebene zur Osculationsebene."

Art. 17. Bei einer etwas eingehendern Untersuchung der einer Regelfläche eingeschriebenen Raumcurven drängt sich vor Allem die Frage auf, durch wie viele Daten eine solche bestimmt ist.

Die Beantwortung dieser für die Regelfläche Φ^4 ist verhältnissmässig leicht, da sie sich auf das bereits gelöste Problem, einen Kegel durch Kanten zu bestimmen, zurückführen lässt. Wie dies geschieht, wird diese Untersuchung zeigen.

An dieser Stelle wollen wir nur erwähnen, dass wir — und zwar an einem scheinbar speciellen Fall — eine Formel aufstellen werden, aus welcher man durch einfache Substitution der in jedem Fall für die zu untersuchende Curve gegebenen Daten, die Zahl ihrer Bestimmungsstücke bequem finden kann; und von der wir zeigen werden, dass sie für jede Annahme gilt, also alle der Regelfläche Φ^4 eingeschriebenen Curven umfasst.

Die oben erwähnte wegen ihrer eigentümlichen Entstehungsart scheinbar specielle Curvenclasse — welche jedoch alle auf Φ^4 liegenden Curven enthält — ist jene, welche man als teilweisen Schnitt der Fläche Φ^4 mit einer durch ihre dreifache Gerade L gelegten Fläche $\mathfrak{f}^{m+n}$ erhält. Um die Untersuchung möglichst allgemein zu machen, nehmen wir an, $\mathfrak{f}^{m+n}$ sei eine Regelfläche $(m+n)$ter Ordnung, die L zur $m$fachen Geraden hat, und durch q Erzeugende von Φ^4 geht, wobei die letzteren untereinander windschief sind, oder auch zu zweien oder dreien sich schneiden. Beide Flächen haben unter dieser Voraussetzung noch eine Raumcurve R^N, $N = 4[3m+n] - 3m - q = m + 4n - q$ter Ordnung gemein; da jede gemeinsame Erzeugende derselben als Curve ersten Grades, und die Gerade L als resp. Bestandteil 3- und m^{ter} Ordnung der sich schneidenden Flächen als gemeinschaftliche Curve $3m$ter Ordnung in Rechnung zu bringen ist.

Eine Ebene E des Büschels L schneidet die Fläche Φ^4 in einer Erzeugenden $\mathfrak{e}$ und berührt sie in dem Schnittpunkt P dieser mit L; dieselbe Ebene hat mit $\mathfrak{f}^{m+n}$, ausser der $m$mal zu zählenden Geraden L, n Erzeugende $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ gemeinschaftlich, deren Schnittpunkte mit L, nämlich $Q_1, Q_2 \dots Q_{n-1}, Q_n$, die n Tangentialpunkte bezeichneter Ebene mit $\mathfrak{f}^{m+n}$ sind.

Die Erzeugende $\mathfrak{e}$ trifft die n Erzeugenden $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ in ebenso vielen Punkten $p_1, p_2 \dots p_n$, welche sämmtlich der Curve R^N ange-

hören. Dies gilt auch dann, wenn einer dieser Punkte, etwa p_k mit P coincidirt, also beide Flächen sich in P berühren; auch dann ist er, wie leicht einzusehen, ein Punkt dieser Curve — jenen Fall ausgeschlossen, in welchem die Erzeugenden e und ε_k zusammenfallen, d. h. eine der q gemeinschaftlichen Erzeugenden bilden.

Irgend eine durch eine derartige Gerade $e\varepsilon_k$ gelegte Ebene A berührt sowohl Φ^4 in einem Punkt a derselben, als auch $\mathfrak{f}^{m+n}$ in einem zweiten Punkt b.

Beide Punkte bilden bei der Drehung von A eine quadratische Involution, deren zwei Doppelpunkte offenbar die Eigenschaft haben, dass sich in ihnen die Regelflächen berühren. Einer dieser Punkte ist P, wogegen der andere irgendwo auf $e\varepsilon_k$ liegt, und mit den $n-1$ Schnittpunkten dieser Geraden und den andern in E befindlichen Erzeugenden $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1} \ldots \varepsilon_n$ die n der Curve R^N und der bezeichneten Erzeugenden ε $e\varepsilon_k$ gemeinschaftlichen Punkte vorstellt.

Aus diesen Auseinandersetzungen ist klar, dass, wenn man von der Zahl der Doppelpunkte jener Reihen, welche durch P und die $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ auf L gebildet werden, die Zahl Q abzieht; man die Anzahl M der L und R^N gemeinschaftlichen Punkte $s_1, s_2, s_3 \ldots s_m$ erhält. In jedem Punkte P kann man an Φ^4 drei Tangentialebenen E_1, E_2, E_3 legen und jede berührt $\mathfrak{f}^{m+n}$ in n Punkten, die alle dem Punkte P entsprechen; umgekehrt sind einem Punkte Q m Punkte P zugeordnet, weil man in einem solchen m Tangentenebenen $E_1 \ldots E_m$ an $\mathfrak{f}^{m+n}$ legen kann und jede zugleich eine einfache Tangentialebene von Φ^4 ist. Die Beziehung zwischen den Reihen $L(P)$ und $L(Q)$ ist daher $m-3n$ deutig, und also die Zahl

$$M = m + 3n - q = N - n.$$

Der aus einem beliebigen Punkt P von L der Curve R^N umschriebene Kegel K^N ist von der Nten Ordnung, hat die in P sich schneidenden drei Erzeugenden e', e'' und e''' von Φ^4 — da jede eine $n$punktige Secante von R^N ist — zu $n$fachen und L selbst — aus demselben Grunde — zur Mfachen Kante.

Da dies, wie erwähnt, für jede Lage des Punktes P gilt, und eine Mfache Kante eines Kegels die Stelle von $\dfrac{M(M+1)}{2}$ Bedingungen vertritt [1]), ist die Zahl der K^N bestimmendee Daten (z. B. Kanten):

---

1) Bezüglich der Zahl der Bestimmungsstücke eines allgemeinen Kegels weisen wir den g. Leser auf die für ebene Curven aufgestellten Plücker'schen

$$Z = \frac{N(N+3)}{2} - \frac{M(M+1)}{2} - \frac{3n(n+1)}{2},$$

welche durch Substitution des Wertes:

$$n = N - M$$

die Form

I) . . . . $Z = M - (M - N)(2M - N)$

annimmt.

Formeln, welche auch für Kegel Geltung haben; nur muss man, wie aus der Projection genannter Curve erhellt, statt Punkte — Kanten als Elemente annehmen. Dass eine Mfache Kante eines Kegels für $\frac{M(M+1)}{2}$ Bedingungen (z. B. einfache Kanten) gilt, dürfte doch nicht allgemein bekannt sein; weshalb wir hier einen, unseres Wissens, neuen Beweis des reciproken für ebene Curven geltenden Satzes, dass ein Mfacher Punkt $\frac{M(M+1)}{2}$ einfache Bestimmungsstücke ersetzt, geben.

Wir fassen, um recht schnell an's Ziel zu gelangen, eine Curve $M+1$ ter Ordnung mit einem Mfachen Punkte L in's Auge. Wählen diesen und irgend einen einfachen Punkt E zu Scheiteln von Strahlenbüscheln $L(A)$ und $E(B)$, welche C^{M+1} erzeugen sollen. Irgend ein Strahl A des ersten Büschels schneidet C^{M+1}, ausser in L, in einem Punkte p, der mit E den A zugeordneten Strahl B des letztern Büschels fixirt. Diesem entsprechen M Strahlen A, da er die Curve in E und M andern Punkten trifft.

Die Beziehung zwischen B und A ist eine $1-m$ deutige, und daher die Verwandschaftsgleichung der Büschel — welche zugleich Gleichung der Curve ist — die folgende:

$$\text{I)}\quad \sigma[\alpha_0\varrho^M + \alpha_1\varrho^{M-1} + \ldots + \alpha_{M-1}\varrho + \alpha_M] + [\beta_0\varrho^M + \beta_1\varrho^{M-1} + \ldots + \beta_{M-1}\varrho + \beta_M] = 0$$

wenn σ das Teilverhältniss irgend eines Strahles B von $E(B)$, bezüglich zweier angenommener fester Strahlen B_1 und B_2 des Büschels E bedeutet; und analog mit ϱ das Teilverhältniss eines Strahles A, bezogen auf zwei bekannte Strahlen A_1 und A_2 von $L(A)$ bezeichnet ist.

Nehmen wir L zum Ursprung und A_1 und A_2 zu Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, in welchem x und y die Coordinaten eines Punktes sind, so ist:

$$\varrho = \frac{x}{y}$$

und

$$\sigma = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2},$$

Dies ist die Zahl der Bestimmungsstücke für einen der Curve R^N umschriebenen Kegel K^N, möge seine Spitze P irgendwo auf L angenommen sein.

Dieser Kegel hat mit Φ^4 ausser R^N den drei Erzeugenden e', e'', e''', welche sich in P schneiden, und welche zusammen im Gesammtschnitt $(\Phi^4 K^N)$ — der von der Ordnung $4N$ ist — als Linie $3n$ter Ordnung treten, und der Geraden L, welche für einen Schnitt $3M$ter Ordnung gilt, keine weitere Linie gemein; da die Summe der Ordnungszahlen der Schnittlinien:

$$N+3n+3M = N+3n+3(N-n) = 4N \quad \text{ist.}$$

Wenn wir daher Z Punkte $p_1, p_2 \ldots p_z$ der Regelfläche Φ^4 mit irgend einem Punkte P von L verbinden, diese z Verbindungslinien $l_1, l_2 \ldots l_z$ als Kanten des Kegels K^N (Nter Ordg.) ansehen, welcher L zur Mfachen und die drei in P sich begegnenden Eezeugenden e', e'', e''' zu $n$fachen Kanten hat; so wird dieser Φ^4 noch in einer Curve

---

wenn $a_1x+b_1y+c_1=0$ und $a_2x+b_2y+c_2=0$ bzhw. die Gleichungen von B_1 und B_2 sind.

Dnrch Substitution dieser Werte von ϱ und σ in die Gl. I) erhält man:

$$(a_1x+b_1y+c_1)[\alpha_0x^M+\alpha_1x^{M-1}y+\alpha_2x^{M-2}y^2+\ldots+\alpha_{M-1}xy^{M-1}+\alpha_My^M]+$$
$$+(a_2x+b_2y+c_2)[\beta_0x^M+\beta_1x^{M-1}y+\beta_2x^{M-2}y^2+\ldots+\beta_{M-1}xy^{M-1}+\beta_My^M]=0$$

welche Gleichung durch Zusammenfassen gleich hoher Potenzen die folgende Form annimmt:

$$\text{II)}\quad A_1x^{M+1}+A_2x^My+A_3x^{M-1}y^2+\ldots+A_Mx^2y^{M-1}+A_{M+1}xy^M+A_{M+2}y^{M+1}$$
$$B_1x^M+B_2x^{M-1}y+B_3x^{M-2}y^2+\ldots+B_Mxy^{M-1}+B_{M-1}y^M=0$$

Dies ist also die Gleichung der Curve C^{M+1}, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, welches ihren Mfachen Punkt zum Anfangspunkt hat. Sie hat $(M+2)+(M+1)-1=2(M+1)$ unabhängige Coefficienten, und ist daher durch ebenso viele Punkte und ihren Mfachen Punkt bestimmt. Daraus und aus der Tatsache, dass eine allg. Curve $M+1$ter Ordnung durch $\frac{1}{2}(M+1)(M+4)$ Punkte (Bedingungen) gegeben ist, folgt, dass der gegebene Mfache Punkt L für $\frac{1}{2}(M+1)(M+4)-2(M+1)=\frac{1}{2}M(M+1)$ einfache Bestimmungsstücke gilt, was zu beweisen war.

Will man den Beweis an einer ganz allgemeinen Curve besprochener Art, z. B. einer Curve C^{M+N} $M+N$ter Ordnung erhärten, so hat man in derselben Weise vorzugehen, nur statt Gl. I) die folgende zum Ausgangspunkt zu wählen:

$$\sigma^N[\alpha_1\varrho^{M+N-1}+\alpha_2\varrho^{M+N-2}+\ldots\alpha_{M+N}]+\sigma^{N-1}[\beta_1\varrho^{M+N-1}+\ldots]$$
$$+\ldots+[\gamma_1\varrho^{M+N-1}+\ldots+\gamma_{M+N}]=0.$$

r^N Nter Ordnung schneiden, welche durch die z gegebenen Punkte läuft, L zur Mpunktigen und jede Gerade e zur $n$punktigen Secante hat. Die M Schnitte der Curve r^N erkennen wir als die Berührungspunkte der M, den Kegel K^N längs L tangirenden Ebenen mit Φ^4. Ebenso sind die n einer (der drei gen.) Erzeugenden e der Curve r^n gemeinschaftlichen Punkte jene, in welchen Φ^4 von den n Tangentialebenen des Kegels K^N in der Kante e berührt wird.

Hätten wir die Z Punkte auf R^N augenommen, so wäre der durch sie und einen Punkt P in angegebener Weise fixirte Kegel K^N offenbar identisch mit jenen Kegel, welchen wir der Curve R^N aus P umschreiben.

Dies aber hat zur Folge, dass auch die Curven R^N und r^N — welche die Gerade L gleich oft treffen und Z Punkte gemein haben — Punkt für Punkt zusammenfallen, und beweist in Verbindung mit dem Vorhergehenden die Richtigkeit des Satzes:

„Die Anzahl der Puukte, durch welche eine der Regelfläche Φ^4 eingeschriebene Raumcurve Nter Ordnung, die die dreifache Gerade zur Mpunktigen Secante hat, gegeben ist, ist:

$$Z = M - (M - N)(2M - N)\text{“}$$ [1]

Wichtig ist es nun zu wissen, wie man die Zahlen M und N wählen darf. Dass diese von einander nicht ganz unabhängig sind, sehen wir bereits aus der Gleichung

$$n = N - M;$$

in welcher n die Anzahl der Punkte bezeichnet, in welchen irgend eine Erzeugende e der Regelfläche Φ^4 die Curve R^N schneidet.

Das Verhältniss zwischen diesen Zahlen ist leicht zu finden, wenn wir bemerken, dass der der Curve R^N aus einem Punkte P von L umschriebene Kegel K^N — wenn er nicht in Kegel niederer Ordnung und mithin R^N in Curven niederer Ordnung zerfallen soll — höchstens $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ Doppelkanten, oder vielfache Kanten, welche

---

[1]) In derselben Weise findet man, dass eine einer Regelfläche Φ^{m+1} $m+1$ter Ordnung mit einer $m$fachen Geraden L eingeschriebene Raumcurve Nter Ordnung, welche L Mmal schneidet, durch:

$$z = \tfrac{1}{2}[(1+m)[N-M+(N-M)^2] + \\ + 2(M-m(N-M))(N-M+1) + 2(N-M)]$$

Punkte gegeben ist

diese Anzahl ersetzen, haben kann, dass demnach, weil eine ϱfache Kante für $\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}$ Doppelkanten gilt, K^N aber L zur Mfachen und die drei in P sich treffenden Erzeugenden e', e'', e''' von Φ^4 zu $n$fachen Kanten hat, immer die Relation:

$$\frac{M(M-1)}{2}+\frac{3n(n-1)}{2}\leqq\frac{(N-1)(N-2)}{2}$$

bestehen muss.

Setzen wir in diesem Ausdruck für M den Wert $N-n$, so erhalten wir nach einigen Reductionen das Resultat:

II) . . . . $N\geqq 2n+1$,

welches sich nach Einführung von M auch in der folgenden Form schreiben

III) . . . . $M\geqq\frac{N+1}{2}$

und in den zwei gegenüber stehenden Sätzen aussprechen lässt:

„Eine der Regelfläche Φ^4 umschriebene Raumcurve, welche die Erzeugenden zu $n$punktigen Secanten hat, ist mindestens von der Ordnung $2n+1$ [1]).“

„Eine auf der Regelfläche Φ^4 liegende Raumcurve Nter Ordnung hat die dreifache Gerade L mindestens zur $\frac{N+1}{2}$punktigen Secante.“

Setzen wir in II) für n die Werte:

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ldots$$

so ergiebt sich für N die Reihe:

$$N\geqq 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\ldots$$

---

1) Für die erwähnte Regelfläche Φ^{m+1} ($m+1$ter Ordnung mit einer $m$fachen Geraden) ist, wenn $n=N-M$ gesetzt wird

$$N\geqq\frac{n^2(1=m)+n(1-m)-2}{2(n-1)},$$

wobei auch hier N die Ordnungszahl der Curve und n die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Erzeugenden der Φ^{m+1} bezeichnet.

aus welcher u. A. ersichtlich ist, dass eine Φ^4 eingeschriebene Raumcurve R^4 vierter Ordnung die Erzeugenden dieser Fläche nie zu zweipunktigen Secanten haben kann; daher auf Φ^4 nur Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Art liegen.

Dieses Ergebniss ist übrigens unmittelbar klar, nachdem eine Curve R^4, welche jede Erzeugende und daher auch L zur zweipunktigen Secante hat, sich aus einem Punkte P von L durch einen Kegel K^4 projicirt, der sowohl L, als auch die drei sich in P schneidenden Erzeugenden zu Doppelkanten hat, also in zwei Kegel zweiten Grades degenerirt, die auf Φ^4 ebenso viele Kegelschnitte fixiren.

Art. 18. Bevor wir zur Untersuchung der speciellen Raumcurven übergehen, haben wir noch nachzuweisen, dass die Formel I) allgemein, d. h. für jede Φ^4 eingeschriebene Raumcurve R^N Nter Ordnung gilt.

Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass man für R^N die Zahl der Bestimmungsstücke in der Art des letzten Artikels bestimmt. Wir nehmen zu dem Ende an, R^N würde irgend eine Erzeugende von Φ^4 in n Punkten schneiden — wobei nach der Relation II) immer die Bedingung $n \leqq \frac{N-1}{2}$ statt haben muss — und also L zur $N-n=M$ punktigen Secante besitzen.

Der der Curve aus einem Punkte P von L umschriebene Kegel K^N hat unter dieser Annahme L zur Mfachen und jede drei sich in P begegnenden Erzeugenden zur $n=N-M$fachen Kante; ist demnach durch die Angabe von:

$$Z = \tfrac{1}{2}[N(N+3) - M(M+1) - 3(N-M)(N-M+1)]$$
$$= M - (M-N)(2M-N)$$

Kanten, und also R^N durch ebenso viele Punkte gegeben [1]).

Dieses Resultat stimmt vollkommen mit dem im letzten Artikel gefundenen, und beweist daher unsere Behauptung.

Wir müssen noch bemerken, dass es keinesfalls gleichgiltig ist, ob einige der gegebenen Punkte einfache Punkte der Regelfläche sind, oder ob sie auf der dreifachen Geraden L angenommen wurden. Denn während im ersten Fall der Punkt p mit andern $z-1$ Punkten — die sich ebenfalls nicht auf L befinden — die Curve R^N eindeutig

---

1) Die Beweisführung — welche eine Wiederholung des Art. 17. wäre — ist hier nur angedeutet.

fixirt, laufen durch die letzteren und einen Punkt P von L drei Curven genannter Art und wir müssen zur vollständigen Bestimmung von R^N noch angeben, welche von den drei Tangentialebenen der Regelfläche Φ^4 im Punkte P sie berühre; nachdem erst diese, als eine Tangentialebene des [R^N aus einem Punkte von L umschriebenen] Kegels K^N diesen, und zwar mit den andern Punkten fixirt.

Will man entscheiden für wie viele Bedingungen ein auf L gegebener ϱfacher Punkt P_ϱ einer Raumcurve R^N gilt, so umschreibe man aus ihm der Curve den Kegel. Dieser ist von der Ordnung $N-\varrho$ und hat L zur $M-\varrho$ fachen Kante.

Die sämmtlichen ϱ Tangenten der Curve R^N in P_ϱ müssen in den drei Tangentenebenen E_1, E_2, E_3 der Regelfläche Φ^4 im bezeichneten Punkte liegen; und wir wollen, um wieder den allgemeinsten Fall im Auge zu haben, annehmen, dass sich μ derselben in E_1, ν in E_2 und daher $\varrho-\mu-\nu$ in E_3 befinden. Unter dieser Voraussetzung sind die drei in P_ϱ zusammen treffenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_2$ von Φ^4 vielfache Kanten von $K^{N-\varrho}$ und zwar — wie eine kurze Ueberlegung zeigt — bzhw. vom Grade $n-\mu$, $n-\nu$ und $n-\varrho+\mu+\nu$, so dass $K^{N-\varrho}$ und mithin auch R^N durch Angabe von:

$$Z = M-(M-N)(2M-N)-\tfrac{1}{2}[\varrho^2+2\mu^2+2\nu^2-2\varrho\mu-2\varrho\nu+2\mu\nu+\varrho]$$

weiteren Bedingungen gegeben sind. Aus welchem Ergebniss erhellt, dass der ϱfache Punkt:

$$\text{IV)} \quad \ldots \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}[\varrho^2+2\mu^2+2\nu^2-2\varrho\mu-2\varrho\nu+2\mu\nu+\varrho]$$

einfache Daten vertritt.

Ist nicht angegeben, welche der Ebenen E_1, E_2, E_3, μ und welche ν Tangenten des Punktes P_ϱ enthalten, das Verhältniss $(\mu:\nu:\lambda)$ ihrer Verteilung jedoch bekannt; so haftet dieser Angabe immer eine Vieldeutigkeit im Resultat an. So genügen z. B. den besprochenen Bedingungen sechs Curven R^N, alle diese haben in P_ϱ einen ϱfachen Punkt und enthalten die $z-\mathfrak{z}$ einfachen Punkte, jede wird aber in P_ϱ in Verteilung ihrer Tangenten auf E_1, E_2, E_3 von den andern unterschieden sein.

Um dies klarer zu machen, nehmen wir an, es sei $\varrho=2$ und $\mu=\nu=1$, d. h. die Curve R^N habe in P_ϱ einen Doppelpunkt, dessen zwei Tangenten nicht in einer Φ^4 in P_ϱ berührenden Ebene E_1, E_2, E_3, sondern in zwei derselben liegen.

Aus Formel IV) resultirt für diesen Fall $\mathfrak{z}=2$, woraus hervorgeht, dass der Doppelpunkt P_ϱ für zwei Bedingungen gilt, welche

jedoch nicht eindeutig sind, da, den drei Combinationen E_1E_2, E_1E_3 und E_2E_3 entsprechend durch $z-2$ Punkte drei Curven R^N gehen, die alle P_ϱ zum Doppelpunkt haben, deren jede jedoch ein anderes der drei Ebenenpaare berührt [1]).

Allerdings kann auch der Fall vorkommen, dass ein einfacher auf L gelegener Punkt einer bestimmten Anzahl eindeutiger Bedingungen äquivalent ist, doch sind dies nur Ausnahmen.

So ist eine Curve R^N, welche in P_ϱ einen dreifachen Punkt hat, dessen jede Tangente in einer andern der drei Ebenen E_1, E_2, E_3 liegt, durch Angabe von noch $Z-3$ Punkten eindeutig gegeben; während durch $Z-6$ Punkte drei Curven R^N laufen, die denselben Punkt P_ϱ zum dreifachen Punkt haben, dessen drei Tangenten jedoch in einer Ebene E liegen.

Art. 19. Einfacher gestaltet sich die Bestimmung der Zahl der Bedingungen, welche durch einen gegebenen ϱfachen Punkt, der sich nicht auf L befindet, vertreten wird. Er liefert nämlich mit irgend einem Punkte P von L verbunden eine Gerade $\overline{p_\varrho L}$, welche eine ϱfache Kante für den aus P der Curve R^N umschriebenen Kegel K^N ist. Diese Kante gilt für $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ einfache Kanten und daher der ϱfache Punkt p_ϱ für

$$\text{V)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{z}' = \frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$$

Punkte der Curve R^N.

Jede Tangente t der Curve in p_ϱ — und überhaupt in irgend einem Punkt derselben — gibt ein weiteres Bestimmungsstück; weil die durch sie und $\overline{p_\varrho P}$ gelegte Ebene den Kegel K^N längs dieser Kante tangirt, also eine Tangentialebene mit bekannter Berührungskante ist.

Aus diesen Erklärungen ist ersichtlich, dass alle Sätze, welche über vielfache Kanten und überhaupt über die Singularitäten eines Kegels bekannt sind, unmittelbar auf die Φ^4 eingeschriebene Raumcurve übertragen werden können.

So findet man durch weiteres Verfolgen dieses Vorganges u. A.,

---

1) Für $N=3$ erhalten wir das, auch in anderer Weise leicht zu beweisende Ergebniss, dass durch einen Punkt der Fläche Φ^4 drei ihr eingeschriebene Curven dritter Ordnung gehen, die denselben Punkt P von L zum Doppelpunkt haben.

dass ein Rückkehrpunkt der Curve. wenn er angegeben ist, für vier, wenn er blos als vorhanden angenommen wird, jedoch nur für zwei Bedingnngen gilt etc.

Auch die Rangzahl r der Raumcurve R^N kann man vermittelst des Kegels K^N, und zwar seiner Classenzahl c berechnen. Denn es ist klar, dass eine durch die Spitze P des Kegels K^N laufende Gerade g mindestens von so vielen Tangenten der Curve R^N getroffen wird, als man durch sie Tangentialebenen an den Kegel K^N legen kann. Diese Zahl wird aber immer um die Anzahl jener Tangenten vermehrt werden müssen, welche sich in der Spitze des Kegels K^N schneiden, und deren Berührungspunkte — nachdem sie sich als Rückkehrpunkte projiciren — zum Unterschiede von den eigentlichen Rückkehrpunkten der Curve, deren Bilder eben solche Punkte sind, scheinbare Rückkehrpunkte genannt werden.

Während also ein wirklicher Rückkehrpunkt der Curve ihren Rang um drei vermindert — entsprechend der Verringerung der Classenzahl des Kegels K^N durch die durch ihn bedingte Rückkehrkante — vermindert ein scheinbarer Rückkehrpunkt derselben ihren Rang nur um zwei, da seine Tangente immer durch die Spitze des Kegels läuft, und also g schneidet [1]).

Eine Mfache Kante des K^N, mag dieselbe durch einen wirklichen Mfachen Punkt der Curve, oder eine Mpunktige durch P gehende Secante derselben hervorgerufen werden, vermindert ihre Classe um $M(M-1)$ und daher den Rang der Curve um ebenso viel.

Daraus geht die Richtigkeit des folgenden Satzes unmittelbar hervor:

„Eine der Regelfläche Φ^4 eingeschriebene Raumcurve Nter Ordnung, welche die dreifache Gerade L zur $\frac{N+1}{2}$ punktigen Secante hat, ist vom Geschlechte Null."

Besitzt sie wirkliche Doppel- oder vielfache Punkte, so müssen diese immer auf L liegen, wenn sie nicht in Curven niederer Ordnung zerfallen soll.

Ist die Spitze P jenes Kegels K^N, welchen wir zur Bestimmung der Rangzahl der Curve R^N benutzen, ein ϱfacher Punkt derselben;

---

1) Dies stimmt mit der Behauptung im Art. 19. der Abhdlg. „Theorie der Regelfl. 4. Grades mit etc.", dass der Uebergang eines scheinbaren in einen wirklichen Rückkehrpunkt den Rang um Eins vermindert.

so hat man zu der in angegebener Weise gefundenen Zahl r noch 2ϱ zu addiren, um die Rangzahl zu erhalten [1]).

Art. 20. Da eine, wenn auch nur kurze Untersuchung der speciellen Raumcurven den Umfang dieser Schrift durch die Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle allzusehr vergrössern würde, wollen wir nur jene, welche die Erzeugenden der Fläche Φ^4 zu einpunktigen Secanten haben, kurz berühren. Die Raumcurven dieser Art haben Vertreter in allen Ordnungen und erwecken auch deshalb besonderes Interesse, weil zu ihnen auch die Berührungscurven der Regelfläche gehören.

Die Kegelschnitte haben wir zu Genüge besprochen.

Für die Raumcurven R^3 dritter Ordnung finden wir durch Substitution von $N = 3$ in die für alle diese Curven geltende Formel

$$Z = 2N - 3 \quad ^{2)},$$

dass sie durch Angabe von drei Punkten vollkommen bestimmt sind. In dem von den unendlich vielen Raumcurven dritter Ordnung R^3, welche durch zwei gegebene Punkte p' und p'' laufen, gebildeten Büschel sind auch zwei ebene Curven dritter Ordnung C^3 (siehe Art. 13.) und zwei degenerirte Curven. Jede der letztern wird durch den durch den einen Punkt laufenden Kegelschnitt C_1^2 und die durch den zweiten fixirte Erzeugende e'' gebildet.

Durch zwei Punkte, von welchen der eine auf der dreifachen Geraden liegt, sind hingegen drei Curvenbüschel R^3 möglich, deren jedes durch eine Tangentialebene der Fläche im bezeichneten Punkt näher fixirt wird.

Eine auf Φ^4 liegende Raumcurve vierter Ordnung hat L immer zur dreipunktigen Secante, ist von der zweiten Art, dem Geschlechte Null und durch fünf Punkte gegeben.

Die Raumcurven fünfter Ordnung zerfallen bereits in zwei Classen R_1^5 und R_2^5, die der ersten Classe haben die Erzeugenden zu einpunktigen, die der zweiten zu zweipunktigen Secanten, diese sind durch fünf — jene durch sieben Punkte fixirt, und beide Gattungen sind vom Geschlechte Null. Haben sie vielfache Punkte, so liegen diese immer auf L.

---

1) Entsprechend den ϱ Tangenten der Curve in P_ϱ. Vergleiche Art. 5.

2) Diese Formel findet man aus Gl. I) im Art. 17., indem man $M = N - 1$ setzt.

Aehnliches gilt von den Raumcurven sechster Ordnung. Jene Gattung, welche die Erzeugenden einmal schneidet, ist durch neun Punkte bestimmt und vom Geschlechte Null; wogegen die andere mit jeder Erzeugenden zwei Punkte gemein hat, vom zwölften Rang ist und acht Punte zu ihrer Bestimmug erfordert etc.

Art. 21. Wir betrachten nun zwei Regelflächen Φ_1^4 und Φ_2^4, welche ausser der dreifachen Geraden L einen Kegelschnitt C^2 gemein haben, und sich daher noch in einer Raumcurve fünfter Ordnung schneiden.

Irgend eine durch L gelegte Ebene schneidet Φ_1^4 in einer Erzeugenden $\mathfrak{e}_1$, Φ_2^4 in einer solchen $\mathfrak{e}_2$, bestimmt auf C^2 den Punkt p und auf L die zwei Tangentialpunkte $\beta_1 \equiv (L\mathfrak{e}_1)$ und $\beta_2 \equiv (L\mathfrak{e}_2)$.

Die Beziehung zwischen diesen Punkten ist $3-3$ deutig (siehe Art. 17.) und es wird daher sechsmal geschehen, dass zwei entsprechende Punkte der durch sie gebildeten Reihen coincidiren. In jedem der sechs Doppelpunkte b, b_1, b_2 ... b_5 berühren sich beide Flächen, woraus umgekehrt folgt, dass einer dieser Punkte, etwa b, in den Schnitt von L und C^2 zu liegen kommt, während die andern fünf Punkte — wie erwähnt — dadurch zu Stande kommen, dass die in einer Ebene des Büschels L liegenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ beider Flächen sich nicht nur in dem Punkt p von C^2 schneiden, sondern auch L in demselben Punkt b_1 (oder b_2 ...) treffen, also ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen.

Die Curve R^5 besteht demnach aus fünf Erzeugenden, welche mit L und C^2 den Gesammtschnitt beider Regelflächen vorstellen. Durch diesen Gesammtschnitt kann man unendlich viele, ein Büschel bildende Flächen bezeichneter Art legen. Jedes Element (Φ^4) desselben ist durch Angabe noch eines Punktes fixirt.

III.

Die Regelfläche mit einer dreifachen und einer einfachen Leitgeraden.

Art. 22. Diese Fläche (φ^4) ist sowohl eine Specialität der Fläche Φ^4, als auch der — dieser reciproken — Fläche Ψ^4. Sie entsteht aus dieser Fläche durch die Annahme, dass die drei in einer Ebene der einfachen Leitgeraden liegenden Erzeugenden sich in einem Punkte treffen — dessen geometrischer Ort die dreifache Gerade ist. Reciprok specialisirt sich die Fläche Φ^4 zu der Regelfläche φ^4 durch

die Bedingung, dass die drei in einem Punkt P der dreifachen Geraden L zusammentreffenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}'''$ in einer Ebene E liegen.

Diese Ebene hat mit φ^4 noch eine Gerade G gemein, in welcher wir die einfache Leitlinie der Regelfläche erkennen. Denn irgend eine andere Ebene ihres Büschels schneidet die Regelfläche noch in einer Curve dritter Ordnung, welche, weil sie den Schnittpunkt P ihrer Ebene E mit L zum dreifachen Punkt hat, notwendig aus drei Geraden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$ bestehen muss. Diese bestimmen auf G ebenso viele Punkte — die Berührungspunkte B', B'', B''' der Ebene E — deren Gesammtheit eine kubische Involution[1]) bildet, die mit der Punktreihe $L(P)$ projectivisch ist und mit ihr φ^4 erzeugt.

Die Doppelpunkte dieser Involution sind die vier Inflexionspunkte der Regelfläche, ihnen entsprechen auf der dreifachen Geraden die vier Cuspidalpunkte etc.

Diese Fläche φ^4 kann man auch als das Erzeugniss des Ebenen-Büschels $G(E)$ und der diesem projectivischen mit $(G(B)$ projectivischen Ebenen-Involution $L(\mathfrak{E})$ ansehen. Die Beziehung zwischen beiden Gebilden ist allgemein ein-dreideutig und lässt sich durch die folgende Verwandschaftsgleichung ausdrücken:

$$\text{I)} \quad t(A_1s^3+A_2s^2+A_3s+A_4)+(B_1s^3+B_2s^2+B_3s+B_4)=0$$

in welcher t das Teilverhältniss einer Ebene E, bezogen auf zwei als fest angenommene Ebenen E_1, E_2 desselben Büschels bedeutet, und s den analogen Ausdruck für eine Ebene $\mathfrak{E}$ von $L(\mathfrak{E})$ vorstellt.

Nimmt man die dreifache Gerade L zur ζ Axe eines rechtwinkligen dreiaxigen Coordinatensystems und bezieht man s auf die $(\xi\zeta)$ und $(\nu\zeta)$ Ebenen desselben, so kann man es in der Form:

$$s=\frac{\nu}{\xi}$$

und das Teilverhältniss t durch die Gleichung:

$$t=\frac{a_1\xi+b_1\nu+c_1\xi+d_1}{a_2\xi+b_2\nu+c_2\xi+d_2}$$

darstellen.

---

1) Die Gleichung dieser Involution lässt sich in der Form:

$$ax^2y^2+b(x^2y+xy^2)+c(x^2+y^2)+dxy+e(x+y)+\mathfrak{f}=0$$

schreiben, wenn x und y die Teilverhältnisse zweier conjugirter Punkte, bezogen auf zwei als fix angenommene Pnnkte sind.

Substituirt man diese Werte in I), so resultirt nach Ausführung der angezeigten Operationen:

$$(a_1A_1+a_2B_1)\xi\nu^3+(b_1A_1+b_2B_1)\nu^4+(c_1A_1+c_2B_1)\nu^3\zeta+(d_1A_1+d_2B_1)\nu^3$$
$$+(a_1A_2+a_2B_2)\nu^2\xi^2+(b_2A_2+b_2B_2)\nu^3\xi+(c_1A_2+c_2B_2)\nu^2\xi\zeta$$
$$+(d_1A_2+d_2B_2)\nu^2\xi+(a_1A_3+a_2B_3)\nu\xi^3+(b_1A_3+b_2B_3)\nu^2\xi^2$$
$$+(c_1A_3+c_2B_3)\nu\xi^2\zeta+(d_1A_3+d_2B_3)\nu\xi^2+(a_1A_4+a_2B_4)\xi^4+(b_1A_4+b_2B_4)\nu\xi^3$$
$$+(c_1A_4+c_2B_4)\xi^3\zeta+(d_1A_4+d_2B_4)\xi^3=0,$$

welche Gleichung nach Zusammenfassung gleich hoher Potenzen in die folgende übergeht:

$$\text{II)} \;.\;.\;.\;.\; \alpha_1\xi^4+a_2\xi^3\nu+\alpha_3\xi^2\nu^2+\alpha_4\xi\nu^3+\alpha^5\nu^4$$
$$+\alpha_6\xi^3+\alpha_7\xi^2\nu+\alpha_8\xi\nu^2+\alpha_9\nu^3$$
$$+\zeta[\beta_1\xi^3+\beta_2\xi^2\nu+\beta_3\xi\nu^2+\beta_4\nu^3]=0$$

Dies ist also die Gleichung der Regelfläche φ^4 in dreiaxigen normalen Punktcoordinaten, bezogen auf die dreifache Gerade L als ζ Axe; sie hat zwölf unabhängige Constante, ist daher durch ebenso viele zusammengehörige Wertegruppen von ξ, ν und ζ oder also durch Angabe von zwölf Punkten bestimmt.

„Die Regelfläche vierten Grades mit einer einfachen und einer dreifachen Leitgeraden ist durch die letztere und zwölf Punkte — oder die erstere und zwölf Tangentenebenen vollkommen bestimmt."

Doch auch die Gleichung I) ist eine analytische Darstellung der Regelfläche φ^4; sie beweist — nachdem sie sieben unabhängige Coefficienten besitzt, und diese aus ebenso vielen entsprechenden Werten der Teilverhältnisse t und s berechnet werden können, jedes Wertepaar der letzteren aber eine Erzeugende der Fläche bedingt — die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Die Regelfläche φ^4 ist durch ihre beiden Leitgeraden und sieben Erzeugende (oder Punkte oder Tangentialebenen) eindeutig bestimmt."

Die Eigenschaften der Fläche φ^4 ergeben sich alle durch zweckmässige Specialisirung der im zweiten Abschnitt für die Flächen Φ^4 und Ψ^4 aufgestellten, und wir wollen von ihnen nur die erwähnen, dass jede Berührungscurve B^6 sechster Ordnung die einfache Leitlinie G in drei conjugirten Punkten B', B'', B''' der Involution $G(B)$ trifft; nachdem irgend eine Ebene des Büschels G die Fläche in einer solchen Punktgruppe berührt. Umgekehrt ist eine jede φ^4 eingeschriebene Raumcurve sechster Ordnung, welche die vier singulären

Erzeugenden in den Cuspidalpunkten tangirt und die einfache Leitlinie in drei conjugirten Punkten der Involution $G(B)$ schneidet, eine Berührungscurve der Fläche etc.

Es wäre noch zu bemerken, dass die untersuchten Flächen auch einer Einteilung fähig sind, welcher die Realität bzhw. Complexität der Cuspidalpunkte zu Grunde liegt.

Für die Regelfläche Φ^4 (und φ^4) ist wieder jener Fall vom besonderen Interesse, in welchem zwei Cuspidalpunkte coincidiren, die zugehörigen singulären Erzeugenden fallen dann auch zusammen und bilden eine Schmiegungserzeugende, welche die Eigenschaft hat, dass sich längs ihr jeder den Φ^4 eingeschriebenen Kegelschnitten aus dem bezeichneten Cuspidalpunkt umschriebener Kegel anschmiegt. Für φ^3 gehen alle diese Kegel in die dem Cuspidalpunkt perspectivische Cuspidalebene über.

XVII.

Ueber die Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel.

Von

R. Hoppe.

Unter der specifischen Gleichung einer Curve oder Curvenclasse habe ich in meiner Curventheorie (T. LVI. p. 41. und Lehrb. d. anal. Geom., Leizig 1880) die Relation zwischen dem Krümmungs- und Torsionswinkel

$$F(\tau, \vartheta) = 0$$

verstanden, d. h. zwischen denjenigen Variabeln, deren Differentiale $\partial\tau$, $\partial\vartheta$ die Contingenzwinkel bzhw. der Normal- und Schmiegungsebene sind. Durch sie ist die Natur der Curve, soweit sie von der Lage und vom Bogenelement unabhängig besteht, vollständig bestimmt. Durch ihre Integrationen werden drei willkürliche Constanten eingeführt, welche die Stellung der Curve gegen die Coordinatenaxen bestimmen. Unabhängig davon lässt sich dann das Bogenelement beliebig hinzufügen, und 3 einfache Quadraturen ergeben die Coordinaten des laufenden Punktes einer speciellen Curve, die also mit allen nur durch das Bogenelement unterschiedenen Curven eine Classe bildet. Relationen, welche der Classe zukommen, habe ich innere Beziehungen genannt. Da der gegenwärtige Aufsatz das Bogenelement nie zuzieht, mithin nur von innern Beziehungen handelt, so kann es nicht missverstanden werden, wenn statt Curvenclasse einfacher Curve gesagt wird.

Sind f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, l. m, n die der Binormale gegen die Axen der x, y, z, und bezeichnet der Strich die Differentiation nach τ, so sind f', g', h' die Richtungscosinus der Hauptnormale. Die positiven Richtungen seien so gewählt, dass

$$\begin{vmatrix} f & f' & l \\ g & g' & m \\ h & h' & n \end{vmatrix} = +1$$

wird. Durch Differentiation und Elimination findet man leicht eine lineare Gleichung 3. Ordnung, oder wenn man will eine nicht lineare 2. Ordnung, welche eine beliebige der 9 Grössen gemäss der specifischen Gleichung bestimmt. Ich habe gezeigt, dass sich in imaginärer Form auch eine lineare Gleichung 2. Ordnung geben lässt. Mit Einführnng des complexen Winkels μ kann man nämlich die Gleichung

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

zerlegen in

$$f \cos\mu + f' \sin\mu = 1 \tag{1}$$

$$f \sin\mu - f' \cos\mu = il \tag{2}$$

Differentiirt man beide Gleichungen und verbindet sie nach Multiplication mit $\cos\mu$, $\sin\mu$, so kommt:

$$\partial\mu + \partial\tau + i\partial\vartheta \sin\mu = 0$$

und nach Substitution

$$\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \frac{2r'}{r} \tag{3}$$

erhält man:

$$r'' + i\vartheta' r' + \tfrac{1}{4} r = 0 \tag{4}$$

Jeder Lösung dieser Gleichung, welche ich die Differentialgleichung der Curve nennen werde, entspricht eine zweite q, welche der conjugirte Wert ist von

$$q_1 = r' e^{i\vartheta} \tag{5}$$

Es bleibt dann noch übrig, die Constanten des vollständigen Integrals $Aq + Br$ einem orthogonalen System der 9 Richtungscosinus gemäss zu bestimmen. Hiervon war an angef. Stelle nur das Resultat mitgeteilt. Nachdem ich im folgenden die Entwickelung nachgeholt, wende ich mich zur Untersuchung neuer Fragen, die sich an Gl. (4) anschliessen.

§. 1. Berechnung der Curve aus einer Lösung ihrer Differentialgleichung.

Differentiirt man Gl. (5) so kommt:

$$q_1' = (r'' + i\vartheta' r')e^{i\vartheta}$$

das ist nach Gl. (4):

$$4q_1' = -re^{i\vartheta} \tag{6}$$

und nach Substitution $-i$ für i, wo r in r_1, q_1 in q übergeht, hat man mit Zuziehung von (5):

$$r_1 = -4q'e^{i\vartheta}; \quad r_1' = qe^{i\vartheta} \tag{7}$$

Da nun

$$q = kr \tag{8}$$

der Gl. (4) zugleich mit r genügen muss, so findet man nach Einführung:

$$k''r + 2k'r' + i\vartheta' k'r = 0$$

dies integrirt giebt:

$$k'r^2e^{i\vartheta} = -\frac{2}{a} \quad \text{(constant)} \tag{9}$$

Ferner erhält man nach Division der Gl. (5) durch Gl. (6):

$$\frac{r'}{r} = -\frac{q_1}{4q_1'} \tag{10}$$

also nach Gl. (3):

$$\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \frac{2r'}{r}; \quad \cot\frac{\mu}{2} = -\frac{2q_1'}{q_1} \tag{11}$$

Führt man diese Werte in die wie folgt

$$f' = \frac{1+f}{2}\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} + \frac{1-f}{2}\cot\frac{\mu}{2}$$

geschriebene Gl. (1) ein, so kommt:

$$\partial f = (1+f)\frac{\partial r}{r} - (1-f)\frac{\partial q_1}{q_1}$$

Nach dieser Differentialformel berechnet ist

$$\partial\frac{1-f}{rq_1} = -\frac{2\partial r}{r^2 q_1}$$

Durch Division der Gl. (5) (9) aber erhält man:

$$\frac{\partial r}{r^2 \partial k} = -\frac{a}{2}q_1$$

Dies in vorige Gleichung eingeführt giebt:

$$\partial\frac{1-f}{rq_1} = a\partial k$$

und nach Integration

$$1-f = (ak+C+iD)rq_1 = aqq_1+(C+iD)rq_1$$

Da der letzte Term, sofern rq_1 variabel und complex ist, nicht reell sein kann, so folgt, dass $C+iD = 0$ ist, also:

$$1-f = aqq_1$$

Eliminirt man k zwischen den Gl. (8) (9), so kommt:

$$qr'-rq' = \frac{2}{a}e^{-i\vartheta}$$

und nachdem man für r, r' ihre Werte aus Gl. (6) (5) eingesetzt hat:

$$qq_1+4q'q_1' = \frac{2}{a} \tag{12}$$

Da q einen willkürlichen constanten Factor hat, so kann man $\frac{q}{\sqrt{a}}$, $\frac{q_1}{\sqrt{a}}$ für q, q_1 schreiben. Dann wird

$$f = 1-qq_1 \tag{13}$$

und jener Factor ist nun so zu bestimmen, dass gemäss (12)

$$qq_1+4q'q_1' = 2 \tag{14}$$

wird.

Aus dem Werte von f findet man durch Differentiation:

$$f' = -q'q_1-qq_1' \tag{15}$$

Der Wert von l ergiebt sich aus Gl. (2), welche nach Elimination von f' geschrieben werden kann:

$$il = \frac{2-(1-f)\left(1+\cot^2\frac{\mu}{2}\right)}{2\cot\frac{\mu}{2}}$$

das ist nach Substitution der Werte (14) (13) (11) für 2, $1-f$, $\cot\frac{\mu}{2}$:

$$l = \frac{qq_1'-q'q_1}{i} \tag{16}$$

Die analogen Grössen für die y und z Axe sind in den Ausdrücken (13) (15) (16) nach Substitution des allgemeinen Integrals $Aq+Br$ für q enthalten. Man hat nur A und B den Bedingungen der Orthogonalität gemäss zu bestimmen. Bezeichnen A_1, B_1 die conjugirten Werte zu A, B, so ergiebt sich zuerst aus der Bedingung $fg+f'g'+lm=0$:

$$AA_1 = \tfrac{1}{2};\quad BB_1 = \tfrac{1}{8}$$

Man kann daher setzen

$$A = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}};\qquad B = \frac{e^{i(\alpha+\beta)}}{2\sqrt{2}}$$

dann fällt α aus allen Formeln heraus, β bleibt willkürlich und erfüllt in Bezug auf die dritte Axe die Bedingung:

$$n = fg' - gf'$$

wenn man es für die $y=0$, für die $z = -$ R setzt. Man hat also für y und z Axe:

$$A = A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

für y Axe

$$B = B_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

für z Axe

$$B = -B_1 = \frac{i}{2\sqrt{2}}$$

Das System der 9 Werte gestaltet sich besonders einfach, wenn man setzt:

$$q = (u+iu_1)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta};\quad q' = \tfrac{1}{2}(v-iv_1)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta}$$

Dann sind

$$p = u+iu_1,\quad p = v+iv_1$$

die zwei Specialwerte, welche der Gleichung

$$p'' + \tfrac{1}{4}(1+\vartheta'^2 - 2i\vartheta'')p = 0$$

genügen müssen, und man findet den zweiten aus dem ersten mittelst der Formeln:

$$v = 2u' + \vartheta' u_1;\quad v_1 = -2u_1' + \vartheta' u$$

Der constante Factor der Integrale p ist bestimmt durch

$$u^2 + u_1^2 + v^2 + v_1^2 = 2$$

und die Tabelle der Werte lautet:

$$\begin{aligned} f &= 1 - u^2 - u_1^2 = v^2 + v_1^2 - 1 \\ g &= uv + u_1 v_1 \\ h &= uv_1 - u_1 v \end{aligned}$$

$$f' = -uv + u_1v_1$$
$$g' = 1 - u^2 - v_1^2 = u_1^2 + v^2 - 1$$
$$h' = uu_1 + vv_1$$
$$l = uv_1 + u_1v$$
$$m = uu_1 - vv_1$$
$$n = 1 - u_1^2 - v_1^2 = u^2 + v^2 - 1$$

§. 2. Reelle Elemente.

Die Grössen μ und r sind als implicite Complexe eingeführt; es ist aber aus Gl. (4) zu ersehen, dass ihre reellen Elemente eine Relation erfüllen müssen, damit ϑ' reell wird; diese soll ermittelt werden. Sei

$$r = e^{M+iN} \tag{17}$$

und M und N reell. Dann zerfällt Gl. (4) in folgende zwei:

$$M'' + M'^2 - N'^2 - \vartheta' N' + \tfrac{1}{4} = 0$$
$$N'' + 2M'N' + \vartheta' M' = 0$$

woraus nach Elimination von ϑ':

$$M'M'' + N'N'' + M'(M'^2 + N'^2) + \tfrac{1}{4}M' = 0$$

und nach Integration:

$$M'^2 + N'^2 + \tfrac{1}{4} = e^{-2M}$$

Die Integrationsconstante ist der willkürliche Factor von r. Hiernach lässt sich N entwickelt in M darstellen; zur Vereinfachung sei jedoch

$$M = \log(2\cos\varkappa) \tag{18}$$

dann wird

$$N'^2 = \operatorname{tg}^2\varkappa\,(\tfrac{1}{4} - \varkappa'^2)$$

Damit M jede reelle Grösse vertreten könne, muss nach Gl. (18) $\varkappa$ die Werte zwischen 0 und R, und ausserdem $i\varkappa$ alle Werte von 0 bis ∞ durchlaufen. Für die letztern ist $\frac{1}{4} - \varkappa'^2$ positiv, $\operatorname{tg}^2\varkappa$ negativ, also N' nicht reell. Nachdem also $\varkappa$ auf die reellen Werte von 0 bis R beschränkt ist, muss weiter $\varkappa' \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ sein, und man kann ohne Abzug an Allgemeinheit für τ die Variable π einführen mit der Relation:

$$\partial\tau = \frac{2\partial\varkappa}{\sin\pi}$$

dann wird, wenn man ω für N schreibt,

$$\partial\omega = \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,\varkappa\cos\pi\,\partial\tau = \mathrm{tg}\,\varkappa\cot\pi\,\partial\varkappa$$

mithin nach Gl. (17)

$$r = 2\cos\varkappa \,.\, e^{i\omega} \tag{19}$$

woraus nach Differentiation:

$$r' = i\sin\varkappa\, e^{i(\omega+\pi)}; \quad r'' + \frac{r}{4} = \frac{\cos 2\varkappa\cos\pi - \pi'\sin 2\varkappa}{2\cos\varkappa} e^{i(\omega+\pi)} \tag{20}$$

und nach Division gemäss Gl. (4):

$$\vartheta' = \cot 2\varkappa\cos\pi - \pi'$$

Sei

$$\partial\psi = \cot 2\varkappa\cos\pi\,\partial\tau = 2\cot 2\varkappa\cot\pi\,\partial\varkappa$$

dann wird

$$\vartheta = \psi - \pi$$

Jetzt ist nach Gl. (5) und (20)

$$q_1 = i\sin\varkappa\, e^{i(\psi+\omega)}$$

mithin die zugehörige zweite Lösung

$$q = -i\sin\varkappa\, e^{-i(\psi+\omega)}$$

Beide Lösungen müssen noch einen gemeinsamen constanten Factor erhalten, welcher der Gl. (14) genügt. Da nun vorstehende Werte ergeben

$$qq_1 + 4q'q_1' = 1$$

so ist dieser Factor $= \sqrt{2}$, und man hat anzuwenden für x Axe:

$$q = -i\sqrt{2}\sin\varkappa\, e^{-i(\psi+\omega)}; \quad r = 2\sqrt{2}\cos\varkappa\, e^{i\omega}$$

Für y und z Axe entsprechen dem q die zusammengesetzten Lösungen:

$$\frac{q+\frac{1}{2}r}{\sqrt{2}} = \cos\varkappa\, e^{i\omega} - i\sin\varkappa\, e^{-i(\psi+\omega)}$$

$$\frac{q+\frac{1}{2}ir}{\sqrt{2}} = i\{\cos\varkappa\, e^{i\omega} - \sin\varkappa\, e^{-i(\psi+\omega)}\}$$

Jetzt sind nach der Formel (13) die Richtungscosinus der Tangente:

$$f = 1 - qq_1 = \cos 2\varkappa$$
$$g = 1 - \tfrac{1}{2}(q+\tfrac{1}{2}r)(q_1+\tfrac{1}{2}r_1) = \sin 2\varkappa\sin(\psi+2\omega)$$
$$h = 1 - \tfrac{1}{2}(q+\tfrac{1}{2}ir)(q_1-\tfrac{1}{2}ir_1) = \sin 2\varkappa\cos(\psi+2\omega)$$

Durch Differentiation geht daraus hervor:

$$f' = -\sin 2\varkappa\sin\pi$$
$$g' = \cos 2\varkappa\sin\pi\sin(\psi+2\omega) + \cos\pi\cos(\psi+2\omega)$$
$$h' = \cos 2\varkappa\sin\pi\cos(\psi+2\omega) - \cos\pi\sin(\psi+2\omega)$$

und nach der Relation $l = gh' - hg'$ folgt:

$$l = -\sin 2\varkappa \cos \pi$$
$$m = \cos 2\varkappa \cos \pi \sin(\psi + 2\omega) - \sin \pi \cos(\psi + 2\omega)$$
$$n = \cos 2\varkappa \cos \pi \cos(\psi + 2\omega) + \sin \pi \sin(\psi + 2\omega)$$

Hier kann man $\varkappa$ und π als zwei Variable ansehen, die in einer die Curve bestimmenden, die specifische Gleichung vertretenden Relation stehen. Die übrigen Variabeln sind in ihnen dargestellt durch

$$\psi = 2\int \partial\varkappa \cot 2\varkappa \cot \pi; \quad \omega = \int \partial\varkappa \operatorname{tg} \varkappa \cot \pi \tag{21}$$

$$\tau = 2\int \frac{\partial\varkappa}{\sin \pi}; \quad \vartheta = \psi - \pi \tag{22}$$

Will man auch in den Functionen von μ die reellen Elemente scheiden, so hat man zunächst:

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{2r'}{r} = i \operatorname{tg} \varkappa e^{i\pi} \tag{23}$$

woraus die übrigen Functionen leicht folgen.

Zu bemerken ist noch, dass eine Constante zu ψ addirt nur eine Drehung um die x Axe bewirkt. Unabhängig davon lässt sich die Constante in ϑ beliebig wählen.

§. 3. Curven für einfache Fälle der specifischen Gleichung.

Im voraus sei aus der Curventheorie erwähnt, dass die Krümmungsbreite λ und der Torsionsbogen σ definirt sind durch

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}; \quad \partial\sigma = \frac{\partial\tau}{\cos \lambda} = \frac{\partial\vartheta}{\sin \lambda}$$

Statt der Formel für ω kommt hier nur vor die folgende:

$$\psi + 2\omega = 2\int \partial\varkappa \frac{\cot \pi}{\sin 2\varkappa} = \int \partial\tau \frac{\cos \pi}{\sin 2\varkappa} \tag{24}$$

Sei zuerst $\pi = 0$; dann giebt dieselbe, da $\varkappa$ constant:

$$\psi + 2\omega = \frac{\tau}{\sin 2\varkappa}$$

ausserdem ist

$$\psi = \tau \cot 2\varkappa = \vartheta$$

folglich

$$\cot 2\varkappa = \operatorname{tg} \lambda; \quad 2\varkappa = \mathrm{R} - \lambda$$

$$\psi + 2\omega = \frac{\tau}{\cos\lambda} = \sigma; \quad \vartheta = \tau \operatorname{tg}\lambda$$

Der Wert $\pi = 0$ entspricht also einer linearen Relation zwischen τ, ϑ; die Krümmungsbreite ist constant, σ mit τ, ϑ proportional, und die 9 Richtungscosinus werden:

$$\left.\begin{array}{lll} f = \sin\lambda; & g = \cos\lambda\cos\sigma; & h = \cos\lambda\sin\sigma \\ f' = 0; & g' = -\sin\sigma; & h' = \cos\sigma \\ l = \cos\lambda; & m = -\sin\lambda\cos\sigma; & n = -\sin\lambda\sin\sigma \end{array}\right\} \tag{25}$$

Setzt man ferner

$$\sin 2\varkappa \sin\pi = c \quad \text{(constant)} \tag{26}$$

so findet man:

$$\tau = -\frac{\cos 2\varkappa}{c}; \quad \vartheta = \cot\pi$$

woraus:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\cot 2\varkappa}{\cos\pi} = \frac{\cos 2\varkappa}{c} \operatorname{tg}\pi$$

und in Verbindung mit Gl. (26):

$$\cos 2\varkappa = \sqrt{1 - c^2}\sin\lambda; \quad \operatorname{tg}\pi = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}\cos\lambda} \tag{27}$$

Jetzt wird nach Gl. (24):

$$\psi + 2\omega = \frac{2}{c}\int \partial\varkappa \cos\pi$$

das ist, wenn man $\varkappa$ und π auf λ zurückführt und integrirt:

$$\psi + 2\omega = \operatorname{arctg}(c \operatorname{tg}\lambda) - \frac{\lambda}{c} \tag{28}$$

Ferner sind, in λ ausgedrückt,

$$\tau = -\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\sin\lambda; \quad \vartheta = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\cos\lambda \tag{29}$$

und die specifische Gleichung wird

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \frac{1}{c^2} - 1 \tag{30}$$

Die 9 Richtungscosinus stellen sich sehr einfach in λ dar. Man braucht nur die Werte (27) (28) in die allgemeinen Ausdrücke einzuführen. Doch gelangen wir später auf kürzerem Wege zu diesem Ziele.

Als drittes Beispiel sei π constant. Dann wird

$$\psi = \cot\pi \log \sin 2\varkappa; \quad \psi + 2\omega = \cot\pi \log \operatorname{tg} \varkappa$$

$$\tau = \frac{2\varkappa}{\sin\pi}; \quad \vartheta = \psi - \pi$$

woraus:

$$e^{\vartheta \operatorname{tg}\pi} = \sin(\tau \sin\pi) \tag{31}$$

$$\psi + 2\omega = \cot\pi \log \operatorname{tg} \frac{\tau \sin\pi}{2}$$

$$\sin 2\varkappa = e^{\vartheta \operatorname{tg}\pi}$$

Sei ferner

$$\pi = R - 2\varkappa$$

Dann findet man:

$$\psi = 2\varkappa; \quad \psi + 2\omega = \tau = \log\cot\frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta = 4\varkappa + 2R; \quad \operatorname{tg}\lambda = 2\sin\pi$$

woraus:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4} = e^{\tau}; \quad \operatorname{tg}\lambda = 2\sin\frac{\vartheta}{2} \tag{32}$$

$$\pi = 2R - \frac{\vartheta}{2}; \quad \varkappa = \frac{\vartheta}{4} - \frac{R}{2}; \quad \psi + 2\omega = \tau$$

Dies eingeführt giebt:

$$f = \sin\frac{\vartheta}{2}; \quad g = -\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\tau; \quad h = -\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\tau$$

$$f' = \tfrac{1}{2}\sin\vartheta; \quad g' = \sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\tau - \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\tau$$

$$h' = \sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos\tau + \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\tau$$

$$l = -\cos^2\frac{\vartheta}{2}; \quad m = -\sin\frac{\vartheta}{2}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\tau + \cos\tau\right)$$

$$n = -\sin\frac{\vartheta}{2}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\tau - \sin\tau\right)$$

Sei ferner

$$\pi = R - 4\varkappa$$

Hier wird

$$\psi = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}; \quad \psi + 2\omega = 2\sin\frac{R - \pi}{2}$$

$$\tau = -\tfrac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}; \quad \vartheta = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}$$

und die specifische Gleichung lautet:

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}e^{-2\tau} - 3\operatorname{arctg} e^{-2\tau} \tag{33}$$

§. 4. Reihen lösbarer specifischen Gleichungen.

Begleitende Curve einer Curve s habe ich eine solche genannt, deren Tangente relativ zum begleitenden Axensystem (Tangente, Hauptnormale, Binormale) von s durch Bestimmungsgrössen der Urcurve ausgedrückt ist. Gegenwärtig wird nur die Richtung der Tangente der Begleitenden in Betracht kommen.

Nächst der Parallelität der beiderseitigen Tangenten, welche hier kein Interesse hat, gab es zwei Fälle, in denen die specifischen Gleichungen der beiden Curven in einfacher Beziehung zu einander stehen. Bezeichnet man durch den Index 1 die Zugehörigkeit zur Begleitenden, so war der erste Fall der, wo die Hauptnormalen von s und s_1 gleiche Richtungen hatten, ihre Tangenten einen constanten Winkel bildeten, so dass, anwendbar auf alle 3 Coordinatenaxen, angenommen war:

$$f_1 = f\cos\alpha + l\sin\alpha; \quad l_1 = -f\sin\alpha + l\cos\alpha; \quad f_1' = f'$$

und daraus folgte:

$$\vartheta_1 = \vartheta\cos\alpha + \tau\sin\alpha; \quad \tau_1 = -\vartheta\sin\alpha + \tau\cos\alpha \tag{34}$$

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \lambda_1 = \lambda + \alpha$$

Der zweite Fall war der einer Tangente an s_1 in der Richtung der Hauptnormale von s, wo also

$$f_1 = f'; \quad l_1 = l\cos\lambda + f\sin\lambda; \quad f_1' = l\sin\lambda - f\cos\lambda$$

gesetzt war, und hervorgieng:

$$\tau_1 = \sigma; \quad \vartheta_1 = \lambda$$

Im erstern Falle hiess s_1 eine Verdrehung von s um den Winkel α. Alle Verdrehungen geben einen Cyklus von Curven, in welchem dieselben stets verbleiben, so oft man sie auch um neue Winkel verdreht.

Der letztere Fall ist der einer Evolvente, allgemeiner als diese nur in Hinsicht auf das Bogenelement.

Machen wir hiervon Anwendung auf die Curve linearer Torsion, d. i. linearer Relation zwischen τ und ϑ, welche lautet:

$$\vartheta\cos\lambda - \tau\sin\lambda = 0$$

so giebt eine Verdrehung um α nichts weiter als

$$\vartheta\cos(\lambda+\alpha) - \tau\sin(\lambda+\alpha) = 0$$

also wieder eine linear tordirte Curve, insbesondere für $\alpha = 2k\mathrm{R} - \lambda$ eine ebene Curve $\vartheta = 0$, und für $\alpha = (2k+1)\mathrm{R} - \lambda$ eine Gerade $f = 1$.

Für die Evolvente hat man hier:

$$\vartheta_1 = \lambda \quad \text{(constant)}$$

Sie ist mithin eben, desgleichen alle Evolventen von Evolventen. Verdreht man eine solche, so wird sie zwar wieder doppelt gekrümmt, bleibt aber stets linearer Torsion. Daher führt selbst die Combination beider Operationen nicht aus der Curvenclasse heraus.

Die inverse Operation der Verdrehung ist nur eine Verdrehung um den negativen Winkel.

Aus der Inversion der Relation (34) erhält man:

$$\sigma_1 = \tau; \quad \lambda_1 = \vartheta; \quad \tau_1 = \int \partial\tau \cos\vartheta; \quad \vartheta_1 = \int \partial\tau \sin\vartheta \tag{35}$$

$$f_1 = l\sin\vartheta - f'\cos\vartheta; \quad l_1 = l\cos\vartheta + f'\sin\vartheta; \quad f_1' = f \tag{36}$$

Sofern ϑ einen willkürlichen Anfang hat, stellen diese Gleichungen einen Cyklus von Curven dar, und zwar sind sämmtliche nur Verdrehungen von einander. Für linear tordirte Urcurve wird

$$\tau_1 = \int \frac{\partial\vartheta}{\operatorname{tg}\lambda} \cos\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\operatorname{tg}\lambda}; \quad \vartheta_1 = \int \frac{\partial\vartheta}{\operatorname{tg}\lambda} \sin\vartheta = -\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{tg}\lambda}$$

woraus als specifische Gleichung hervorgeht:

$$\tau_1^2 + \vartheta_1^2 = \cot^2\lambda \quad \text{(constant)} \tag{37}$$

Die hierdurch bestimmte Curve habe ich die cyklisch tordirte genannt. Sie stimmt für $c = \sin\lambda$ überein mit der in (30) gefundenen. Das System der Richtungscosinus ergiebt sich nun durch Substitution der Grössen (25) in die Gl. (36); nämlich:

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\cos\lambda\sin\vartheta; & g_1 &= \sin\lambda\sin\sigma\sin\vartheta - \cos\sigma\cos\vartheta \\
& & h_1 &= \sin\lambda\cos\sigma\sin\vartheta + \sin\sigma\cos\vartheta \\
f_1' &= \sin\lambda; & g_1' &= \cos\lambda\sin\sigma; \quad h_1' = \cos\lambda\cos\sigma \\
l_1' &= -\cos\lambda\cos\vartheta; & m_1 &= \sin\lambda\sin\sigma\cos\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta \\
& & n_1 &= \sin\lambda\cos\sigma\cos\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta
\end{aligned}$$

Hier ist λ constant, ϑ und σ proportional variabel, nämlich

$$\vartheta = \sigma\sin\lambda = \lambda_1 = \sigma_1 \operatorname{tg}\lambda \tag{38}$$

Die cyklisch tordirte Curve hat demnach folgende Eigentümlichkeiten. Sie bleibt bei jeder Verdrehung unverändert. Ihre Hauptnormale hat constante Neigung gegen eine feste Gerade (hier die x Axe), degenerirt aber, sobald sie auf ihr senkrecht wird, in eine linear tordirte Curve. Ihre Krümmungsbreite (λ_1) variirt proportional mit ihrem Torsionsbogen (σ_1). Diese Eigenschaften lassen sich leicht überschauen, wenn man Gl. (37) als Gleichung eines Kreises betrachtet, wo τ_1 und ϑ_1 die Coordinaten, λ_1 den Centriwinkel, σ_1 den Bogen bedeutet, und eine Verdrehung den Sinn einer Rotation der Figur um den Mittelpunkt hat. Die Beziehung zur Urcurve ergiebt den Satz:

Die cyklisch tordirte Curve ist die Evolute einer linear tordirten — oder: Die linear tordirte ist die Evolvente der cyklisch tordirten — unter Evolute u. s. w. die Curvenclasse verstanden, zu welcher die Evolute gehört.

Nimmt man von der cyklisch tordirten Curve die Evolute, von dieser wieder, u. s. f., so erhält man eine Reihe von Curven, deren specifische Gleichungen sich recurrent in der Form darstellen:

$$\tau_{k+1} = \int \partial\tau_k \cos\vartheta_k; \quad \vartheta_{k+1} = \int \partial\tau_k \sin\vartheta_k \tag{39}$$

Um für diese Relationen eine Construction zu erhalten, denke man die als bekannt vorausgesetzte Relation zwischen τ_k und ϑ_k, diese als ebene Coordinaten betrachtend, durch die Curve σ_k dargestellt. AT sei die Axe der τ_k, P ein Punkt auf σ_k, N dessen Projection auf AT. Nun drehe man die NP um N bis nach NQ, so dass Winkel $QNT = NP$ wird. Dann biege man AT, ohne Dehnung, so, dass alle Geraden NQ die Richtung der alten Axe AT bekommen. Dann stellt die so erhaltene Curve die neue Torsionslinie σ_{k+1} bezüglich auf die alten Axen dar, und der verschobene Punkt N entspricht auf ihr dem Punkte P. Denn man hat:

$$\sigma_{k+1} = \tau_k = AN$$
$$\lambda_{k+1} = \vartheta_k = \text{Wkl. } QNT = NP$$

und zwar ist λ_{k+1} der Winkel zwischen der Tangente an σ_{k+1} und der Axe der τ_{k+1}.

Der Umstand, dass die Curvenreihe sich nicht rückwärts verlängern lässt, und Verdrehungen ohne Wirkung sind, ist der linearen Torsion eigentümlich. Geht man z. B. von der Curve

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4} = e^{\tau} \tag{32}$$

aus, so ergiebt sich durch Verdrehung ein Cyklus von Curven:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta\cos\alpha+\tau\sin\alpha}{4}=e^{-\vartheta\sin\alpha+\tau\cos\alpha} \tag{40}$$

Die erste in der Reihe der Evolventen ist bestimmt durch

$$\tau_1=\int\partial\tau\cos\vartheta=\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial\vartheta\cos\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}}=\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4}+2\cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$\vartheta_1=\int\partial\tau\sin\vartheta=\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial\vartheta\sin\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}}=2\sin\frac{\vartheta}{2}$$

und nach Elimination von ϑ wird die specifische Gleichung:

$$\tau_1=\log\frac{2-\sqrt{4-\vartheta_1{}^2}}{\vartheta_1}+\sqrt{4-\vartheta_1{}^2} \tag{41}$$

Die erste in der Reihe der Evolventen geht hervor aus

$$\tau^0=\int\sqrt{\partial\tau^2+\partial\vartheta^2}=\tfrac{1}{2}\int\partial\vartheta\sqrt{4+\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

$$=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}{2\cos\frac{\vartheta}{2}}+\log\frac{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}-\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta^0=\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}=2\sin\frac{\vartheta}{2}$$

woraus nach Elimination von ϑ:

$$\tau^0=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5\cos^2\vartheta^0-1}}+\log\frac{2-\sqrt{5\cos^2\vartheta^0-1}}{\sin\vartheta^0} \tag{42}$$

Wie man sieht, hat diese Curve die Eigentümlichkeit, dass der Tangens ihres Torsionswinkels gleich dem Torsionswinkel ihrer Evoluten-Evolute ist. Beide nämlich sind gleich dem doppelten Sinus des halben Torsionswinkels der Evolute.

Combinirt man die Verdrehungen mit den Evolutenreihen, so findet man, dass jede Evolute für sich einen Verdrehungscyklus repräsentirt. Eine Verschiebung des Anfangs der ϑ nämlich bewirkt eine periodische Verdrehung der Evolute. Ebenso bewirkt eine Verdrehung der Urcurve nur eine Verschiebung des Anfangs der ϑ^0, eine Verschiebung des Anfangs der ϑ aber hat gar keine Wirkung auf die

Evolvente. Die Combination vermag nur dann andere, nämlich allgemeinere, Curven hervorzubringen, wenn die Verdrehung der Evolutenbildung vorhergeht oder der Evolventenbildung nachfolgt.

Im erstern Falle hätte man von Gl. (40) auszugehen und die Evolute nach den Gl. (39) zu berechnen, doch sind die Integrationen nicht ausführbar.

Im zweiten Falle ist aus τ^0 und ϑ^0 die Verdrehung zu bilden, also nur in Gl. (42) die entsprechende Substitution für τ^0 und ϑ^0 zu machen. Diese Verallgemeinerung geht natürlich in der fernern Evolventenreihe wieder verloren, wenn sie nicht jedesmal erneuert wird.

§. 5. Anwendung anderer Arten Begleitender.

Aus der allgemeinen Relation Begleitender

$$f_1 = Af + Bl + Cf' \tag{43}$$

geht durch Differentiation hervor eine Gleichung derselben Form:

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} f_1' = A_1 f + B_1 l + C_1 f' \tag{44}$$

und durch Verbindung beider eine dritte:

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} l_1 = A_2 f + B_2 l + C_2 f' \tag{45}$$

Aus den letzten beiden findet man auf bekannte Weise die Werte von τ_1 und ϑ_1. Das Resultat dieser Rechnung für constante A, B, C habe ich in T. LVI. p. 71. aufgestellt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \int \partial\sigma \sqrt{1 - (A \sin\lambda + B\cos\lambda)^2} \\ \vartheta_2 &= A\vartheta + B\tau - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{C}\,\frac{A - B\operatorname{tg}\lambda}{A\operatorname{tg}\lambda + B}\right) \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Ist die Urcurve linearer Torsion, mithin λ constant, so wird:

$$\tau_1 = \sigma\sqrt{1 - (A\sin\lambda + B\cos\lambda)^2}; \quad \vartheta_1 = A\vartheta + B\tau + \text{const.}$$

woraus:

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sin\lambda_1 = A\sin\lambda + B\cos\lambda$$

Da hiernach λ_1 constant ist, so ist die Begleitende linearer Torsion, und man hat den Satz:

Alle Begleitenden einer linear tordirten Curve, deren Tangentialrichtung relativ zu ihr unveränderlich ist, sind gleichfalls linear tordirt und haben mit ihr einen gemeinsamen Torsionsbogen.

Als Torsionslinie, wie in §. 3., construirt stellt sich σ als Gerade dar, deren Richtungscosinus gegen die Tangente, Binormale, Hauptnormale $\sin\lambda$, $\cos\lambda$, 0 sind. Nimmt man zu neuen Coordinatenaxen die Tangente, Binormale, Hauptnormale der Begleitenden, so werden die Richtungscosinus derselben Geraden σ:

$$A\sin\lambda + B\cos\lambda; \quad \sqrt{1-(A\sin\lambda+B\cos\lambda)^2}; \quad 0$$

das ist

$$\sin\lambda_1; \quad \cos\lambda_1; \quad 0$$

und diese sind die Richtungscosinus der Geraden σ_1. Folglich sind σ und σ_1 nicht bloss der Länge nach, sondern auch der Stellung im Raume nach identisch, und man hat den Satz:

Die gerade Torsionslinie ist für alle Begleitenden von fester relativer Tangentialrichtung der Stellung im Raume nach dieselbe.

Wendet man ferner die Gl. (46) auf die cyklisch tordirte Urcurve

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \operatorname{cotg}^2\gamma \quad (\text{const.})$$

an, wo demnach

$$\tau = \cot\gamma\sin\lambda; \quad \vartheta = -\cot\gamma\cos\lambda; \quad \lambda = \sigma\operatorname{tg}\gamma$$

ist, und setzt

$$A = k\cos\alpha; \quad B = k\sin\alpha; \quad C = k'$$

so wird

$$\tau_1 = \cot\gamma\int\partial\lambda\sqrt{1-k^2\sin^2(\lambda+\alpha)}$$

$$\vartheta_1 = -k\cot\gamma\cos(\lambda+\alpha) + \operatorname{arc\,tg}[k'\operatorname{tg}(\lambda+\alpha)]$$

Demnach stellt sich τ_1 hier als ein Ellipsenbogen dar. Von der Evolute der Begleitenden ist dies dann der Bogen der Torsionslinie, doch ist letztere selbst keine Ellipse.

Sind jetzt A, B, C beliebige Functionen von τ, ϑ, σ oder λ, so kann man auf folgendem Wege zu Ausdrücken von τ_1, ϑ_1, ähnlich denen in (46) gelangen. Die Werte der eingeführten Coefficienten sind:

$$A_1 = A' - C; \quad B_1 = B' + C\vartheta'; \quad C_1 = C' + A - B\vartheta'$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} B_1 B \\ C_1 C \end{vmatrix}; \quad B_2 = \begin{vmatrix} C_1 C \\ A_1 A \end{vmatrix}; \quad C_2 = \begin{vmatrix} A_1 A \\ B_1 B \end{vmatrix}$$

ausserdem hat man:

$$\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau}\right)^2 = A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2 = A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2$$

Diese Summe dreier Quadrate lässt sich in die Summe zweier Quadrate verwandeln, etwas vereinfacht durch die Substitution:

$$A = \cos\varkappa\cos\mu\,; \quad B = \cos\varkappa\sin\mu\,; \quad C = \sin\varkappa \tag{47}$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} D &= \varkappa' + \cos\mu - \vartheta'\sin\mu \\ E &= \mu'\cos\varkappa + \sin\varkappa(\sin\mu + \vartheta'\cos\mu) \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -D\sin\varkappa\cos\mu - E\sin\mu \\ B_1 &= -D\sin\varkappa\sin\mu + E\cos\mu \\ C_1 &= D\cos\varkappa \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= E\sin\varkappa\cos\mu - D\sin\mu \\ B_2 &= E\sin\varkappa\sin\mu + D\cos\mu \\ C_2 &= -E\cos\varkappa \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

$$\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau}\right)^2 = D^2 + E^2 \tag{51}$$

Gl. (45) differentiirt giebt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \tau^2} l_1 - \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} f_1' = {} & A_2' f + B_2' l + C_2' f' \\ & + (A_2 - B_2\vartheta') f' + C_2(\vartheta' l - f) \end{aligned} \tag{52}$$

Diese Gleichung muss nach Einsetzung der Werte (45) (44) für l_1 und f_1 unabhängig von f, l, f' gelten, die drei daraus hervorgehenden Relationen der Coefficienten aber unter sich identisch sein; denn $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$ ist die einzige darin enthaltene nicht gegebene Grösse, die Gegebenen A, B, C aber vertreten bedingungslos eine mögliche Tangentialrichtung der Begleitenden. Folglich ist es gestattet, für f, l, f' ein beliebiges Wertsystem zu setzen. Sei also

$$f = \sin\mu\,; \quad l = -\cos\mu\,; \quad f' = 0$$

Dem entsprechen die Werte:

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} f_1' = -E\,; \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} l_1 = -D$$

und nach Multiplication mit

$$\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau}\right)^2 = D^2 + E^2$$

geht Gl. (52) über in

$$-(DD'+EE')D+(D^2+E^2)E\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau}=(D^2+E^2)\{A_2'\sin\mu$$
$$-B_2'\cos\mu+E\cos\varkappa(\sin\mu+\vartheta'\cos\mu)\}$$
$$=(D^2-E^2)\{-D'-E\mu'\sin\varkappa+E\cos\varkappa(\sin\mu+\vartheta'\cos\mu)\}$$

oder

$$\partial\vartheta_1=\frac{D\partial E-E\partial D}{D^2+E^2}+A\partial\vartheta+B\partial\tau-\partial\mu\sin\varkappa$$

und nach Integration erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\tau_1&=\int\partial\tau\sqrt{D^2+E^2}\\ \vartheta_1&=\operatorname{arctg}\frac{E}{D}+\int(A\partial\vartheta+B\partial\tau-\partial\mu\sin\varkappa)\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

Der letztere Ausdruck lässt sich auch folgendermassen schreiben. Man hat:

$$\begin{aligned}A\partial\vartheta+B\partial\tau&=\cos\varkappa(\sin\mu+\vartheta'\cos\mu)\partial\tau\\&=\cot\varkappa(E-\mu'\cos\varkappa)\partial\tau\end{aligned}$$

daher ist

$$\vartheta_1=\operatorname{arctg}\frac{E}{D}+\int\frac{E\cos\varkappa\partial\tau-\partial\mu}{\sin\varkappa}\tag{54}$$

Der einfachste Specialfall ist offenbar $E=0$; hier wird

$$\tau_1=\int D\partial\tau=\varkappa+\int(\cos\mu\,\partial\tau-\sin\mu\,\partial\vartheta)$$

$$\vartheta_1=-\int\frac{\partial\mu}{\sin\varkappa}$$

und zwar ist

$$\cot\varkappa=-\frac{\sin\mu\,\partial\tau+\cos\mu\,\partial\vartheta}{\partial\mu}=-\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\sin(\lambda+\mu)$$

also nach Elimination von $\varkappa$

$$\left.\begin{aligned}\tau_1&=\operatorname{arctg}\frac{\partial\sigma\sin(\lambda+\mu)}{\partial\mu}+\int\partial\sigma\cos(\lambda+\mu)\\ \vartheta_1&=-\int\sqrt{\partial\mu^2+\partial\sigma^2\sin^2(\lambda+\mu)}\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

Setzt man, noch specieller,

$$\partial\mu=\partial\sigma\cos(\lambda+\mu)\tag{56}$$

woraus

$$\varkappa=\lambda+\mu-\mathrm{R}$$

so wird

$$\tau_1=\lambda+2\mu;\quad\vartheta_1=-\sigma\tag{57}$$

Dies angewandt auf linear tordirte Urcurve giebt:

$$\varkappa = 2 \operatorname{arctg} e^{\sigma}; \quad \mu = 2 \operatorname{arctg} e^{\sigma} - \lambda + R \tag{58}$$

also

$$\tau_1 = 4 \operatorname{arctg} e^{\sigma} = 4 \operatorname{arctg} e^{-\vartheta_1}$$

Verdreht man die Begleitende um einen Rechten, indem man setzt

$$\tau_1 = \vartheta_2; \quad \vartheta_1 = -\tau_2 \tag{59}$$

so lautet die specifische Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{4} = e^{\tau_2}$$

das ist dieselbe Curve wie (32). Hiermit ist diejenige Begleitende gefunden, welche die linear tordirte in die Curve (32) überführt. Ihre Tangentialrichtung relativ zur Urcurve ist nach (50), (wo $E=0$):

$$f_2 = l_1 = -f \sin \mu + l \cos \mu$$

und zwar ist μ bestimmt durch (58), mithin

$$\sin \mu = \frac{(2 - e^{2\sigma}) \cos \lambda + 2e^{\sigma} \sin \lambda}{1 + e^{2\sigma}}$$

$$\cos \mu = \frac{(1 - e^{2\sigma}) \sin \lambda - 2e^{\sigma} \cos \lambda}{1 + e^{2\sigma}}$$

Um auch von der cyklisch tordirten auf die Curve (32) zu gelangen, braucht man nur zuerst auf die Evolvente überzugehen, welche linear tordirt ist, und zu dieser die eben bestimmte Begleitende zu nehmen.

Der Annahme (56) steht zur Seite:

$$\partial \mu = \partial \sigma \operatorname{tg} \pi \sin(\lambda + \mu) \quad (\pi \text{ constant})$$

Hier wird

$$\tau_1 = \cot \pi \int \partial \mu \cot(\lambda + \mu); \quad \vartheta_1 = -\frac{\mu}{\sin \pi}$$

und in Anwendung auf linear tordirte Urcurve

$$\tau_1 = \cot \pi \log \sin(\lambda + \mu) = \cot \pi \log \sin(\lambda - \vartheta_1 \sin \pi)$$

woraus nach Verdrehung um einen Rechten (s. (59)):

$$e^{\vartheta_2 \operatorname{tg} \pi} = \sin(\tau_2 \sin \pi)$$

übereinstimmend mit der Curve (31). Auch diese lässt sich also als Begleitende einer linear tordirten Curve darstellen.

XVIII.

Note über lineare Differential-Gleichungen.

Von

Simon Spitzer.

1.

Unter welchen Umständen lässt sich die Differential-Gleichung

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{1}$$

in welcher X_1 und X_0 gegebene Functionen von x sind, auf die Form

$$(y' + Ly)' + M(y' + Ly) = 0 \tag{2}$$

bringen?

Soll die Gleichung (1) auf die Form (2) gebracht werden können, so muss folgende Gleichung identisch stattfinden:

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = (y' + Ly)' + M(y' + Ly) \tag{3}$$

Aus ihr folgt:

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = y'' + (L + M)y' + (L' + LM)y$$

und damit diese identisch stattfinde, muss sein:

$$X_1 = L + M$$
$$X_0 = L' + LM$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist L und M zu bestimmen. Aus der ersten von ihnen folgt:

$$L = X_1 - M \tag{4}$$

Dies in die 2te Gleichung eingeführt, gibt:

$$X_0 = X_1' - M' + MX_1 - M^2$$

und hieraus ist M zu ermitteln. Zu dem Zwecke setze ich in dieselbe

$$M = \frac{z'}{z} \tag{5}$$

unter z eine neue Variable verstanden, und erhalte sodann:

$$z'' - X_1 z' + (X_0 - X_1')z = 0$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$z'' - (X_1 z)' + X_0 z = 0 \tag{6}$$

Lässt sich hieraus das z bestimmen, so ergibt sich sodann mittelst der Gleichung (5) das M, und mittelst der Gleichung (4) das L. Aus der Gleichung (3) folgt, wenn man in selbe für M seinen in (5) stehenden Wert $\frac{z'}{z}$ einführt, und dann die Gleichung von Brüchen befreiet

$$z(y'' + X_1 y' + X_0 y) = z(y' + Ly)' + z'(y' + Ly)$$

Dies lässt sich auch so schreiben:

$$\int z(y'' + X_1 y' + X_0 y)dx = z(y' + Ly) + C \tag{7}$$

unter C eine willkürliche Constante verstanden; es ist somit z der integrirende Factor der vorgelegten linearen Differential-Gleichung.

Beispiel. Es sei die vorgelegte Gleichung folgende:

$$y'' = xy' + ny \tag{8}$$

unter n eine ganze positive Zahl verstanden.

Die Gleichung (6), welche zur Bestimmung des integrirenden Factors z dient, lautet in diesem Falle:

$$z'' + xz' + (1 - n)z = 0 \tag{9}$$

Ein particuläres Integrale dieser Gleichung ist (siehe meine Vorlesungen über lineare Differential-Gleichungen, Seite 84, Formel 140)

$$z = x^{n-1} + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)x^{n-3} + \frac{1}{4.2!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$$
$$+ \frac{1}{8.3!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)x^{n-7} + \ldots$$

aus dieser Reihe ergibt sich leicht das z' und sodann das L und das M.

Wenn man demnach die in der Form

$$y'' - xy' - ny = 0$$

aufgestellte Gleichung (8) mit zdx multiplicirt und integrirt, so erhält man vermöge oer Gleichung (7) nachstehendes Integrale:

$$\left[x^{n-1}+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)x^{n-3}+\frac{1}{4\,.\,2!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}+..\right]y'$$
$$-\left[x^{n}+\tfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}+\frac{1}{4\,.\,2!}n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}+...\right]y=C \qquad (10)$$

Es gestattet somit die Gleichung

$$y'' = xy' + y \qquad (11)$$

welche sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$y'' - xy' - y = 0$$

nachstehende Schreibweise:

$$(y' - xy)' = 0$$

und somit ist

$$y' - xy = C$$

das Integrale der Gleichung (11); auf gleiche Weise gestattet die Gleichung

$$y'' - xy' - 2y = 0 \qquad (12)$$

folgende Aufschreibung:

$$[y' - \left(x+\frac{1}{x}\right)y]' + \frac{1}{x}[y' - \left(x+\frac{1}{x}\right)y] = 0$$

Aus ihr folgt:

$$y' - \left(x+\frac{1}{x}\right)y = \frac{C}{x}$$

oder:

$$xy' - (x^2+1)y = C$$

und dies ist das Integrale der Gleichung (12).

Die Gleichung

$$y'' - xy' - 3y = 0 \qquad (13)$$

gestattet folgende Aufschreibung:

$$\left[y' - \frac{x^3+3x}{x^2+1}y\right]' + \frac{2x}{x^2+1}\left[y' - \frac{x^2+3x}{x^2+1}y\right] = 0$$

Aus ihr folgt:

$$y' - \frac{x^3+3x}{x^2+1}y = \frac{C}{x^2+1}$$

oder

$$(x^2+1)y' - (y^3+3x)y = C$$

u. s. w.

Unter welchen Umständen lässt sich die Differential-Gleichung

$$y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{14}$$

in welcher X_2, X_1 und X_0 gegebene Functionen von x sind, auf die Form

$$(y'' + Ly' + My)' + N(y'' + Ly' + My) = 0 \tag{15}$$

bringen?

Soll die Gleichung (14) auf die Form (15) gebracht werden können, so muss folgende Gleichung identisch stattfinden:

$$y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = (y'' + Ly' + My)' + N(y'' + Ly' + My)$$

Aus ihr folgt:

$$y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = y''' + (L + N) y'' + (L' + M + LN) y' + (M' + MN) y$$

und damit diese identisch stattfinde, muss sein:

$$X_2 = L + N$$
$$X_1 = L' + M + LN$$
$$X_0 = M' + MN$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$L = X_2 - N$$

Dies in die beiden andern Gleichungen substituirt, gibt:

$$X_1 = X_2' - N' + M + X_2 N - N^2$$
$$X_0 = M' + MN$$

Aus der ersten dieser zwei Gleichungen folgt:

$$M = X_1 - X_2' + N' - X_2 N + N^2$$

Dies in die andere substituirt, führt zu folgender Gleichung:

$$X_0 = X_1' - X_2'' + N'' - X_2 N' - 2X_2' N + 3NN' + X_1 N - X_2 N^2 + N^3$$

und diese dient zur Bestimmung von N. Setzen wir

$$N = \frac{z'}{z}$$

unter z eine neue Variable verstanden, so erhält man

$$z''' - X_2 z'' + (X_1 - 2X_2') z' - (X_2'' - X_1' + X_0) z = 0$$

oder anders geschrieben:

$$z''' - (X_2 z)'' + (X_1 z)' - X_0 z = 0 \tag{16}$$

Lässt sich hieraus das z bestimmen, so ergibt sich sodann aus der Gleichung

$$N = \frac{z'}{z}$$

das N, ferner aus den beiden Gleichungen:

$$L = X_2 - N$$
$$M = X_1 - X_2' + N' - X_2 N + N^2$$

das L und das M.

Aus der Gleichung

$$y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = (y'' + Ly' + My)' + N(y'' + Ly' + My)$$

folgt sodann, wenn man für N seinen Wert setzt, und sodann die Gleichung von Brüchen befreiet:

$$z(y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y) = z(y'' + Ly' + My)' + z'(y'' + Ly' + My)$$

und diese lässt sich auch so schreiben:

$$\int z(y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y)\, dx = z(y'' + Ly' + My) + C$$

unter C eine willkürliche Constante verstanden. Es ist somit z der integrirende Factor der vorgelegten Differential-Gleichung.

Beispiel. Es sei

$$y''' = xy' + ny \tag{17}$$

unter n eine ganze positive Zahl verstanden.

Die Gleichung, welche zur Bestimmung von z dient, lautet für diesen Fall

$$z''' - xz' + (n-1)z = 0$$

Ein particuläres Integral dieser Gleichung ist (siehe meine neuen Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen Seite 14, Formel 36)

$$z = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^{n-4}}{3.(n-4)!} + \frac{x^{n-7}}{3.6.(n-7)!} - \frac{x^{n-10}}{3.6.9.(n-10)} + \dots$$

Es gestattet somit die Gleichung

$$y''' = xy' + y \tag{18}$$

welche sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$y''' - xy' - y = 0$$

nachstehende Schreibweise:

$$(y'' - xy)' = 0$$

und hieraus folgt

$$y'' - xy = C$$

als Integral der Gleichung (18).

Die Gleichung

$$y''' - xy' - 2y = 0 \tag{19}$$

lässt sich so schreiben:

$$(y'' - \frac{y'}{x} - xy)' + \frac{1}{x}(y'' - \frac{y'}{x} - xy) = 0$$

Hieraus folgt:

$$y'' - \frac{y'}{x} - xy = \frac{C}{x}$$

oder

$$xy'' - y' - x^2 y = C$$

und dies ist das Integral der Gleichung (19).

Die Gleichung

$$y''' - xy' - 3y = 0$$

führt auf:

$$(y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2-x^3}{x^2}y)' + \frac{2}{x}(y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2-x^3}{x^2}y) = 0$$

Sie gibt integrirt:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2-x^3}{x^2}y = \frac{C}{x}$$

oder in anderer Form:

$$x^2y'' - 2xy' + (2-x^3)y = C$$

Auf gleiche Weise erhält man für die Gleichung:

$$y''' - xy' - 4y = 0$$

das Integral:

$$(x^3 - 2)y'' - 3x^2y' + (8x - x^4)y = C$$

Ferner für die Gleichung:

$$y''' - xy' - 5y = 0$$

das Integral

$$(x^4 - 8x)y'' - (4x^3 - 8)y' + (20x^2 - x^5)y = C$$

u. s. f.

2.

Um die Gleichung

$$x^2y''' = xy' + \mu y \tag{1}$$

wo μ eine ganze positive Zahl ist, zu integriren, differentiire ich dieselbe $-\mu$ mal und erhalte hierdurch

$$x^2y^{(3-\mu)} - 2\mu x\, y^{(2-\mu)} + (\mu^2 + \mu - x)y^{(1-\mu)} = 0 \qquad (2)$$

Nun setze ich

$$y^{(1-\mu)} = z$$

Dadurch geht obige Gleichung über in

$$x^2z'' - 2\mu x z' + (\mu^2 + \mu - x)z = 0$$

sodann setze ich

$$z = x^\mu Z$$

unter Z eine neue Variable verstanden, und erhalte hierdurch

$$xZ'' - Z = 0$$

Das Integral dieser Gleichung ist (siehe Seite 97 meiner Vorlesungen über Integration linearer Differential-Gleichungen)

$$Z = C_1 x \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2 - 4}\, du$$

$$+ C_2 \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2 - 4} \left\{ x \log[(u^2 - 4)\sqrt{x}] + \frac{2u\sqrt{-1}}{u^2 - 4} \right\} du$$

folglich ist

$$y = C_1 \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial x^{\mu-1}} \left[x^{\mu+1} \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2 - 4}\, du \right]$$

$$+ C_2 \frac{d^{\mu-1}}{dx^{u-1}} \left[x^\mu \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2 - 4} \left\{ x \log[(u^2 - 4)\sqrt{x}] + \frac{2u\sqrt{x-1}}{u^2 - 4} \right\} du \right]$$

das Integral der vorgelegten Differential-Gleichung, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Die Methode, die ich vorgeschlagen habe, um die Gleichung (1) zu integriren, ist nicht ganz strenge. Ich habe nämlich die vorgelegte Gleichung $-\mu$ mal differentiirt, hierdurch sollte eigentlich die Gleichung (2) folgendermassen lauten:

$$x^2y^{(3-\mu)} - 2\mu x\, y^{(2-\mu)} + (\mu^2 + \mu - x)y^{(1-\mu)}$$
$$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots C_{\mu-1} x^{\mu-1}$$

und da ich den 2. Teil der Gleichung (2) gleich Null setzte, so bleibt mir nichts anders übrig, als die Richtigkeit des gefundenen Integrales direct nachzuweisen.

Ich werde nun zeigen, dass der Gleichung

$$x^2 y''' = xy' + \mu y \tag{1}$$

genügt wird für

$$y = \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial x^{\mu-1}} \left[x^{\mu+1} \int_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}} \sqrt{u^2-4}\, du \right] \tag{3}$$

Um diesen Nachweis zu führen, entwickele ich den Ausdruck (3) in eine Reihe und beweise sodann, dass diese Reihe, deren Convergenz auf den ersten Blick ersichtlich ist, der vorgelegten Gleichung genügt.

Die Formel (3) gestattet folgende Schreibweise:

$$y = \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial x^{\mu-1}} \left[x^{\mu+1} \int_{-2}^{+2} \sqrt{u^2-4} \left\{ 1 + u\sqrt{x} + \frac{u^2 x}{2!} + \frac{u^3 x \sqrt{x}}{3!} + \ldots \right\} du \right] \tag{4}$$

setzt man der Kürze halber

$$\int_{-2}^{+2} \sqrt{u^2-4}\, u^n\, du = P_n$$

so sieht man, dass P_n für jeden ungeraden Wert von n verschwindet, somit geht die Gleichung (4) über in:

$$y = \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial x^{\mu-1}} \left[x^{\mu+1} \left(P_0 + \frac{x}{2!} P_2 + \frac{x^2}{4!} P_4 + \frac{x^3}{6!} P_6 + \ldots \right) \right]$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$y = \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial x^{\mu-1}} \left[P_0 x^{\mu+1} + P_2 \frac{x^{\mu+2}}{2!} + P_4 \frac{x^{\mu+3}}{4!} + P_6 \frac{x^{\mu+4}}{6!} + \ldots \right]$$

Beachtet man nun die bekannte Formel:

$$\frac{\partial^m . x^n}{\partial x^m} = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}$$

so geht obiges y über in:

$$y = \frac{(\mu+1)!}{2!} x^2 P_0 + \frac{(\mu+2)!}{3!} x^3 \frac{P_2}{2!} + \frac{(\mu+3)!}{4!} x^4 \frac{P_4}{4!} + \frac{(\mu+4)!}{5!} x^5 \frac{P_6}{6!} + \ldots$$

oder in abgekürzter Form geschrieben:

$$y = \mathop{S}_{n=2}^{n=\infty} \frac{(\mu + n - 1)!}{n!} x^n \frac{P_{2n-4}}{(2n-4)!} \tag{5}$$

Nun ist noch das P zu berechnen. Es ist:

$$P_{2n-4} = \int_{-2}^{+2} \sqrt{u^2 - 4}\, u^{2n-4}\, du$$

Man kann dies auch so schreiben:

$$P_{2n-4} = 2 \int_0^2 \sqrt{u^2 - 4}\, u^{2n-4}\, du$$

Dies vereinfacht sich für

$$u = 2v$$

und geht über in

$$P_{2n-4} = 2^{2n-1} \sqrt{-1} \int_0^1 \sqrt{1 - v^2}\, v^{\,n-4}\, dv$$

Setzt man nun

$$v^2 = w$$

so erhält man

$$P_{2n-4} = 2^{2n-2} \sqrt{-1} \int_0^1 w^{n-\frac{1}{2}} (1 - w)^{\frac{1}{2}}\, dw$$

oder kürzer:

$$P_{2n-4} = 2^{2n-2} \sqrt{-1}\, \frac{\Gamma(n - \frac{3}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n)}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (5) und lässt man die constanten Factoren, welche in y auftreten, weg, so erhält man:

$$y = \mathop{S}_{n=2}^{n=\infty} \frac{(\mu + n - 1)!}{n!} \cdot \frac{x^n}{(2n-4)!} \cdot 2^{2n} \cdot \frac{\Gamma(n - \frac{3}{2})}{(n-1)!}$$

Nun ist:

$$\Gamma(n - \tfrac{3}{2}) = \frac{1.3.5.7 \ldots (2n-5)}{2^{n-2}} \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

oder auch

$$\Gamma(n - \tfrac{3}{2}) = \frac{(2n-4)!}{2^{2n-4}(n-2)!} \sqrt{\pi}$$

Folglich hat man, wieder mit Hinweglassung constanter Factoren:

$$y = \mathop{S}_{n=2}^{n=\infty} \frac{(\mu + n - 1)!\, x^n}{(n-2)!\,(n-1)!\,n!}$$

Es gibt daher der Ausdruck

$$y = \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial x^{\mu-1}}\left[x^{\mu+1}\int\limits_{-2}^{+2} e^{u\sqrt{x}}\sqrt{u^2-4}\,du\right]$$

in eine Reihe entwickelt folgende Reihe:

$$y = \frac{(\mu+1)!}{1!\,2!}x^2 + \frac{(\mu+2)!}{1!\,2!\,3!}x^3 + \frac{(\mu+3)!}{2!\,3!\,4!}x^4 + \frac{(\mu+4)!}{3!\,4!\,5!}x^5 + \dots$$

und diese ist convergent und leistet wirklich der vorgelegten Gleichung Genüge. Man kann y auch so schreiben:

$$y = \frac{1}{1!\,2!}x^2 + \frac{\mu+2}{1!\,2!\,3!}x^3 + \frac{(\mu+2)(\mu+3)}{2!\,3!\,4!}x^4 + \frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{3!\,4!\,5!}x^5 + \dots$$

und diese Reihe ist merkwürdigerweise auch gültig für ganze und negative Werte von μ.

3.

Integration der linearen Differential-Gleichung

$$x(1-x)y'' + \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{7}{6}x\right)y' + \tfrac{1}{48}y = 0 \qquad (1)$$

Prof. Schwarz hat im 75ten Bande von Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Seite 326. die beiden partic. Integrale der Differential-Gleichung (1) in folgender merkwürdigen Form aufgestellt:

$$\sqrt{\delta\sqrt{1-\varepsilon\sqrt[3]{x}} + \delta^{-1}\sqrt{1-\varepsilon^2\sqrt[3]{x}}}$$

$$\sqrt{\delta\sqrt{1-\varepsilon\sqrt[3]{x}} - \delta^{-1}\sqrt{1-\varepsilon^2\sqrt[3]{x}}}\,.$$

woselbst

$$\delta = e^{\frac{i\pi}{12}}, \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

ist. Die Richtigkeit dieser particulären Integrale wurde von Prof. Cayley im Quarterly Journal of pure and applied Mathematics Band 16, Seite 268 nachgewiesen.

Ich werde mir hier erlauben, gleichfalls die Richtigkeit der beiden von Schwarz gefundenen particulären Integrale nachzuweisen, und glaube hierdurch einen Commentar zur Arbeit Cayley's geliefert zu haben.

Multiplicirt man die beiden oben aufgestellten particulären Integrale mit $\sqrt{\delta}$, so erhält man zwei Ausdrücke, die offenbar auch particuläre Integrale der Gleichung (1) sind, denn das Multipliciren von particulären Integralen einer reducirten linearen Differential-Gleichung mit constanten Zahlen ist gestattet, also kann man auch schreiben:

$$y_1 = \sqrt{\delta^2\sqrt{1-\varepsilon\sqrt[3]{x}}+\sqrt{1-\varepsilon^2\sqrt[3]{x}}}$$

$$y_2 = \sqrt{\delta^2\sqrt{1-\varepsilon\sqrt[3]{x}}-\sqrt{1-\varepsilon^2\sqrt[3]{x}}}$$

oder in anderer Form:

$$y_1 = \sqrt{\sqrt{\delta^4-\delta^4\varepsilon\sqrt[3]{x}}+\sqrt{1-\varepsilon^2\sqrt[3]{x}}}$$

$$y_2 = \sqrt{\sqrt{\delta^4-\delta^4\varepsilon\sqrt[3]{x}}-\sqrt{1-\varepsilon^2\sqrt[3]{x}}}$$

Nun ist:

$$\delta^4 = e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos 60^0 + i \sin 60^0 = \lambda$$

$$\delta^4\varepsilon = e^{i\pi} = -1$$

$$\varepsilon^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \lambda^4 = \lambda^3 . \lambda = -\lambda$$

folglich hat man:

$$y_1 = \sqrt{\sqrt{\lambda+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{1+\lambda\sqrt[3]{x}}}$$

$$y_2 = \sqrt{\sqrt{\lambda+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{1+\lambda\sqrt[3]{x}}}$$

und diese beiden particulären Integrale sind nicht nur einfacher, als die von Schwarz aufgestellten, sondern auch einfacher, als die von Cayley aufgestellten Ausdrücke. Cayley gibt nämlich y^2 in folgender Form:

$$y^2 = \sqrt{\alpha-\alpha^5\sqrt[3]{x}} \pm \sqrt{-\alpha^5+\alpha\sqrt[3]{x}}$$

unter α eine imaginäre 6te Wurzel von -1 verstanden.

Um nun nachzuweisen, dass der Differential-Gleichung

$$x(1-x)y''+(\tfrac{2}{3}-\tfrac{7}{6}x)y'+\tfrac{1}{48}y = 0 \qquad (1)$$

Genüge geschieht durch

$$y = \sqrt{\sqrt{\lambda + \sqrt[3]{x}} \pm \sqrt{1 + \lambda \sqrt[3]{x}}} \tag{2}$$

führe ich in die beiden Gleichungen (1) und (2) für x eine neue Variable ξ ein, mittelst der Substitution:

$$x = \xi^3$$

man erhält dann, da

$$y' = \frac{1}{3\xi^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$y'' = \frac{1}{9\xi^4} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{2}{9\xi^5} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

ist, statt der Gleichung (1) folgende Gleichung:

$$(1 - \xi^3) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \tfrac{3}{2}\xi^2 \frac{\partial y}{\partial \xi} + \tfrac{3}{16} \xi y = 0 \tag{3}$$

und dieser soll Genüge geschehen durch

$$y = \sqrt{\sqrt{\lambda + \xi} \pm \sqrt{1 + \lambda\xi}} \tag{4}$$

Ich führe nun in die beiden Gleichungen (3) und (4) für y eine neue Variable z ein, mittelst der Substitution

$$y^2 = z$$

und erhalte, da hieraus:

$$y = \sqrt{z}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \frac{1}{4z\sqrt{z}} \left[2z \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 \right]$$

folgt, statt der Gleichung (3) folgende Gleichung:

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 - \frac{\tfrac{3}{2}\xi^2}{1 - \xi^3} \cdot z \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\tfrac{3}{8}\xi z^2}{1 - \xi^3} = 0 \tag{5}$$

und diesen soll Genüge geschehen durch

$$z = \sqrt{\lambda + \xi} \pm \sqrt{1 + \lambda\xi}$$

Schreibt man z in der Form:

$$z = \sqrt{P} + \sqrt{Q}$$

so ist:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{P'\sqrt{Q} + Q'\sqrt{P}}{2\sqrt{PQ}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = -\frac{(P')^2 Q\sqrt{Q} + (Q')^2 P\sqrt{P}}{4PQ\sqrt{PQ}}$$

Ferner ist:

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = -\frac{(P')^2 Q + (Q')^2 P}{4PQ} - \frac{(P')^2 Q^2 + (Q')^2 P^2}{4PQ\sqrt{PQ}}$$

$$z\frac{\partial z}{\partial \xi} = \tfrac{1}{2}(P' + Q') + \frac{P'Q + Q'P}{2\sqrt{PQ}}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{(P')^2 Q + (Q')^2 P}{4PQ} + \frac{P'Q'}{2\sqrt{PQ}}$$

$$z^2 = P + Q + 2\sqrt{PQ}$$

Werden diese Werte in die Gleichung (5) eingeführt, so erhält man:

$$\frac{(P')^2 Q + (Q')^2 P}{PQ} + \frac{2\xi^2}{1-\xi^3}(P' + Q') - \frac{\xi}{1-\xi^3}(+Q) \tag{6}$$

$$+ \frac{2}{3PQ\sqrt{PQ}}\Big[(P')^2 Q^2 + (Q')^2 P^2 + PQP'Q' + \frac{3\xi^2}{1-\xi^2} PQ(P'Q + Q'P)$$

$$- \frac{3\xi}{1-\xi^3} P^2 Q^2\Big] = 0$$

Nun ist

$$P = \lambda + \xi, \quad P' = 1$$
$$Q = 1 + \lambda\xi, \quad Q' = \lambda$$
$$P + Q = (\lambda + 1)(\xi + 1)$$
$$P' + Q' = \lambda + 1$$
$$PQ = \lambda(1 + \xi + \xi^2)$$
$$P'Q + Q'P = \lambda(1 + 2\xi)$$
$$(P')^2 Q + (Q')^2 P = (\lambda + \lambda^2)\xi$$
$$(P')^2 Q^2 + (Q')^2 P^2 = \lambda^2(-1 + 2\xi + 2\xi^2)$$
$$1 - \lambda + \lambda^2 = 0$$

Werden diese Werte in die Gleichung (6) eingeführt, so erhält man eine identische Gleichung. Es genügt somit der Gleichung (5) nicht nur der Wert

$$z = \sqrt{P} + \sqrt{Q}$$

sondern auch der Wert

$$z = \sqrt{P} - \sqrt{Q}$$

und die Richtigkeit der Schwarz'schen Auflösung der Gleichung (1) ist hierdurch nachgewiesen.

Es lässt sich der Nachweis der Richtigkeit auch noch auf andere Art führen. Soll der Gleichung

$$x(1-x)''+(\tfrac{2}{3}-\tfrac{7}{6}x)y^1+\tfrac{1}{48}y=0 \qquad (1)$$

Genüge geschehen durch

$$y=\sqrt{\sqrt{\lambda+\sqrt[3]{x}}\pm\sqrt{1+\lambda\sqrt[3]{x}}} \qquad (2)$$

so muss, wie wir früher nachgewiesen haben, der Gleichung

$$(1-\xi^3)\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2}-\tfrac{3}{2}\xi^2\frac{\partial y}{\partial\xi}+\tfrac{3}{16}\xi y=0 \qquad (3)$$

Genüge geschehen durch

$$y=\sqrt{\sqrt{\lambda+\xi}\pm\sqrt{1+\lambda\xi}} \qquad (4)$$

Construirt man nun eine lineare Differential-Gleichung dritter Ordnung, für welche

$$z=y^2$$

ist, so muss diese lineare Differential-Gleichung 3ter Ordnung offenbar nachstehende drei particulare Integrale haben:

$$z_1=y_1^2=\sqrt{\lambda+\xi}+\sqrt{1+\lambda\xi}$$
$$z_2=y_2^2=\sqrt{\lambda+\xi}-\sqrt{1+\lambda\xi}$$
$$z_3=y_1y_2=\sqrt{\lambda-1}\,.\sqrt{1-\xi}$$

und diejenige lineare Differential-Gleichung 3ter Ordnung, welche die so eben aufgeschriebenen particuläreu Integrale hat, hat auch nachstehende drei particuläre Integrale:

$$z_1=\sqrt{\lambda+\xi}$$
$$z_2=\sqrt{1+\lambda\xi}$$
$$z_3=\sqrt{1-\xi}$$

In der zweiten Fortsetzung meiner Studien über die Integrationen linearer Differential-Gleichungen Seite 21. habe ich gezeigt, dass, wenn man in die Differential-Gleichung

$$X_2y''+X_1y'+X_0y=0$$

deren particuläre Integrale y_1 und y_2 sind, eine neue Variable z einführt, mittelst der Substitution

$$z=y^2$$

man zu folgender Gleichung dritter Ordnung gelangt:

$$X_2^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3X_1X_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (X_2X_1' + 4X_0X_2 - X_1X_2' + 2X_1^2) \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$+ 2(X_0^1X_2 - X_0X_2^1 + 2X_0X_1)z = 0$$

deren particuläre Integrale

$$y_1^2 \quad y_2^2 \quad y_1 y_2$$

sind. Es ist demnach die lineare Differential-Gleichung dritter Ordnung, welche man erhält, wenn man in die Gleichung (3)

$$y^2 = z$$

setzt, folgende:

$$(1 - \xi^3) \frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3} - \tfrac{9}{2}\xi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \tfrac{9}{4}\xi \frac{\partial z}{\partial \xi} + \tfrac{3}{8} z = 0$$

und dieser Gleichung genügen in der Tat die 3 particulären Integrale:

$$z_1 = \sqrt{\lambda + \xi}$$
$$z_2 = \sqrt{1 + \lambda\xi}$$
$$z_3 = \sqrt{1 - \xi}$$

wie sich äusserst leicht nachweisen lässt.

XIX.

Construction einiger linearer Differential-Gleichungen höherer Ordnung.

Von

Simon Spitzer.

Ich habe in meinen „Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen“ Wien 1860 das Integral der linearen Differential-Gleichung

$$(m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0 \quad (1)$$

in welcher m, α, β constante Zahlen bezeichnen, derart, dass α und β von einander verschieden sind, ferner, in welchen A und B positive echte Brüche sind, oder in welcher A und B imaginäre Zahlen bezeichnen, die reellen Teile von A und B aber positive echte Brüche sind, in folgender Form gegeben:

$$y=C_1\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du$$

$$+C_2(m+x)^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\,du \quad (2)$$

Hier bedeuten C_1 und C_2 willkürliche Constante.

Das in (2) stehende Integral ist richtig, und dies lässt sich äusserst leicht nachweisen, denn es ist:

$$y' = C_1 \int_\alpha^\beta u e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

$$+ C_2 (m+x)^{-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} [1-A-B+u(m+x)] du$$

und

$$y'' = C_1 \int_\alpha^\beta u^2 e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

$$+ C_2 (m+x)^{-A-B-1} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} [(A+B)(A+B-1)$$
$$+2u(1-A-B)(m+x)+u^2(m+x)^2] du$$

folglich hat man, wenn man diese Werte in die Gleichung (1) einführt, und der Kürze halber

$$(m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y = P$$

setzt

$$P = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)$$
$$+A(u-\beta)+B(u-\alpha)] du$$
$$+ C_2 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)$$
$$+(1-B)(u-\beta)+(1-A)(u-\alpha)] du$$

Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$P = C_1 \Big\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \Big\}_\alpha^\beta$$

$$+ C_2 (m+x)^{1-A-B} \Big\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{1-B} (u-\beta)^{1-A} \Big\}_\alpha^\beta \qquad (3)$$

und hieraus sieht man, dass in der Tat die Gleichung (1) für den in (2) aufgestellten Wert von y identisch erfüllt wird.

Ich will nun aufstellen jene lineare Differential-Gleichung 3 ter Ordnung, der genügt wird durch nachstehenden Wert von y

$$
\begin{aligned}
y = A_1 \int_0^{\alpha} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du \\
+ A_2 \int_0^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du \\
+ A_3 (m+x)^{1-A-B} \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A}\, du
\end{aligned}
\tag{4}
$$

unter A_1, A_2, A_3 willkürliche Constante verstanden.

Verfolgt man den früher betretenen Weg und setzt demnach in P den in (4) aufgestellten Wert von y, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
P = A_1 \Big\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \Big\}_0^{\alpha} \\
+ A_2 \Big\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \Big\}_0^{\beta} \\
+ A_3 (m+x)^{1-A-B} \Big\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{1-B} (u-\beta)^{1-A} \Big\}_{\alpha}^{\beta}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

und wenn man im 2 ten Teile dieser Gleichung die Substitutionen $u=0$, $u=\alpha$, $u=\beta$ wirklich durchführt, so kommt man zu der Gleichung:

$$P = -(A_1 + A_2)(-\alpha)^A (-\beta)^B$$

Differentiirt man diese Gleichung einmal nach x, so erhält man:

$$P' = 0$$

Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$
\begin{aligned}
(m+x)y''' + [1 + A + B - (\alpha+\beta)(m+x)]y'' \\
+ [-\alpha - \beta - A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y' + \alpha\beta y = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

und dies ist die gesuchte Differential-Gleichung 3 ter Ordnung, der genügt wird durch den in (4) aufgestellten Wert von y.

Ich will nun jene lineare Differential-Gleichung 3ter Ordnung aufstellen, der genügt wird durch nachstehenden Wert von y

$$
\begin{aligned}
y = B_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \\
+ B_2 (m+x)^{1-A-B} \int_0^\alpha e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du \\
+ B_3 (m+x)^{1-A-B} \int_0^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du
\end{aligned} \tag{7}
$$

Man erhält, den früher betretenen Weg befolgend:

$$
\begin{aligned}
P = B_1 \left\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \right\}_\alpha^\beta \\
+ B_2 (m+x)^{1-A-B} \left\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{1-B} (u-\beta)^{1-A} \right\}_0^\alpha \\
+ B_3 (m+x)^{1-A-B} \left\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{1-B} (u-\beta)^{1-A} \right\}_0^\beta
\end{aligned} \tag{8}
$$

und wenn man auch die im 2ten Teile der Gleichung angezeigten Substitutionen wirklich durchführt:

$$P = -(B_2 + B_3)(m+x)^{1-A-B}(-\alpha)^{1-B}(-\beta)^{1-A}$$

Multiplicirt man beide Teile dieser Gleichung mit

$$(m+x)^{A+B-1}$$

so erhält man:

$$(m+x)^{A+B-1} P = -(B_2 + B_3)(-\alpha)^{1-B}(-\beta)^{1-A}$$

Differentiirt man diese Gleichung beiderseits einmal nach x, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(m+x)^{A+B-1}P] = 0$$

und dies ist die gesuchte lineare Gleichung 3ter Ordnung, der genüge geschieht durch den in (7) aufgestellten Wert von y.

Sie gestattet, wie man sieht, folgende Schreibweise:

$$(m+x)P' + (A+B-1)P = 0 \tag{9}$$

Ich will nun jene lineare Differential-Gleichung 4ter Ordnung aufstellen, der genügt wird durch

$$\begin{aligned} y = C_1 \int_0^\alpha & e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \\ + C_1 \int_0^\beta & e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \\ + C_3 (m+x)^{1-A-B} & \int_0^\alpha (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du \\ + C_4 (m+x)^{1-A-B} & \int_0^\beta (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du \end{aligned} \tag{10}$$

Man erhält hier den schon so oft angedeuteten Weg befolgend:

$$P = -(C_1+C_2)(-\alpha)^A(-\beta)^B - (C_3+C_4)(m+x)^{1-A-B}(-\alpha)^{1-B}(-\beta)^{1-A}$$

Diese Gleichung gibt einmal nach x differentiirt:

$$P' = -(C_3+C_4)(1-A-B)(m+x)^{-A-B}(-\alpha)^{1-B}(-\beta)^{1-A}$$

Multiplicirt man beiderseits mit $(m+x)^{A+B}$ und differentiirt man dann die so erhaltene Gleichung wieder nach x, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(m+x)^{A+B}P'] = 0$$

oder in reducirter Gestalt:

$$(m+x)P'' + (A+B)P' = 0 \tag{11}$$

In dem speciellen Falle, in welchem

$$A+B=1$$

ist, muss die ganze Analyse abgeändert werden, denn das Integral der Gleichung

$$P=0$$

hat alsdann nicht mehr die in (2) aufgestellte Form, sondern es ist:

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du \quad (12)$$

Hieraus folgt zunächst

$$y' = C_1 \int_\alpha^\beta u e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \left\{ u \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] + \frac{1}{m+x} \right\} du$$

und dann:

$$y'' = C_1 \int_\alpha^\beta u^2 e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \left\{ u^2 \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] + \frac{2u}{m+x} - \frac{1}{(m+x)^2} \right\} du$$

somit ist:

$$P = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \{ (m+x)(u-\alpha)(u-\beta) + A(u-\beta) + B(u-\alpha) \} du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \left\{ [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta) + A(u-\beta) + B(u-\alpha)] \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] + 2u - \alpha - \beta + \frac{A+B-1}{m+x} \right\} du$$

Dieses P vereinfacht sich für

$$A + B = 1$$

und geht über in:

$$P = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta) + A(u-\beta) + B(u-\alpha)]\, du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \{[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta) + A(u-\beta) + B(u-\alpha)] \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] + 2u - \alpha - \beta\}\, du$$

und dies lässt sich folgendermassen schreiben:

$$P = C_1 \Big\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \Big\}_\alpha^\beta$$

$$+ C_2 \Big\{ e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] \Big\}_\alpha^\beta \quad (13)$$

und hieraus sieht man, dass in der Tat die Gleichung (1) in dem Specialfalle

$$A + B = 1$$

durch den in (12) aufgestellten Wert von y befriedigt wird.

Ich will nun jene lineare Differential-Gleichung 3ter Ordnung aufstellen, der genügt wird durch

$$y = A_1 \int_0^\alpha e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du$$

$$+ A_2 \int_0^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du \quad (14)$$

$$+ A_3 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

Verfolgt man den so eben eingeschlagenen Weg, so erhält man:

$$P = -(A_1 + A_2)(-\alpha)^A (-\beta)^B$$

und dies führt einmal differentiirt auf die Differential-Gleichung 3ter Ordnung

$$P' = 0$$

welche wir in (6) aufstellten.

Ich will nun jene lineare Differential-Gleichung 3. Ordn. construiren, welcher genügt wird durch

$$y = B_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

$$+ B_2 \int_0^\alpha e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du \quad (15)$$

$$+ B_3 \int_0^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du$$

Den früher betretenen Weg befolgend, erhält man:

$$P = -(B_2 + B_3)(-\alpha)^A (-\beta)^{B-1} \log[\alpha\beta(m+x)]$$

Wird diese Gleichung beiderseits durch

$$\log[\alpha\beta(m+x)]$$

dividirt und dann differentiirt, so erhält man die gewünschte Differential-Gleichung.

XX.

Miscellen.

1.

Die Bestimmung der Summe

Σx^r.

Es sei:

$$1^r + 2^r + 3^r + \ldots + x^r = \overset{r}{\underset{x}{S}},$$

so ist:

$$1)\quad \overset{r}{\underset{x}{S}} - \overset{r}{\underset{x-1}{S}} = x^r.$$

Bildet man von dieser Gleichung die Ableitung nach x, so erhält man:

$$2)\quad D\overset{r}{\underset{x}{S}} - D\overset{r-1}{\underset{x-1}{S}} = rx^{r-1}.$$

Setzt man in dieser Gleichung für x der Reihe nach

$$x-1,\quad x-2,\quad x-3,\quad \ldots\quad 2,$$

so ergiebt sich

$$D\overset{r}{\underset{x}{S}} - D\overset{r}{\underset{x-1}{S}} = rx^{r-1}$$

$$D\overset{r}{\underset{x-1}{S}} - D\overset{r}{\underset{x-2}{S}} = r(x-1)^{r-1}$$

$$D\overset{r}{\underset{x-2}{S}} - D\overset{r}{\underset{x-3}{S}} = r(x-2)^{r-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

$$D\overset{r}{\underset{2}{S}} - D\overset{r}{\underset{1}{S}} = r\,2^{r-1}$$

Addirt man diese Gleichung, so entsteht, da die Summe der rechten Seiten

$$r\overset{r-1}{\underset{x}{S}} - r \text{ ist}$$

$$D\overset{r}{\underset{x}{S}} - D\overset{r}{\underset{1}{S}} = r\overset{r-1}{\underset{x}{S}} - r$$

oder

$$D\overset{r}{\underset{x}{S}} = r\overset{r-1}{\underset{x}{S}} + D\overset{r}{\underset{1}{S}} - r.$$

Setzt man B für die constante Zahl $D\overset{r}{\underset{1}{S}} - r$, so ist

$$3)\quad D\overset{r}{\underset{x}{S}} = r\overset{r-1}{\underset{x}{S}} + B.$$

Hieraus durch Integration

$$4)\quad \overset{r}{\underset{x}{S}} = r\int \overset{r-1}{\underset{x}{S}}\, dx + Bx.$$

Da $\overset{r}{\underset{0}{S}} = 0$ ist, so ist keine Constante hinzuzufügen. Die Constante B ergiebt sich aus

$$\overset{r}{\underset{1}{S}} = 1.$$

Aus der Definition von $\overset{r}{\underset{x}{S}}$ folgt

$$\overset{0}{\underset{x}{S}} = x.$$

Hieraus nach 4)

$$\overset{1}{\underset{x}{S}} = \int x\, dx + Bx$$

$$= \frac{x^2}{2} + Bx.$$

Für $x = 1$

$$1 = \tfrac{1}{2} + B$$

also

$$B = \tfrac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$5)\quad \overset{1}{\underset{x}{S}} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2},$$

daher

$$\overset{2}{\underset{x}{S}} = \int (x^2 + x) dx + Bx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + Bx \quad \text{und}$$

$$1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + B.$$

Hieraus
$$B = \tfrac{1}{6}$$
und somit
$$6)\quad \overset{2}{\underset{x}{S}} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}.$$
Hieraus nach 4)
$$\overset{3}{\underset{x}{S}} = \int (x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x)\,dx + Bx$$
$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + Bx \quad \text{und}$$
$$1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + B,$$
also
$$B = 0 \quad \text{und}$$
$$7)\quad \overset{3}{\underset{x}{S}} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}.$$
Wendet man wiederum No. 4) an, so ergiebt sich
$$\overset{4}{\underset{x}{S}} = \int (x^4 + 2x^3 + x^2))\,dx + Bx$$
$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + Bx \quad \text{und}$$
$$1 = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + B,$$
also
$$B = -\tfrac{1}{30} \quad \text{und}$$
$$8)\quad \overset{4}{\underset{x}{S}} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}.$$
Es war nach No. 4)
$$\overset{r}{\underset{x}{S}} = r\int S \quad dx + B_0 x$$
also ist
$$\overset{r+1}{\underset{x}{S}} = (r+1 \int S\,dx + B_1 x$$
Setzt man für $\overset{x}{\underset{r}{S}}$ seinen Wert, so entsteht
$$\overset{r\,1+}{\underset{x}{S}} = (r+1)r \int^{2} \overset{r-1}{\underset{x}{S}}\,dx^2 + (r+1)\frac{B_0 x^2}{2} + B_1 x,$$
ebenso ergiebt sich
$$\overset{r+2}{\underset{x}{S}} = (r+2)(r+1)r \int^{3} \overset{r-1}{\underset{x}{S}}\,dx^3 + (r+2)(r+1)\frac{B_0 x^3}{3!}$$
$$+ (r+2)\frac{B_1 x^2}{2!} + B_2 x$$

oder wenn man Binomialcoefficienten einführt

$$\overset{r+2}{\underset{x}{S}} = 3!\,(r+2)_3 \int \overset{r-1}{\underset{x}{S}}\, dx^3 + (r+2)_2 \frac{B_0 x^3}{3} + (r+2)_1 \frac{B_1 x^2}{2} + B_2 x.$$

Durch wiederholte Anwendung des Gesetzes in No. 4) entsteht hieraus:

$$\overset{r+n-1}{\underset{x}{S}} = n!\,(r+n-1)_n \int^{n} \overset{r-1}{\underset{x}{S}}\, dx^n + (r+n-1)_{n-1} \frac{B_0 x^n}{n}$$

$$+ (r+n-1)_{n-2} \frac{B_1 x^{n-1}}{n-1} + \ldots\ (r+n-1)_{n-\alpha-1} B_\alpha \frac{x^{n-\alpha}}{n-\alpha} + \ldots\ B_{n-1} x$$

Für $r = 1$ erhält man, da $\overset{0}{\underset{x}{S}} = x$ ist

$$\overset{n}{\underset{x}{S}} = n! \int^{n} x\, dx^n + (n)_{n-1} \frac{B_0 x^n}{n} + (n)_{n-2} \frac{B_1 x^{n-1}}{n-1}$$

$$+ \ldots\ (n)_{n-\alpha-1} \frac{B_\alpha x^{n-\alpha}}{n-\alpha} \ldots\ B_{n-1} x.$$

Da

$$\int^{n} x\, dx^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{und}$$

$$(n)_{n-p} = (n)_p$$

ist, so entsteht

$$\overset{n}{\underset{x}{S}} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + B_0 x^n + (n)_2 \frac{B_1 x^{n-1}}{n-2} + \ldots\ (n)_{\alpha+1} \frac{B_\alpha x^{n-\alpha}}{n-\alpha} + \ldots\ B_{n-1} x.$$

Wegen

$$(n)_{\alpha+1} \cdot \frac{1}{n-\alpha} = \frac{(n)_\alpha}{\alpha+1} \quad \text{ist}$$

$$9)\quad \overset{n}{\underset{x}{S}} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + B_0 x^n + \frac{(n)_1}{2} B_1 x^{n-1} + \frac{(n)_2}{3} B_2 x^{n-2} + \ldots$$

$$+ \frac{(n)_\alpha}{\alpha+1} B_\alpha x^{n-\alpha} + B_{n-1} x.$$

Für $x = 1$ ergiebt sich

$$10)\quad 1 = \frac{1}{n+1} + B_0 + \frac{(n)_1}{2} B_1 + \frac{(n)_2}{3} B_2 + \ldots + \frac{(n)_\alpha}{\alpha+1} B_\alpha + \ldots\ B_{n-1}.$$

Setzt man in diese Gleichung für n der Reihe nach 1, 2, 3, ... so ergeben sich zur Bestimmung der B die folgenden Gleichungen:

$$11)\quad \begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{2} + B_0 \\ 1 &= \tfrac{1}{3} + B_0 + B_1 \\ 1 &= \tfrac{1}{4} + B_0 + \frac{(3)_1}{1} B_1 + B_3 \\ 1 &= \tfrac{1}{5} + B_0 + \frac{(4)_1}{2} B_1 + \frac{(4)_2}{3} B_2 + B_8 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Hieraus

$$B_0 = \tfrac{1}{2};\quad B_1 = \tfrac{1}{6};\quad B_3 = 0;\quad B_3 = -\tfrac{1}{30};\quad B_4 = 0;\quad B_5 = \tfrac{1}{42};$$
$$B_6 = 0;\quad B_7 = -\tfrac{1}{30};\quad B_8 = 0;\quad B_9 = \tfrac{5}{66};\quad B_{10} = 0;$$
$$B_{11} = -\tfrac{691}{2730};\quad B_{12} = 0;\quad B_{13} = \tfrac{7}{6};\quad B_{14} = 0;\quad B_{15} = -\tfrac{3617}{510}.$$

Wendet man auf den in No. 9) für $\overset{n}{\underset{x}{S}}$ gegebenen Ausdruck die Formel

$$\overset{n}{\underset{x}{S}} - \overset{n}{\underset{x-1}{S}} = x^n$$

an, so ergiebt sich, da die Coefficienten von x^{n-1}, x^{n-2} ... x^0 gleich Null werden, aus dem Coefficienten von x^0:

$$0 = \frac{1}{n+1} - B_0 + \frac{(n)_1}{2} B_1 - \frac{(n)_2}{3} B_2 + \frac{(n)_3}{4} B_3 - \ldots \pm B_{n-1}.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von No. 10) und dividirt das Resultat durch 2, so entsteht:

$$\tfrac{1}{2} = B_0 + \frac{(n)_2}{3} B_2 + \frac{(n)_4}{5} B_4 + \frac{(n)_6}{7} B_6 + \ldots$$

Wegen

$$B_0 = \tfrac{1}{2}$$

ist also

$$0 = \frac{(n)_2}{3} B_2 + \frac{(n)_4}{5} B_4 + \frac{(n)_6}{7} B_6 + \ldots$$

Aus welcher Gleichung sich

$$B_2 = B_4 = B_6 = \ldots = 0$$

ergeben.

Die absoluten Werte der Zahlen B_1, B_3, B_5 ... nennt man die Bernoulli'schen Zahlen.

Aus Gleichung No. 10) ergiebt sich nun, wenn B_3, B_7 positiv genommen werden:

$$12)\ \frac{1}{n+1} - \tfrac{1}{2} + \frac{(n)_1}{2} B_1 - \frac{(n)_3}{4} B_3 + \frac{(n)_5}{6} B_5 + \ldots - \frac{(-1)^\alpha (n)_{2\alpha-1}}{2\alpha} = 0$$
$$\alpha > 0.$$

Aus welcher Gleichung sich die Bernoulli'schen Zahlen angeben, wenn man für n der Reihe nach 2, 4, 6 ... setzt.

Nach der Formel No. 9) ist nun

$$13)\quad \overset{n}{\underset{x}{S}} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \Sigma(-1)^{\alpha+1} \frac{(n)_{2\alpha-1}}{2\alpha} B_{2\alpha-1} x^{n+1-2\alpha};\quad \alpha > 0.$$

Kiel, den 2. November 1879.

Ligowski.

2.

Constructionsaufgaben.

1) Von einem Dreiecke sind die Längen der drei Höhen gegeben; es ist dasselbe zu construiren.

Lösung: (Fig. 1.) Es war ABC das gesuchte Dreieck; h_1, h_2, h_3 die gegebenen Höhen; a, b, c die zu findenden Seiten.

Nun ist:

$$ah_1 = bh_2 = ch_3$$

oder:

$$a : b = h_2 : h_1 \quad \text{und} \quad a : c = h_3 : h_1$$

oder auch:

$$a : c = h_2 : \frac{h_1 h_2}{h_3}.$$

Daraus erhellt aber, dass ein Dreieck mit den Seiten h_1, h_2, $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ ähnlich dem zu findenden ist. Daraus ergiebt sich die Construction: (Fig. 2.)

Wenn

$$MN = h_1,\quad MP = h_3,\quad MR = h_2,\quad \text{ist}$$

$$MQ = \frac{h_1 h_2}{h_3};$$

daher

$$\triangle MQS \sim AQC,$$

wenn

$$MS = h_1 \quad \text{und} \quad QS = h_2$$

ferner

$$QT \text{ senkr. auf } MS;\quad QT = QS = h_2 \quad \text{und} \quad AC \parallel MS;$$

so ist ACQ das gesuchte Dreieck B. Als Hülfsmittel, welche Höhe auf QT aufgetragen sei, berücksichtige man, dass in Folge obiger Gleichungen die längste Höhe zur kürzesten Seite senkrecht steht.

Determination: Ein Dreieck ist offenbar nur möglich, wenn

$$h_1 + h_2 > \frac{h_1 h_2}{h_3} \quad \text{oder} \quad h_1 h_3 + h_2 h_3 > h_1 h_2.$$

2) Ein Sehnenviereck zu construiren, wenn die Längen der vier Seiten gegeben sind.

Lösung: Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, so ist: Fig. 3.

$$D^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

wenn α hier stumpf

$$D^2 = d^2 + c^2 - 2dc\cos\alpha$$

mithin:

$$a^2 + b^2 - d^2 - c^2 + (2ab + 2dc)\cos\alpha = 0$$

also:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 + c^2 - b^2 - a^2}{2(ab + cd)};$$

weiters:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{d^2 + c^2 - b^2 - a^2}{2(ab + cd)}$$

daher

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a + b - c + d)(a + b + c - d)}{4(ab + cd)}}$$

Aehnlich ist:

$$1 + \cos\alpha = \frac{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)}{2(ab + cd)}$$

Daher

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a + b - c + d)(a + b + c - d)}{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)}} = \sqrt{\frac{(s - c)(s - d)}{(s - a)(s - b)}} = \sqrt{\frac{z^2}{n^2}} = \frac{z}{n}$$

wenn

$$2s = a + b + c + d$$

gesetzt wird, und

$$z^2 = (s - c)(s - d); \quad n^2 = (s - a)(s - b).$$

Lösung: Macht man die in Fig. 4. gezeichnete Construction, construirt nämlich die obigen Ausdrücke z und n, als mittlere geometrische Proportionalen nach bekannter Weise, so ist:

$$CHB = \frac{\alpha}{2}, \quad \text{wenn} \quad BH = n;$$

die Construction des Sehnenvierecks folgt nun sehr einfach: $BHJK$.

3) Beweis der wichtigsten Sätze über den Pantographen. (Fig. 5.)

Vorausgesetzt werden die Details der Construction des Instrumentes; F wäre der fix bleibende Punkt; G der geführte, E der zeichnende Stift, beide in einer Geraden durch F; $ABCD$ ... die Anfangsstellung des Pantographen; man lässt nun etwa den Stift G nach G' kommen, welchen Weg beschreibt der zeichnende Stift E? Da F fest ist, so kann D sich nur im Kreise K' bewegen, während C in die Peripherie eines Kreises K zu liegen kommen muss, der mit dem Mittelpunkte in G' und dem Radius GC, welche Strecke ja unveränderlich ist, beschrieben wird. Da die Figur $ABCD$ beständig wegen der Unveränderlichkeit der Seitenlängen ein Rhombus bleiben muss, mithin die Gegenseiten fortwährend parallel sind, so muss $D'C'$, die neue Lage von DC, durch das Aehnlichkeitscentrum der Kreise K und K' hindurch gehen. Dann ist, wenn E' dieses Aehnlichkeitscentrum, ohne noch zu behaupten, dass E' das verschobene E sei:

$$E'D' : E'C' = D'F : C'G'$$

oder:

$$E'D' : E'C' = DF : CG$$

Nun ist aber aus den ähnlichen $\triangle EDF$ und EGC:

$$DF : CG = ED : EC$$

daher:

$$E'D' : C'E' = ED : EC$$

also auch:

$$(E'C' - E'D') : E'D' = (EC - ED) : ED$$

da nun:

$$E'C' - E'D' = CE - ED$$

sein muss, ist auch:

$$E'D' = ED,$$

daher E' der verschobene Punkt E. Da nun, wie vorhin erwähnt E' als Aehnlichkeitscentrum auf der Centrale der beiden Kreise K K' liegen muss, „verbleiben die Punkte E, F, G auch in der neuen (also beliebigen Lage) in einer Geraden“ (1. Satz). Daraus folgt $EFE' = GFG'$, da weiters aus $\triangle EDF \backsim ECG$ und $\triangle E'D'F' \backsim E'C'G'$ folgt $EF : E'F = GF : G'F$, so ist:

$$\triangle EE'F \backsim \triangle GFG'$$

mithin auch:

$$EE' \parallel GG' \text{ (Scheitel-Dreieck).}$$

Der zeichnende Stift beschreibt einen zum geführten Stift $\parallel$ Weg. (2. Satz). Da nun GG', mithin auch EE' beliebig klein sein können, so wird auch eine Curve in jedem ihrer Elemente in der Copie $\parallel$ zum Orginale erscheinen (nach obiger Proportion auch ähnlich sein) im Verhältnisse: $EE' : GG' = EF : GF$ oder: $EE' : GG' = ED : DC = 1 : n$ (3. Satz) weil beliebig $DC = n \, . \, DE$ gemacht werden kann.

Graz, April 1880. Alfred Haussner.

XXI.

Ueber den Wärmezustand der Erde.

Von

A. Hempel.

Im letzten Abschnitt des Handbuchs der theoretischen Physik von Thomson & Tait, Band I. sind unter dem Titel: „Ueber die saeculare Abkühlung der Erde“ eine Reihe von Resultaten zusammengestellt, die, wenngleich auf ziemlich unsicheren Grundlagen aufgebaut, immerhin für die Geschichte der Erde als Weltkörper von hohem Interesse sind. Es ist an der betreffenden Stelle der Weg, auf welchem die Resultate gewonnen sind, nur sehr allgemein angedeutet, und es mag sich deshalb wohl rechtfertigen, wenn in Folgendem versucht wird, mit Benutzung der Thomson'schen Annahmen den Wärmezustand der Erde zu ermitteln. Thomson geht die verschiedenen Hypothesen durch, die über die Erdwärme aufgestellt sind, und bleibt schliesslich bei der von Leibnitz gegebenen Theorie stehen, nach welcher die Erde früher ein glühender flüssiger Körper gewesen, ohne zu erklären, wie sie in diesen Zustand gekommen. Es würden danach für die heute vorhandene Wärme der Erde zwei Quellen in Betracht zu ziehen sein: die Bestrahlung durch die Sonne und die in der Erde von früher her vorhandene Wärme.

Eine Verminderung der Sonnenwärme ist bisher nicht nachgewiesen worden, und obgleich wohl kaum zu bezweifeln, dass auch dieser Weltkörper im Laufe der Zeit einer Abkühlung entgegengeht, so soll doch in Folgendem seine Temperatur als constant angesehen werden. Die Erwärmung der Erde durch die Sonne muss von ihrer gegenseitigen Stellung abhängig sein, und es soll deshalb eine kurze Herleitung der Bewegung der Erde um die Sonne gegeben werden.

Aus den allgemeinen Gleichungen für die Bewegung zweier Massen, die sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, folgt: 1) dass die Bewegung des Schwerpunkts beider eine gleichförmige; 2) dass ihre Bahnen in einer Ebene liegen, die durch den Schwerpunkt geht; 3) dass ihre Momente in Bezug auf den Schwerpunkt, das heisst die Wege ihrer Leitstrahlen constant sind.

Nimmt man nun die Ebene der Bahn als xy Ebene, den Schwerpunkt als Mittelpunkt rechtwinkliger Coordinaten, so reduciren sich die allgemeinen Bewegungsgleichungen für irgend eine der beiden Massen auf:

$$1)\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{x}{r} \quad 2)\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{y}{r} \quad 3)\ xdy - ydx = cdt,$$

wobei μ die Beschleunigung in der Entfernung 1, r der Abstand der in Betracht gezogenen Masse vom Coordinatenmittelpunkt, t die Zeit und c eine Constante.

Aus den beiden ersten folgt:

$$\frac{2dxd^2x + 2dyd^2y}{dt^2} = -2\mu\frac{xdx + ydy}{r^3}$$

oder wegen:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad xdx + ydy = rdr$$

$$\frac{2dxd^2x + 2dyd^2y}{dt^2} = -2\mu\frac{dr}{r^2}$$

oder

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = d\left(2\frac{\mu}{r}\right)$$

also

$$4) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - v_0^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0}.$$

Nun ist

$$ds^2 = r^2d\varphi^2 + dr^2$$

also geht die Gleichung über in:

$$5) \qquad \frac{r^2d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0} + v_0^2.$$

Drückt man x und y in Polarcoordinaten aus, so wird 3):

$$6) \qquad r^2d\varphi = cdt.$$

Es ist nun zu zeigen, dass 5) und 6) den Kepler'schen Gesetzen entsprechen. Eliminirt man t aus 5) und 6), so wird:

$$\frac{c^2(r^2 d\varphi^2 + dr^2)}{r^4 d\varphi^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0} + v_0^2$$

$$\frac{c^2 dr^2}{r^4 d\varphi^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0} + v_0^2 - \frac{c^2}{r^2} \tag{7}$$

oder je nachdem $d\varphi$ und dr gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben:

$$d\varphi = \pm \frac{c\,dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0} + v_0^2 - \frac{c^2}{r^2}}} \quad \text{oder für} \quad \frac{1}{r} = z$$

$$= \mp \frac{c\,dz}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + 2\mu z - c^2 z^2}}$$

$$= \mp \frac{c\,dz}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(\frac{\mu}{c} - cz\right)^2}}$$

$$= \pm \frac{d\,\dfrac{\frac{\mu}{c} - cz}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}}}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\frac{\mu}{c} - cz}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}}}\right)^2}}$$

$$= \mp \frac{d\,\dfrac{cz - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}}}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{cz - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}}}\right)^2}}$$

Daraus folgt aber:

$$\varphi - w = \mp \arccos \pm \frac{\frac{\mu}{c} - cz}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}}}$$

und indem man für z den Wert $\frac{1}{r}$ wieder einführt

$$\varphi - w = \mp \arccos \pm \frac{\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}}}$$

$$\cos(\varphi - w) = \pm \frac{\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}}}$$

oder

$$\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r} = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}} \cdot \cos(\varphi - w)$$

$$r\left(1 \mp \frac{c}{\mu}\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{c^2}} \cdot \cos(\varphi - w)\right) = \frac{c^2}{\mu}.$$

Indem man noch $\frac{c}{\mu}$ unter das Wurzelzeichen bringt, erhält man als Bahngleichung des Körpers

$$8) \qquad r\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{c^2}{\mu^2}\left(\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2\right)} \cdot \cos(\varphi - w)\right) = \frac{c^2}{\mu}.$$

Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte (Brennpunkt) und einer festen Graden (Directrix) in einem constanten Verhältniss stehen, ist ein Kegelschnitt. Bezeichnet man den Abstand eines Curvenpunktes vom Brennpunkt mit r, sein Verhältniss zu dem Abstande von der Directrix mit e, den Abstand des Brennpunktes von der Directrix mit p, so ist die Gleichung des Kegelschnitts:

$$r(1 - e\cos(\varphi - w)) = ep.$$

Also ist 8 die Gleichung eines Kegelschnitts.

Es ist nun zu zeigen, dass die Wurzel darin nicht imaginär werden kann, was nur möglich wäre für $\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2 > o$.

Nun ist:

$$r^2 d\varphi \leqq rds$$

oder

$$cdt \leqq rds$$

$$c \leqq rv;$$

also für $\frac{2\mu}{r_0} - v_0{}^2 > o$

$$\frac{c^2}{\mu^2}\left(\frac{2\mu}{r} - v^2\right) \leqq \frac{2rv^2}{\mu} - \frac{r^2v^4}{\mu^2}$$

Für das Maximum des Ausdrucks rechts in Bezug auf v^2 hat man:

$$\frac{2r}{\mu} = \frac{2r^2v^2}{\mu^2} \quad \text{oder} \quad v^2 = \frac{\mu}{r}$$

und für diesen Wert ist

$$\frac{2rv^2}{\mu} - \frac{r^2v^4}{\mu^2} = 1\,;$$

also ist das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen in 8) $\leqq 1$; die Wurzel reell.

Die Bahn ist nun eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem

$$e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\mu^2}\left(\frac{2\mu}{r_0} - v_0{}^2\right)} \lesseqgtr 1\,;$$

das heisst jenachdem

$$v_0{}^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}.$$

Setzt man darin

$$r_0 = \infty; \quad v_0 = o$$

so wird

$$e = 1;$$

nun war

$$4) \qquad v^2 - v_0{}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0}\,;$$

kommt also der Körper aus unendlicher Entfernung mit der Anfangsgeschwindigkeit o, so wird

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}\,;$$

die Bahn ist also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem die Geschwindigkeit in einem Punkte $\lesseqgtr$ als diejenige, die er daselbst haben würde, wenn er aus unendlicher Entfernung mit der Anfangsgeschwindigkeit o dahin gekommen wäre.

Da es sich um die Erde als Planeten handelt, so ist die Bahn eine Ellipse, und es ist mithin:

$$v_0{}^2 < \frac{2\mu}{r_0}.$$

Nun war

$$7)\qquad \frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{c^2}{r^2}=\frac{2\mu}{r}-\frac{2\mu}{r_0}+v_0^2.$$

Für Maximum und Minimum von r wird

$$\frac{dr}{d\varphi}=o;$$

also giebt

$$\frac{c^2}{r^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{2\mu}{r_0}-v_0^2=0$$

die beiden Stücke der grossen Axe. Es wird:

$$r^2-\frac{2\mu r}{\frac{2\mu}{r_0}-v_0^2}+\frac{c^2}{\frac{2\mu}{r_0}-v_0^2}=0;$$

also die grosse Axe

$$\alpha)\quad 2a=\frac{2\mu}{\frac{2\mu}{r_0}-v_0^2}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt mit m, so hat man für den Endpunkt der kleinen Axe:

$$\beta)\quad \frac{a}{m+p}=e;\quad a-me=pe$$

und für den Endpunkt der grossen Axe

$$\frac{a+m}{a+m+p}=e;\quad (a+m)(1-e)=pe=a-me$$

$$a-ae+m-me=a-me;\quad m=ae \text{ eingesetzt in } \beta)$$

$$\gamma)\quad a(1-e^2)=pe.\qquad \text{Aus 8)}\quad pe=\frac{c^2}{\mu}$$

also

$$\mu=\frac{c^2}{a(1-e^2)}.$$

Es war aber

$$cdt=r^2d\varphi$$

also c der doppelte in der Zeiteinheit durch den Leitstrahl beschriebene Flächenraum; bezeichnet man die Umlaufszeit mit T, so ist:

$$c=\frac{2ab\pi}{T}$$

und da

$$b^2 = a^2(1 - e^2)\,; \quad c = \frac{2\pi a^2 \sqrt{(1 - e^2)}}{T}\,; \quad c^2 = \frac{4\pi^2 a^4}{T^2}(1 - e^2)$$

$$\delta) \quad \mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Eliminirt man φ aus den Gleichungen 5) und 6), so wird:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0} + v_0^2$$

$$= -\frac{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}{r^2}\left\{r^2 - \frac{2\mu r}{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2} + \frac{c^2}{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}\right\}$$

und mit Benutzung von α) und γ)

$$= -\frac{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}{r^2}\left\{r^2 - 2ar + a^2(1 - e^2)\right\}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}{r^2}\left\{(r - a)^2 - a^2e^2\right\}$$

und daraus:

$$dt = \pm \frac{\dfrac{rdr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2}}}{\sqrt{a^2e^2 - (r - a)^2}}$$

Setzt man nun

$$r = a(1 - e\cos u)\,; \quad dr = ae\sin u\, du\,; \quad (r - a)^2 = a^2e^2(1 - \sin^2 u)$$

so wird

$$a^2e^2 - (r - a)^2 = a^2e^2\sin^2 u$$

und mit Benutzung von α)

$$dt = \pm \frac{a^2e(1 - e\cos u)\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,.\sin u\,.\,du}{ae\sin u} = \pm\, a(1 - e\cos u)\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,.\,du$$

und wegen δ) $\frac{a}{\mu} = \frac{T^2}{4\pi^2 a^2}$

$$dt = \pm \frac{T}{2\pi}(1 - e\cos u)\,du$$

$$t = \frac{T}{2\pi}(u - e\sin u)\,; \quad \frac{2\pi}{T}\,.\,t = u - e\sin u$$

wenn t gerechnet wird von dem Moment ab, wo $u = o$, also r ein Minimum. $\frac{2\pi}{T}$ ist der Winkel, den der Leitstrahl bei gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit in der Zeiteinheit beschreiben würde. Es kann also u für irgend eine Zeit bestimmt werden, und daraus wiederum r.

In der Entwickelung für die Bewegung der Erde um die Sonne tritt die Excentricität als eine constante Grösse auf, und sie müsste auch constant sein, wenn es sich um diese beiden Weltkörper allein handelte; nun wird aber in der Astronomie gezeigt, dass sie durch die Einwirkung anderer Weltkörper geändert wird. Le Verrier unter Anderen hat Formeln zur Berechnung der Excentricität der Erdbahn aufgestellt. — Auf Grund dieser Formeln von 50000 zu 50000 Jahren berechnet hat James Kroll (climate and time) eine graphische Darstellung dieser Excentricitäten gegeben, so weit sie in 3000000 Jahren von 1800 aus rückwärts gerechnet stattgefunden haben, und so weit sie in 1000000 Jahren von 1800 aus stattfinden werden. Aus dieser Tafel ersieht man, dass die Excentricitäten, die von einem Maximum zum anderen Zeitabschnitte von mindestens 100000 Jahren umfassen, höchst unregelmässige sind. Die Grenzen aber, zwischen denen die Excentricität sich ändert, sind von Le Verrier auf o und 0,07775 festgestellt worden. In neuerer Zeit hat der Amerikaner Stockwell mit Berücksichtigung des Einflusses des Neptun Berechnungen angestellt, nach welchen die Grenzwerte o und 0,0693888 betragen. Was aber die Bahnelemente angeht, so hat Laplace bewiesen, dass die Aenderung der Excentricitäten auf die mittleren Bewegungen und die grossen Axen der Planetenbahnen keinen Einfluss haben.

Es ist nun die Frage zu stellen, ob durch die Veränderung der Excentricität die Erwärmung der Erde durch die Sonne wesentlich beeinflusst werden kann.

Als Ausgangspunkt diene die Gleichung:

$$dt = (1 - e\cos u)\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,.\,du = \frac{T}{2\pi}(1 - e\cos u)\,du \quad \text{für } r = a(1 - e\cos u).$$

Während der Zeit dt fällt auf den Planeten eine Wärmemenge, die proportional $\frac{dt}{r^2}$; also für irgend eine Zeitdauer

$$\int\frac{dt}{r^2} = \int\frac{\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e\cos u)\,du}{a^2(1 - e\cos u)^2} = \frac{1}{\sqrt{a\mu}}\int\frac{du}{1 - e\cos u}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a\mu}} \int \frac{d\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2} - e\left(\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a\mu}} \int \frac{\frac{d\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{u}{2} - e + e\,\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a\mu}} \int \frac{d\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}}{1 - e + (1+e)\,\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{2}{(1-e)\sqrt{a\mu}} \int \frac{d\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a\mu.(1-e^2)}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right)}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a\mu.(1-e^2)}}.\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right).$$

Nun ist der Abstand des Mittelpunktes der Ellipse von der Directrix $= \frac{a}{e}$; der Abstand irgend eines Umfangpunktes von der Directrix, wenn r der zugehörige Leitstrahl: $= \frac{r}{e}$. Denkt man sich nun über der grossen Axe als Durchmesser einen Kreis beschrieben, von dem Ort des Planeten eine Grade normal zur grossen Axe bis zum Durchschnitt mit dem Kreise gezogen: denkt man sich weiter diesen Durchschnittspunkt mit dem Mittelpunkt verbunden, und bezeichnet man den Winkel, den dieser Kreisradius mit der grossen Axe nach der Seite des Perihels hin bildet, mit u, so wird:

$$\frac{r}{e} = \frac{a}{e} - a\cos u \quad \text{oder} \quad r = a(1 - e\cos u).$$

Rechnet man also die Zeit vom Durchgang durch das Perihel

aus, so beträgt die zugeführte Wärmemenge bis zum Durchgang des Planeten durch den Endpunkt der kleinen Axe eine Grösse, die proportional:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

bis zum Durchgang durch den Endpunkt der grossen Axe:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

bis zum Durchgang durch den 2. Endpunkt der kleinen Axe:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{arc\,tg} - \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

bis zur Rückkehr zum Anfangspunkt:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\pi\right) = \pi.$$

Fällt die Sonnenwende mit dem Durchgang der Erde durch das Perihel zusammen, so ist für den Frühlingspunkt $\cos u = e$; also

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

die Wärmeaufnahme vom Durchgang durch das Perihel bis zum Durchgang durch den Frühlingspunkt ist also proportional

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \frac{\pi}{4}$$

bis zum Endpunkt der grossen Axe war sie proportional $\frac{\pi}{2}$; es muss also unter der gestellten Voraussetzung die Erde während des kürzeren Halbjahrs in der Sonnennähe grade so viel Wärme empfangen als während des längeren Halbjahrs in der Sonnenferne.

Für den ganzen Umlauf ist die zugeführte Wärmemenge proportional: $\frac{2\pi}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}}$; es ist aber die kleine Axe $= \sqrt{a^2(1-e^2)}$, also die zugeführte Wärmemenge umgekehrt proportional der kleinen Axe.

Wächst die Excentricität von o zu 0,07, so nimmt die kleine Axe im Verhältniss von $\frac{1}{\sqrt{1-0{,}07^2}} = \frac{1000}{997}$ ab und es wächst die aufgenommene Wärmemenge im Verhältniss von $\frac{997}{1000}$. Hinge also die

Erwärmung der Erde nur von der Sonnenwärme ab, und nimmt man vom absoluten Nullpunkt aus gerechnet, die mittlere Temperatur gleich 273^0 Celsius, wie es etwa dem heutigen Zustande der Erde entspricht, die Temperatur des Weltalls aber $= o^0$, so könnte durch die Aenderung der Excentricität die Oberflächentemperatur der Erde noch nicht um 1^0 C. erhöht oder erniedrigt werden. Nimmt man aber die Temperatur des Weltalls nach Pouillet $= -142^0$ vom Gefrierpunkt des Wassers aus gerechnet, so könnte die Oberflächentemperatur der Erde um höchstens $0{,}4^0$ C. variiren.

Da aber erfahrungsmässig der Einfluss der Oberflächentemperatur schon in sehr geringen Tiefen verschwindet, so kann daraus geschlossen werden, dass die Aenderung der Excentricität keinen Unterschied für den Wärmezustand der Erde im Ganzen herbeiführt.

Anders verhält es sich freilich mit dem Wärmezustand an der Oberfläche; wird hier die Temperatur durchweg um 1^0 niedriger, so müssten schon dadurch allein manche Aenderungen herbeigeführt werden; es müssten zum Beispiel die Schnee- und Vegatationsgrenzen sich verschieben. Ebenso könnte durch Aenderung der Excentricität die Verteilung der Wärme an der Erdoberfläche beeinflusst werden und nach der Meinung von James Kroll (climate and time) soll das in hohem Maasse der Fall sein.

Es bleibt also übrig zu untersuchen, welchen Einfluss Verteilung und Bewegung der vorhandenen Wärme auf den Zustand der Erde ausübt. Thomson legt seinen Betrachtungen darüber die Formel

$$v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz$$

zu Grunde.

Bekanntlich stellt nach Fourier die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = k \frac{d^2v}{dx^2}$$

das physikalische Gesetz dar, nach welchem die Wärmeverteilung in einem Körper stattfindet. Nun sind die täglichen Schwankungen der Oberflächentemperatur der Erde nur bis zur Tiefe von 1 Meter bemerkbar, die jährlichen Schwankungen aber, die hier allein in Betracht kommen könnten, verschwinden schon in einer Tiefe von 16 bis 18 Metern; dagegen kann der Radius der Erde als unendlich angesehen werden. Nimmt man zunächst noch an, dass die mittlere Oberflächentemperatur constant ist, so mag die Erde als ein Körper

angesehen werden, der auf einer Seite von einer Ebene begrenzt wird, — der nach der anderen Seite sich bis ins Unendliche erstreckt, — für den die Temperatur an der Grenzebene constant ist und für den die Temperatur irgend eines Punktes im Innern allein von der Zeit und seiner Entfernung von der Grenzebene abhängt. Es soll ferner, auf Grund der Leibnitz'schen Theorie, angenommen werden, dass zu Anfang, als die Erde noch ein glühender flüssiger Körper war, die Temperatur in allen Teilen dieselbe und $= v_0 + V$ gewesen ist.

In der Thomson'schen Formel bezeichnet v die Temperatur in irgend einem Punkte, v_0 die Temperatur an der Oberfläche, V die Anfangstemperatur, x die Tiefe des Punktes unter der Oberfläche, t die Zeit, k die Wärmeleitung, das heisst diejenige Wärmemenge, welche durch den Querschnitt 1 hindurchfliesst, wenn der Temperaturunterschied pro Längeneinheit $= 1$ und wenn als Maass diejenige Wärmemenge genommen wird, welche nötig ist um die Kubikeinheit des Körpers um 1^0 zu erwärmen. Diese Bezeichnungen sollen in Folgendem festgehalten werden.

Sucht man nun eine Function, die der Differentialgleichung genügt, und die nebenbei die Bedingung erfüllt: $v = V$ für $t = o$ und $v = o$ für $x = o$, so findet man:

$$v = \frac{V}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty d\lambda \left\{ e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}} - e^{\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}} \right\}$$

oder indem man für das erste Integral setzt

$$\frac{x - \lambda}{2\sqrt{kt}} = -z; \quad d\lambda = 2\sqrt{kt}\,.\,dz$$

und für das zweite

$$\frac{x + \lambda}{2\sqrt{kt}} = z; \qquad d\lambda = 2\sqrt{kt}\,.\,dz$$

$$v = \frac{V}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz - \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \right\}$$

$$v = \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\, dz$$

für $x = o$ wird $v = o$ und für $t = o$, wegen

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

wird $v = V$.

Sucht man andererseits eine Function, die der Differentialgleichung genügt und dabei die Bedingungen erfüllt:

$$v = v_0 \text{ für } t = o; \text{ und } v = v_0 \text{ für } x = o$$

so erhält man

$$v = v_0.$$

Danach ist v_0 die mittlere Oberflächentemperatur für jede Zeit; sie soll wie früher $= o$ angenommen werden.

Indem man beide addirt, wird

$$1)\quad v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\,dz$$

eine Function, die den Bedingungen genügt:

$$v = v_0 + V \text{ für } t = o \text{ und } v = v_0 \text{ für } x = o.$$

Offenbar stellt sich Thomson vor, dass die glühende flüssige Erde sich sehr schnell mit einer dünnen Kruste von niedriger und constanter Temperatur bedeckt hat, was sich wohl daraus rechtfertigt, dass auch heute noch ein glühendes Lavafeld sich in wenigen Tagen mit einer Schicht überzieht, die es zugänglich macht.

Geht man von der Formel aus:

$$v = v_0 + \frac{V}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty d\lambda \left\{ e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}} \right\}$$

so wird:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty d\lambda \left\{ -\frac{x-\lambda}{2kt} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}} + \frac{x+\lambda}{2kt} e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}} \right\}$$

Setzt man wie früher:

$$\frac{x-\lambda}{2\sqrt{kt}}=-z;\qquad \frac{x+\lambda}{2\sqrt{kt}}=z;\qquad d\lambda=2\sqrt{kt}.dz$$

so wird:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{V}{2\sqrt{\pi kt}}\left\{\int_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty}2ze^{-z^2}dz+\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty}2ze^{-z^2}dz\right\}$$

$$=\frac{V}{2\sqrt{\pi kt}}\left\{\int_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty}d(-e^{-z^2})+\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty}d(-e^{-z^2})\right\}$$

$$=\frac{V}{2\sqrt{\pi kt}}\left\{e^{-\frac{x^2}{4kt}}+e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\}$$

also schliesslich:

$$2)\quad \frac{dv}{dx}=\frac{V}{\sqrt{\pi kt}}\,.\,e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

und daraus:

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{V}{\sqrt{\pi kt}}-\frac{x}{2kt}\,.\,e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

Sondert man aus der Grundformel den Factor ab, der allein von t abhängig ist, — also:

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\left\{e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}}-e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}}\right\}$$

und leitet ihn nach t ab, so erhält man:

$$-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\left\{e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}}-e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}}\right\}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{t}}\left\{\frac{(x-\lambda)^2}{4kt^2}\,.\,e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}}-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt^2}\,.\,e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}}\right\}$$

also:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{V}{2\sqrt{\pi k}}\cdot\frac{1}{2t\sqrt{t}}\int_0^{\infty}d\lambda\left\{-e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}}+e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}}\right.$$
$$\left.+\frac{(x-\lambda)^2}{2kt}\,.\,e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}}-\frac{(x+\lambda)^2}{2kt}\,.\,e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}}\right\}$$

$$= \frac{V}{2\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{2t\sqrt{t}} \left\{ \int_0^\infty d\lambda \left(\frac{(x-\lambda)^2}{2kt} - 1 \right) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4kt}} \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty d\lambda \left(\frac{(x-\lambda)^2}{2kt} - 1 \right) e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4kt}} \right\}$$

macht man die früheren Einsetzungen:

$$\frac{x-\lambda}{2\sqrt{kt}} = -z; \qquad \frac{x+\lambda}{2\sqrt{kt}} = z; \qquad d\lambda = 2\sqrt{kt}.dz$$

so wird:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V}{2\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{2\sqrt{kt}}{2t\sqrt{t}} \left\{ \int_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty dz(2z^2-1)e^{-z^2} - \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty dz(2z^2-1)e^{-z^2} \right\}$$

$$= \frac{V}{2t\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} d(-ze^{-z^2}) = -\frac{V}{t\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} d(ze^{-z^2})$$

also schliesslich:

$$3) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{V}{t\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{kt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4kt}} = k\frac{d^2v}{dx^2}$$

Die aufgestellte Formel genügt also der Differentialgleichung und den gestellten Bedingungen.

Bei Anwendung der Formeln ist als Zeiteinheit ein Jahr zu nehmen. V setzt Thomson $= 7000^0$ Fahrenheit, eine Annahme, die wohl nicht zu hoch erscheint, wenn man bedenkt, dass die Schmelztemperatur verschiedener Metalle zwischen 3000^0 und 4000^0 Fahrenheit liegt, dass die Temperatur einer in der Luft brennenden Wasserstoff-Flamme 5866^0 Fahrenheit, und die einer Hydrooxygen-Flamme 125000^0 ist (Tyndal).

Die Längeneinheit ist bei Thomson ein englischer Fuss; den Coefficienten k aber setzt er $= 400$.

Zur Bestimmung des k benutzt Thomson vieljährige Beobachtungen der periodischen Temperaturveränderungen in verschiedenen Tiefen unter der Erdoberfläche. Die Methode dieser Bestimmung ist von Everett angegeben in einem Aufsatze, der sich unmittelbar an den von Thomson: „on the periodical variations of underground temperature“ Trans Roy. Soc. Edingb. March. 1860 — anschliesst.

Everett geht von der Formel aus:

$$v = A_0 + P_1 \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + E_1\right) + P_2 \sin\left(4\pi\frac{t}{T} + E_2\right) + \ldots$$

darin ist A_0 die mittlere Jahrestemperatur; für irgend ein anderes Glied ist das Maximum oder Minimum $= + P$ oder $- P$; P ist also die halbe Amplitude; E ist die Phasenverzögerung. Die Reihe convergirt sehr schnell, so dass nur die ersten Glieder festgehalten werden. P und E sind beide von der Tiefe abhängig, in der beobachtet wird. Setzt man nun die im Laufe eines Jahres, und für eine bestimmte Tiefe durch Beobachtung von v gefundenen Werte in die Formel ein, so kann man daraus A_0, P, E bestimmen. Er weist dann weiter nach, dass

$$\frac{\triangle E_n}{x} = \frac{\triangle \lg P_n}{x} = \sqrt{\frac{n\pi c}{T\varkappa}}$$

wobei $\triangle E_n$ der Zuwachs der Phasenänderung, $\triangle \lg P_n$ der logarithmische Zuwachs der Amplitude, wenn man von den Beobachtungen in einer Tiefe zu denen in einer anderen Tiefe übergeht, x der Unterschied der beiden Tiefen und $\frac{\varkappa}{c}$ das k in der Thomson'schen Formel ist.

Zur Auswertung von k benutzt Thomson Beobachtungen von Forbes, die während mehrerer Jahre an drei verschiedenen Standorten ausgeführt worden sind. Es ergiebt sich daraus $k = 235{,}1$ im Sandstein; $= 260{,}5$ im Sand; $= 690{,}7$ im Basalt. Der Mittelwert davon ist nahezu 400. In den Beobachtungen von Forbes dient der französische Fuss als Längeneinheit; da aber der englische Fuss nur wenig von dem französischen abweicht, so kann immerhin dieser Wert für den englischen Fuss als Einheit festgehalten werden. Wenn aber Thomson meint, dass das k wohl für alle Tiefen und für alle Temperaturen dasselbe sei, so erscheint das sehr gewagt; indessen da nicht genügende Beobachtungen existiren, die eine nähere Prüfung möglich machen, so soll 400 als allgemeiner Wert von k beibehalten werden.

400 ist also die Wärmemenge, welche durch einen Quadratfuss des Erdbodens hindurchfliesst, wenn die Temperaturdifferenz für jeden Fuss 1^0 F. beträgt und wenn als Maass die Wärmemenge dient, welche nötig ist um einen Cubikfuss Gestein um 1^0 F. zu erwärmen. Nun nimmt nach Thomson die Temperatur für jede 50 Fuss Tiefe um 1^0 F. zu oder für je 27 Meter um 1^0 C., was mit den gewöhnlichen Annahmen übereinstimmt; also fliessen in Wirklichkeit durch jeden Quadratfuss 8 obiger Wärmeeinheiten.

Um sich eine Vorstellung von dieser Wärmemenge zu machen wird es nötig sein sie durch die gebräuchlichen Maasse auszudrücken.

In der Entwicklung der Differentialgleichung geht k aus dem Ausdruck $\frac{\varkappa}{\varrho c}$ hervor, wobei $\varkappa$ die Wärmemenge, die durch den Querschnitt 1 hindurchgeht, wenn der Temperaturunterschied pro Längeneinheit = 1, ϱ die Dichtigkeit, c die specifische Wärme. Nimmt man Grade C. statt der Grade F., so ändert sich der Wert von k nicht, da es sich dabei nur um das Verhältniss zweier Wärmemengen handelt. Schreibt man dann Meter statt Fuss (1 Meter = 3,28 Fengl), so wächst der Zähler im Verhältniss von $1:\overline{3{,}28}^{2}$, der Nenner von $1:\overline{3{,}28}^{3}$, und da die Temperaturdifferenz pro Längeneinheit im Verhältniss von 1:3,28 abnimmt, so erhält man das neue k, indem man das alte durch $\overline{3{,}28}^{2}$ dividirt, das giebt $k = 37$. Es fliesst also durch einen Quadratmeter jährlich 37 mal so viel Wärme als nötig um 1 Kubikmeter Gestein um 1° C. zu erwärmen. Nimmt man als Maass die Wärmemenge, welche nötig ist um 1 Kubikmeter Wasser um 1° C. zu erwärmen, so wird:

$$k\,.\,\varrho c = \frac{\varkappa}{1}.$$

Man erhält also das k für die neue Einheit, wenn man den früheren Wert mit ϱc multiplicirt.

Nun hat Forbes die specifischen Wärmen der drei Gesteinsarten durch Regnault bestimmen lassen und Thomson giebt in seinem Aufsatze die zugehörigen Producte aus specifischer Wärme und Dichtigkeit an:

$$= 0{,}5283; \quad 0{,}3006; \quad 0{,}4623$$

der Mittelwert daraus beträgt 0,43; also wird

$$k = 37\,.\,0{,}43 = 16.$$

Die Temperaturdifferenz beträgt 1° für je 27 Meter, also fliesst durch einen Quadratmeter $\frac{16}{27}$ mal so viel Wärme als nötig ist um 1 Kubikmeter Wasser um 1° C. zu erwärmen oder $\frac{16000}{27}$ Calorien = 592 oder ungefähr 600 Calorien.

Es wird in Folgendem gezeigt, dass diese Wärmemenge mit der Zeit abnehmen muss, aber es ist auch wohl selbstverständlich, dass mit fortschreitender Abkühlung sie kleiner wird, und es ist in Folge

die Frage zu stellen, ob durch Verminderung dieser Wärmemenge die Oberflächentemperatur merklich geändert werden kann.

Nach James Kroll (climate and time) empfängt ein Quadratfuss der Erdoberfläche bei beständig senkrechter Incidenz der Sonnenstrahlen, nach Abzug des Teils, der durch die Atmosphäre zurückgehalten wird, während eines Tages = 12 Stunden, eine Wärmemenge äquivalent 2796767 Fusspfund engl. oder, da ein Quadratmeter nahezu 11 Quadratfuss engl., 1 Meterkilogramm = 9 Fusspfund pro Quadratmeter $\frac{2796768.11}{9}$ M. K.

Die Wärmemenge, die von der halben Erdoberfläche binnen 12 Stunden aufgenommen wird, ist dieselbe als diejenige, welche in derselben Zeit die Fläche eines grössten Kreises bei senkrechter Incidenz erhält. Da nun ein grösster Kreis, die Erde als Kugel angesehen, sich zur halben Oberfläche verhält wie 1:2, so nimmt ein Quadratmeter pro Tag durchschnittlich auf:

$$\frac{2796768.11.1}{9.2} \text{ M. K.} = \frac{2796768.11.1}{9.2.425} \text{ Calorien}$$

und pro Jahr

$$\frac{2796768.11.1.365}{9.2.425} \text{ Calorien oder etwa 1467000 Calorien.}$$

Davon betragen 600 Calorien etwa $\frac{1}{2440}$.

Da die mittlere Temperatur der Erdoberfläche constant ist, so muss sie gerade so viel Wärme in den Weltraum ausstrahlen als sie Wärme empfängt. Fällt ein Teil der aufgenommenen Wärmemenge fort, so muss die Oberflächentemperatur bis zu einem neuen Gleichgewichtszustand sinken. Setzt man die Ausstrahlung $= a$ und proportional dem Unterschied zwischen der Temperatur der Erdoberfläche und der des Weltraums; die von der Sonne empfangene Wärme $= s$, die aus dem Inneren der Erde zufliessende $= e$ und rechnet man absolut genommen die Temperatur des Weltraums $= o$, also die der Erdoberfläche $= 273^0$ C., so wird:

$$a = c.273 = s + e.$$

Fiele nun der Wärmefluss aus dem Innern fort, so müsste sich die Temperatur der Erdoberfläche um x^0 erniedrigen; es würde

$$c.(273 - x) = s$$

also

$$\frac{273 - x}{273} = \frac{s}{s + e} \quad \text{oder} \quad x = \frac{e}{s + e}.273$$

und da e sehr klein im Verhältniss zu s

$$x = \frac{e}{s} . 273$$

$\frac{e}{s}$ war $\frac{1}{2440}$; es würde also die Temperaturerniedrigung $\frac{273}{2440}$ ^{0} C. das ist etwa $\frac{1}{9}$ ^{0} betragen.

Nimmt man aber die Temperatur des Weltraums nach Pouillet vom gewöhnlichen o Punkt aus gerechnet $= -142^0$, so würde die Temperaturerniedrigung nur $\frac{142}{2440}$ ^{0} C. oder ungefähr $\frac{1}{17}$ ^{0} C. ausmachen.

Der Unterschied also, der durch die fortschreitende Abkühlung der Erde in der Oberflächentemperatur hervorgebracht werden kann, ist unter allen Umständen ein höchst geringer.

Es bleibt noch der innere Wärmezustand der Erde in Betracht zu ziehen. Die zugehörigen Formeln waren

$$1)\quad v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\, dz$$

$$2)\quad \frac{dv}{dx} = \frac{V}{\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

$$3)\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{V}{t\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

Nimmt man in 1) x sehr klein, t sehr gross, so kann man e^{-z^2} ohne grossen Fehler $= 1$ setzen; es wird also

$$\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\, dz = \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} dz$$

$$v - v_0 = \frac{V.x}{\sqrt{\pi k t}} ; \qquad \frac{v - v_0}{x} = \frac{V}{\sqrt{\pi k t}}$$

Die Temperatur nimmt für 50 Fuss Tiefe um 1^0 F. zu.

Für $x = 50$ wird also $v - v_0 = 1$; V war aber $= 7000$, $k = 400$, daher:

$$\frac{1}{50} = \frac{7000}{\sqrt{400 . \pi t}} \quad \text{oder} \quad t = \frac{35^2 . 10^8}{400 . \pi} = \frac{1225}{1256} . 10^8$$

also nahezu $= 10^8$, das heisst es sind seit dem Zustand der Erde, welchen Thomson als Ausgangspunkt genommen, 10^8 Jahre vergangen.

Dasselbe Resultat erhält man aus Gleichung 2), wenn man darin $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{50}$ setzt, da $e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ wieder $= 1$ wird.

Aus 2) ersieht man, dass für ein gegebenes x, von der Oberfläche aus gerechnet, die zugehörige Temperaturzunahme der Quadratwurzel aus der Zeit umgekehrt proportional ist.

Nimmt man $x = 1$ und $t = 4 . 10^4$; $16 . 10^4$; $4 . 10^6$; 10^8, so erhält man als zugehörige Temperaturen in 1 Fuss Tiefe 1^0; $\frac{1}{2}{}^0$; $\frac{1}{10}{}^0$; $\frac{1}{50}{}^0$ F., das heisst $4 . 10^4 = 40000$ Jahre nach Beginn der Krustenbildung betrug die Temperatur in 1 Fuss Tiefe 1^0; u. s. w.

$$3) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{V}{t\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} = -\frac{V}{t\sqrt{\pi}} z e^{-z^2}$$

stellt die Abkühlung dar. ze^{-z^2} wird ein Maximum, wenn die Ableitung

$$e^{-z^2} - 2z^2 e^{-z^2} = e^{-z^2}(1 - 2z^2) = o, \quad \text{also wenn} \quad z^2 = \frac{1}{2}$$

Für kleinere Werte von z^2 ist wegen $1 - 2z^2 > o$ die Ableitung $> o$; also wächst der vorgelegte Ausdruck bis zu dem Werte für $z^2 = \frac{1}{2}$; von da an nimmt er wieder ab.

Das Maximum der Abkühlung findet also nicht an der Oberfläche statt, sondern in derjenigen Tiefe, für welche

$$z^2 = \frac{x^2}{4kt} = \frac{1}{2}; \quad \text{also für} \quad x = 20\sqrt{2t} = 28\sqrt{t}$$

Der Fortschritt des Maximums der Abkühlung nach der Tiefe ist also proportional der Quadratwurzel aus der Zeit.

Heut nach 10^8 Jahren findet die grösste Abkühlung in einer Tiefe von $28 . 10^4$ Fuss $= 280000$ Fuss $= 89000$ Metern oder 11 Meilen

statt. 4.10^8 Jahre nach Anfang, also 3.10^8 Jahre nach heute, ist die grösste Abkühlung bis zu einer Tiefe von 22 Meilen vorgedrungen.

Es beträgt für 1 Jahr die heutige grösste Abkühlung, das heisst also die Abkühlung in einer Kugelschaale, welche sich in einer Tiefe von 11 Meilen unter der Oberfläche befindet:

$$\frac{V}{t\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{7000}{10^8 . 1{,}4 . \sqrt{\pi . 2{,}71828}} = \frac{1}{10^4 . 2 . 3} = \frac{1}{60000} {}^0 \text{ F.}$$

die betreffende Schaale kühlt sich jetzt in einem Jahre um $\frac{1}{60000}$ ^{0} F. ab.

Was kann nun die Folge einer solchen ungleichmässigen Abkühlung sein? Es ist anzunehmen, dass der innere Kern der Erde heute noch flüssig ist: denn wenn Thomson meint, dass die Erde von Innen heraus erstarrt sei, weil wohl anzunehmen, dass die Erdmassen beim Erstarren sich verdichtet haben, und dass sie in Folge dessen gesunken seien, so übersieht er, dass es sich nicht um eine, sondern um eine Reihe von Flüssigkeiten handelt; wenn diese sich nicht vollständig durchdrangen oder, um es anders auszudrücken, wenn sie sich nicht gegenseitig auflösten, so mussten sie sich je nach dem specifischen Gewichte in Schichten übereinander lagern, und es ist in dem Fall nicht anzunehmen, dass beim Erstarren die Verdichtung gross genug gewesen, um ein Untersinken hervorzubringen. Läge nun die Schicht der grössten Abkühlung innerhalb der Flüssigkeit, so könnte für den tiefer liegenden Kern keinerlei Wirkung daraus hervorgehen; es müsste aber zwischen dem flüssigen Kern und der festen Schaale ein hohler Raum entstehen, der um so grösser wäre, je näher die grösste Abkühlung der Oberfläche läge; die feste Schaale erschiene dann als eine Hohlkugel, die bei der geringen Krümmung, wenn sie nicht schon eine hinreichende Dicke erlangt hätte, zertrümmert werden müsste; die einzelnen Bruchstücke aber, da sie auf einen engeren Raum zusammengedrängt würden, müssten sich in mannigfaltiger Weise übereinander und gegen einander verschieben. Läge die Schaale der grössten Abkühlung innerhalb der festgewordenen Massen, aber noch in der Nähe des flüssigen Kerns, so müsste, wegen Incompressibilität des flüssigen Kerns die Schaale zerreissen, und die Flüssigkeit durch die Spalten hindurch gepresst werden; — läge sie weit ab vom flüssigen Kern, so brauchte ein Zerreissen nicht mehr einzutreten, weil die tieferen festen Schichten zusammengedrückt werden könnten; — in allen Fällen aber müssten die oberen Schichten nachsinken. Es wäre vielleicht möglich auf

diesem Wege die vulcanischen Erscheinungen an der Erdoberfläche, ihre Abnahme mit der Zeit, und die ganze Configuration der Erdoberfläche selber zu erklären.

Die Abkühlung war allgemein:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{V}{2\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{x}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

Ist a der mittlere Ausdehnungscoefficient der Erdmassen, so beträgt von x_1 bis x_2 die Ausdehnung während eines Jahres:

$$\int_{x_1}^{x^2} a \frac{dv}{dt} . dx = -\int_{x_1}^{x^2} \frac{aV}{2\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{x}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx$$

$$= \frac{aV}{2\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} . 2kt \left[e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right]_{x^1}^{x_2}$$

$$= aV\sqrt{\frac{k}{\pi t}} \left[e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right]_{x_1}^{x_2}$$

Für $x = 85000$ M.; $k = 37$; $t = 10^8$ war:

$$\frac{x^2}{4kt} = \frac{1}{2}$$

wird x doppelt so gross, so wird

$$\frac{x^2}{4kt} = 2$$

und so fort; also wird im ersten Fall

$$e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}718\ldots}}$$

im anderen

$$= \frac{1}{(2{,}718\ldots)^2}$$

Der Ausdruck $e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ nimmt also mit wachsendem x sehr schnell ab. Setzt man nun an der unteren Grenze $x_1 = o$, so wird

$$e^{-\frac{x^2}{4kt}} = 1$$

setzt man an der oberen Grenze $x_2 = r =$ dem Radius der Erde, so wird

$$e^{-\frac{x^2}{4kt}} = o$$

also wird die Ausdehnung des ganzen Erdradius

$$= -aV\sqrt{\frac{k}{\pi t}}$$

Nimmt man nun

$$a = \frac{1}{100000}$$

was etwa der Ausdehnung des Glases entspricht, so beträgt diese Verkürzung

$$\frac{7000}{100000} \sqrt{\frac{37}{\pi . 10^8}} \text{ M.} = \frac{1}{42000} \text{ Meter}$$

oder da der Erdradius im Mittel = 6367000 M., so beträgt die Verkürzung

$$\frac{1}{267414000000} \text{ vom Erdradius.}$$

Es mag noch der Einfluss erörtert werden, welchen diese ungleichmässige Contraction auf die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ausübt. Da äussere Kräfte nicht ins Spiel kommen, so muss die Winkelgeschwindigkeit dem Trägheitsmoment umgekehrt proportional sein.

Setzt man die mittlere Dichtigkeit der Erde = 1, so ist ihr Trägheitsmoment, wenn man sie wie früher als Kugel ansieht, $= \frac{8\pi}{15} . r^5$.

Das Differential dieses Ausdrucks nach r ist $\frac{8\pi}{3} . r^4 . dr$; das ist also das Trägheitsmoment einer Kugelschaale vom Radius r und von der Dicke dr; mithin das einer Schaale vom Radius $(r - x)$ und der Dicke dx: $\frac{8\pi}{3} . (r - x)^4 dx$

$$= \left[4\pi (r-x)^2 dx\right] \cdot \left[\frac{2}{3}(r-x)^2\right]$$

darin ist der erste Factor die Masse, die bei einer Contraction unverändert bleibt; der zweite aber, da die Contraction

$$= aV \sqrt{\frac{k}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

geht über in

$$\frac{2}{3}\left(r - x - aV \sqrt{\frac{k}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right)$$

Es geht also das Trägheitsmoment der ganzen Erde im Laufe eines Jahres über in

$$\int_0^r 4\pi (r-x)^2 dx . \frac{2}{3}\left(r - x - aV \sqrt{\frac{k}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right)^2$$

und man erhält somit die Gleichung

$$\frac{8\pi}{15} r^5 \varphi = \varphi^1 \int_0^r 4\pi (r-a)^2 \cdot \frac{2}{3} \left(r - x - a V \sqrt{\frac{k}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right)^2$$

wobei φ die Winkelgeschwindigkeit zu Anfang des Jahres, φ^1 die zu Ende des Jahres ist.

Das Trägheitsmoment zu Ende des Jahres ist also:

$$\frac{8\pi}{3} \int_0^r \left[(r-x)^4 - 2aV \sqrt{\frac{k}{\pi t}} (r-x)^3 e^{-\frac{x^2}{4kt}} + a^2 V^2 \frac{k}{\pi t} (r-x)^2 e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right] dx$$

$$= \frac{8\pi}{3} \left\{ \frac{r^5}{5} - 2aV \sqrt{\frac{k}{\pi t}} \left\{ r^3 \sqrt{\pi k t} - r^2 . 6kt + r . 6kt \sqrt{\pi k t} - 8k^2 t^2 \right\} \right.$$

$$\left. + a^2 V^2 \frac{k}{\pi t} \left\{ \frac{r^2}{2} \sqrt{2\pi k t} - r . 2kt + \frac{kt}{2} \sqrt{\pi k t} \right\} \right.$$

Dabei ist

$$\int_0^r e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx = \sqrt{\pi k t}$$

gesetzt; es ist zwar früher gezeigt, dass $e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ mit wachsendem x sehr schnell abnimmt, so dass zum Beispiel für $x = 850000$ Meter

$$e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{1}{e^{50}}$$

wird; indessen da unter anderen $r^3 \int_0^r e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx$ vorkommt, und $r > 6.10^6$, so könnte das Verfahren bedenklich erscheinen, um so mehr als das Intervall von r bis $\infty = \infty$. Es möge deshalb

$$r^3 \int_0^r e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx = r^3 \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx - r^3 \int_r^\infty e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx$$

gesetzt werden.

Es bleibt dann nur zu zeigen, dass $r^3 \int_r^\infty e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx$ verschwindend klein ist. Setzt man

$$\frac{x}{2\sqrt{kt}} = z; \quad dx = 2\sqrt{kt} . dz$$

so wird

$$r^3 \int_r^\infty e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx = 2\sqrt{kt}\,.\,r^3 \int_{\frac{r}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-z^2} dz < 2\sqrt{kt}\,.\,r^3 \frac{1}{\frac{r}{2\sqrt{\varkappa t}}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{kt}}}^\infty z e^{-z^2} dz$$

$$< 4ktr^2 \int_{\frac{r}{2\sqrt{kt}}}^\infty z e^{-z^2} dz < 2ktr^2 \Big[-e^{-z^2}\Big]_{\frac{r}{2\sqrt{kt}}}^\infty < 2ktr^2 e^{-\frac{r^2}{4kt}}$$

Nimmt man der oberflächlichen Schätzung wegen $r = 6.10^6$, so wird

$$\frac{r^2}{4kt} = \frac{36\,.\,10^{12}}{4.37\,.\,10^8} = \frac{10^4}{4} = 2500$$

also

$$2ktr^2 e^{-\frac{r^2}{4kt}} = 2663\,.\,10^{12} \frac{1}{e^{2500}}; \quad \log e = 0{,}4343; \quad \log e^{2500} = 1085{,}7\ldots$$

Es ist also das betreffende $\int_r^\infty < \frac{2664\,.\,10^{12}}{10^{1085}}$, und das erscheint wohl genügend klein, um es vernachlässigen zu können.

Das gefundene Trägheitsmoment setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment zu Anfang des Jahres und aus der Abnahme während des Jahres. Wertet man die Abnahme aus, wobei für r 6366740, für die anderen Constanten aber die früheren Werte zu nehmen sind, so findet man, dass diese Abnahme im Verhältniss zum ursprünglichen Trägheitsmoment $> \frac{61}{10^{14}}$ und $< \frac{62}{10^{14}}$.

Da das Trägheitsmoment der Winkelgeschwindigkeit, — die Winkelgeschwindigkeit aber der Taglänge umgekehrt proportional, so ergiebt sich, dass die Taglänge in einem Jahre der Gegenwart um weniger als $\frac{6}{10^8}$ Secunden, und in 3000 Jahren, welcher Zeitraum etwa der Geschichte der Menschheit entspricht, um weniger als $\frac{18}{10^5}$ Secunden abgenommen hat. Es erhellt daraus, wie sehr man berechtigt ist die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde als constant anzusehen, obgleich doch nie bezweifelt werden konnte, dass sie im Laufe der Zeit wachsen muss.

Schliesslich sei es erlaubt zu bemerken, dass die gefundenen Resultate keinen Anspruch auf Unumstösslichkeit machen sollen, oder auch, bei der Unsicherheit der Grundlagen machen können. Immerhin genügen sie, trotz aller Unsicherheit, um zu zeigen, dass so lange die Sonne uns unveränderlich ihre Alles belebenden Strahlen zusendet, auch der Oberflächenzustand der Erde im Ganzen als unveränderlich anzusehen ist.

XXII.

Rationale sphärische Dreiecke.

Von

Herrn Dr. **Franz Bessell,**
Professor an der Kgl. Hochschule in Hannover.

---

1. Wenn man sich erlaubt einen Winkel rational zu nennen, sobald sein Sinus und Cosinus es sind, so darf man auch sagen, ein Winkel sei rational gleichzeitig mit dem Tangens seiner Hälfte. Auch wird es zu Missverständnissen kaum Anlass geben können, wenn man einen solchen Hälften-Tangens mit demselben Buchstaben bezeichnet, wîe den Winkel selbst.

2. Ein sphärisches Dreieck heisst rational, wenn seine sämmtlichen Seiten und Winkel es sind. Um dergleichen zu finden, gestalten wir die Formeln der sphärischen Trigonometrie so um, dass wir sämmtliche darin auftretenden trigonometrischen Functionen durch die entsprechenden Hälften-Tangenten ersetzen.

3. Bezeichnen wir demnach nicht nur die Seiten und Winkel eines Dreiecks, sondern auch deren Hälften-Tangenten mit a, b, c, A, B, C, so erhalten wir zunächst für die Napierschen Gleichungen folgende vier:

$$A(B+C)(1-bc) = (1-BC)(1+bc)$$
$$A(B-C)(b+c) = (1+BC)(b-c)$$
$$a(1-bc)(1+BC) = (b+c)(1-BC)$$
$$a(1+bc)(B-C) = (b-c)(B+C)$$

Da jede derselben 5 Elemente enthält und in Bezug auf jedes Element linearisch ist, so folgt sofort, dass ein sphärisches Dreieck rational ist, sobald irgend 4 Elemente desselben es sind.

4. Um daher beliebige rationale Dreiecke zu finden, hat man nur nötig, irgend eine der 4 sogenannten Fundamental-Gleichungen, als welche jedesmal 4 Elemente mit einander verbinden, in rationalen Zahlen aufzulösen. Bevor wir jedoch darauf in allgemeinerer Weise eingehen, mögen einige Special-Fälle betrachtet werden, zu deren Erledigung das bisher Mitgeteilte ausreicht.

5. Für gleichschenklige Dreiecke hat man, wenn wir etwa $a = b$ und demnach $A = B$ nehmen,

$$c = \frac{2a}{1-aa} \cdot \frac{1-AA}{1+AA} \quad \text{und} \quad C = \frac{1+aa}{1-aa} \cdot \frac{1-AA}{2A}$$

6. Für Dreiecke, in welchen 2 Seiten und folgeweise auch 2 Winkel sich zu 180^0 ergänzen, kommt, indem wir $ab = 1$ und $AB = 1$ setzen,

$$c = \frac{1-aa}{2a} \cdot \frac{1+AA}{1-AA} \quad \text{und} \quad C = \frac{1-aa}{1+aa} \cdot \frac{2A}{1+AA}$$

7. Für Dreiecke, in welchen der sogenannte Modulus (das Sinus-Verhältniss) gleich 1 ist, findet sich, bei $A = a$ und $B = b$,

$$c = \frac{a+b}{1+ab} \quad \text{und} \quad C = \frac{1+ab}{a+b}$$

— Nebenbei bemerkt construirt man Dreiecke des Modulus 1 auf der Kugel sehr leicht dadurch, dass man in einem beliebigen Zweiecke die Entfernung der Mitten seiner beiden Seiten zwischen diesen irgend wie in der Weise verschiebt, dass die Endpunkte des verschobenen Bogens auf den Zweiecks-Seiten liegen bleiben. Auch kann man mit demselben Bogen eben so zwischen den Schenkeln des andern Zweiecks verfahren, welches das erstere zur Halbkugel ergänzt. —

8. Wenden wir uns zur allgemeinen Aufgabe. — Die 4 Fundamental-Formeln der sphärischen Trigonometrie, in der oben angedeuteten Weise umgestaltet sind folgende:

$$(aa+1)(BB+1)Ab = (AA+1)(bb+1)aB$$

$$aa(1+bbcc)(1+AA)+2aabc(1-AA) = (bb+cc)(1+AA)-2bc(1-AA)$$

$$AA(BB+CC)(1+aa)+2AABC(1-aa) = (1+BBCC)(1+aa) - 2BC(1-aa)$$

$$(a+b)(1-ab)ACC = (a-b)(1+ab)A+a(1+bb)(1-AA)C.$$

9. Eine wirklich vollständige d. i. sämmtliche möglichen Fälle ohne Ausnahme abgebende Lösung in rationalen Zahlen ist zwar zur

Zeit wohl für keine der vorliegenden 4 Diophantischen Gleichungen zu erreichen, aber als Surrogat dafür leicht zu finden ist eine ganz stattliche Reihe von sogenannten particularen allgemeinen Lösungen. Dies sind solche, deren jede eine unendliche Menge Einzel-Fälle (jedoch keineswegs alle möglichen) in sich schliesst, insofern nämlich als die Auflösungs-Formeln willkürliche Zahlen enthalten.

10. Betreffs der ersten der 4 Gleichungen in Nr. 8 (der Repräsentantin der Gleichung der Sinus-Verhältnisse) habe ich nur eine einzige, aber dafür auch sehr bequem gestaltete particulare Lösung entdecken können. Darin bleiben 2 Seiten (oder auch, wenn man will, 2 Winkel, ganz beliebig. Seien dies etwa a und b. Alsdann darf man setzen:

$$A = \frac{2a(b^2-1)}{(a^2-1)(b^2+1)} \quad \text{und} \quad B = \frac{(a^2+1)(b^2-1)}{2b(a^2-1)}$$

woraus sich weiter mittels der Gleichungen in Nr. 3 ergiebt:

$$c = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{4ab+(a^2+1)(b^2+1)}{4ab-(a^2+1)(b^2+1)} \quad \text{und} \quad C = \frac{(b-a)(1+ab)}{(b^2-1)(a^2-1)}$$

Numerisches Beispiel:

$$a = \tfrac{1}{5}, \quad b = \tfrac{1}{2}, \quad c = \tfrac{17}{33}, \quad A = \tfrac{1}{4}, \quad B = \tfrac{13}{16}, \quad C = \tfrac{11}{12}.$$

Wollte man statt der Seiten die Winkel A und B als gegeben ansehn, so braucht man nur die grossen Buchstaben mit den entsprechenden kleinen zu vertauschen und zugleich jede dieser 4 Zahlen durch ihre Reciproke zu ersetzen. — Uebrigens bemerkt man leicht, dass diese Formeln zu keinem eigentlich brauchbaren Resultate führen, wenn man eines der willkürlichen Elemente 90^0 sein lässt.

11. Eine reichere Ausbeute als die erste gewähren die mittleren beiden Gleichungen der Nr. 8; doch genügt es eine davon zu betrachten, aus demselben Grunde wie der so eben unter Nr. 10 angedeutete. Wir wählen dazu die erste und schreiben dieselbe in folgender Form:

$$a^2 = \frac{b^2-2bc\cos A+c^2}{1+2bc\cos A+b^2c^2}$$

oder, indem wir noch etwas mehr kürzend $\cos A = k$ setzen, so:

$$a^2 = \frac{b^2-2bck+c^2}{1+2bck+b^2c^2}$$

12. Eine vollständige allgemeine Lösung dieser Gleichung würde etwa verlangen, dass man bei gegebenem

$$k = \frac{1 - AA}{1 + AA}$$

die Zahlen b und c so bestimme, dass der dem aa gleichgestellte Bruch ein Quadrat sei. Wir beschränken hier diese Forderung dahin, dass sowohl der Zähler als der Nenner jenes Bruchs, jeder für sich genommen ein Quadrat werde. Dazu ist nötig, dass man habe sowohl

$$b = (m^2 - n^2)u, \qquad c = -2n(m + kn)u$$
$$bc = (\mu^2 - \nu^2)v, \qquad 1 = -2\nu(\mu - k\nu)v$$

wo nun m, n, u und μ, ν, v rationale Zahlen bedeuten sollen, und zwar u und v vollkommen willkürliche, während die Paare m, n und μ, ν so zu wählen sind, dass werde

$$u^2(m + kn)n(m^2 - n^2) = v^2(\mu - k\nu)\nu(\mu^2 - \nu^2).$$

13. Die Lösung dieser Diophantischen Gleichung ist die Hauptsache; und zwar darf man sich dabei auf ganze Zahlen beschränken. Wir fassen diese Aufgabe auf als einen speciellen Fall folgende allgemeinere:

$$u^2(\alpha_1 m + \beta_1 n)(\alpha_2 m + \beta_2 n)(\alpha_3 m + \beta_3 n)(\alpha_4 m + \beta_4 n) = v^2(\gamma_1 \mu + \delta_1 \nu) \times (\gamma_2 \mu + \delta_2 \nu)(\gamma_3 \mu + \delta_3 \nu)(\gamma_4 \mu + \delta_4 \nu)$$

und setzen irgend 3 der linksseitigen Factoren $\alpha m + \beta n$ einzeln genommen irgend einem von dreien der rechtsseitigen $\gamma\mu + \delta\nu$ proportional, etwa

$$\alpha_1 m + \beta_1 n = p(\gamma_1 \mu + \delta_1 \nu), \qquad \alpha_2 m + \beta_2 n = q(\gamma_2 \mu + \delta_2 \nu),$$
$$\alpha_3 m + \beta_3 n = r(\gamma_3 \mu + \delta_3 \nu)$$

wodurch sich die gegebene Gleichung auf die einfache lineare Form

$$u^2 pqr(\alpha_4 m + \beta_4 n) = v^2(\gamma_4 \mu + \delta_4 \nu)$$

reducirt, die nunmehr in Verbindung mit irgend zweien der eben geschriebenen hinreicht, um sowohl das Paar m, n als das Paar μ, ν zu bestimmen. Dabei sind die 3 Proportionalitäts-Factoren p, q, r an einander gebunden durch die 2 Relationen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 p \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 q \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 r \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\delta_1 p \\ \alpha_2\beta_2\delta_2 q \\ \alpha_3\beta_3\delta_3 r \end{vmatrix} = 0$$

und daher ist ihr Verhältniss folgendes:

$$p : q : r = \left\{\begin{vmatrix} \gamma_2\delta_2 \\ \gamma_3\delta_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}\right\} : \left\{\begin{vmatrix} \gamma_3\delta_3 \\ \gamma_1\delta_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_3\beta_3 \\ \alpha_1\beta_1 \end{vmatrix}\right\} : \left\{\begin{vmatrix} \gamma_1\delta_1 \\ \gamma_2\delta_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix}\right\}$$

Beispiel. Nimmt man in der vorliegenden Gleichung (Nr. 12, am Ende) als die 3 linksseitigen Factoren diese $m+kn$, n, $m+n$ und als die rechtsseitigen $\mu-k\nu$, ν, $\mu+\nu$ und zwar auch in der hier stehenden Ordnung, setzt somit

$$m+kn=p(\mu-k\nu),\quad n=q\nu,\quad m+n=r(\mu+\nu)$$

so können diese 3 Proportionalitäten gleichzeitig nur bestehen, wenn

$$p:q:r=(1-k):(1+k):(1-k)$$

Setzt man daher

$$p=(1-k)\lambda,\quad q=(1+k)\lambda,\quad r=(1-k)\lambda$$

wo λ einen neuen willkürlichen Proportionalitätsfactor bedeutet, so kommt

$$u^2\lambda^3(1-k)^2(1+k)(m-n)=v^2(\mu-\nu)$$

Da aber

$$n=\nu(1+k)\lambda \quad \text{und} \quad m+n=(\mu+\nu)(1-k)\lambda$$

also

$$m-n=[\mu(1-k)-\nu(1+3k)]\lambda$$

ist, so erhält man zur Bestimmung des Verhältnisses des Paars μ, ν die lineare Gleichung

$$u^2\lambda^4(1-k)^2(1+k)\{\mu(1-k)-\nu(1+3k)\}=v^2(\mu-\nu)$$

Setzen wir also etwa direct d. i. ohne Heranziehung eines neuen Factors

$$\mu=u^2\lambda^4(1-k)^2(1+k)(1+3k)-v^2 \quad \text{und} \quad \nu=u^2\lambda^4(1-k)^3(1+k)-v^2$$

so ergiebt sich weiter

$$m=u^2\lambda^5(1-k)^3(1+k)^2-v^2\lambda(1-3k) \quad \text{und}$$
$$n=u^2\lambda^5(1-k)^3(1+k)^2-v^2\lambda(1+k)$$

Numerisch sei

$$k=\tfrac{3}{5},\quad \lambda=5,\quad u=\tfrac{1}{4},\quad v=1$$

so kömmt

$$\mu=27,\quad \nu=3,\quad m=36,\quad n=24$$

Und in der Tat ist

$$\tfrac{1}{16}\,.\,(36+\tfrac{72}{5})\,.\,24\,.\,60\,.\,12=1\,.\,(27-\tfrac{9}{5})\,.\,3\,.\,30\,.\,24$$

14. Hat man ein Paar geeigneter Zahlenpaare m, n und μ, ν gefunden, so sind die daraus resultirenden Dreiecks-Seiten

$$b=\frac{m^2-n^2}{2\nu(\mu-k\nu)}\cdot\frac{u}{v}=\frac{\mu^2-\nu^2}{2n(m+kn)}\cdot\frac{v}{u}$$

$$c = \frac{n(m+kn)}{\nu(\mu-k\nu)} \cdot \frac{u}{v} = \frac{\mu^2-\nu^2}{m^2-n^2} \cdot \frac{v}{u}$$

$$a = \frac{m^2+2kmn+n^2}{\mu^2-2k\mu\nu+\nu^2} \cdot \frac{u}{v}$$

Sollte ein b oder c negativ ausfallen, so kann man solches durch seine entgegengesetzte Reciproke ersetzen, was einer Verminderung des betreffenden Bogens um 180^0 gleich kommt. Die beiden noch übrigen Elemente B und C bestimmt man entweder aus den Napierschen Analogien:

$$B = A \cdot \frac{abc-a+b+c}{abc+a-b+c} \quad \text{und} \quad C = A \cdot \frac{abc-a+b+c}{abc+a+b-c}$$

oder wohl eben so bequem und wegen der damit verbundenen Controle besser aus:

$$B^2 = \frac{(a-c)^2-b^2(1+ac)^2}{b^2(1-ac)^2-(a+c)^2} \quad \text{und} \quad C^2 = \frac{(a-b)^2-c^2(1+ab)^2}{c^2(1-ab)^2-(a+b)^2}$$

Numerisch benutzen wir das am Schluss von Nr. 13 hingestellte Beispiel, in welchem überdies selbstverständlich der gemeinschaftliche Factor 3 der 4 Zahlen m, n, μ, ν zu unterdrücken ist. Man findet dann

$$a = \tfrac{101}{89}, \quad b = \tfrac{25}{21}, \quad c = 4; \quad A = \tfrac{1}{2}, \quad B = \tfrac{85}{84}, \quad C = \tfrac{208}{41}.$$

15. Weil sich die 4 Factoren jeder Seite der Gleichung am Schluss von Nr. 12 oder vielmehr derjenigen am Anfang von Nr. 13 auf 4 verschiedene Weisen zu dreien zusammenstellen und überdies jede solche Zusammenstellung auch noch eine Permutation ihrer 3 Elemente gestattet, so lässt sich die vorliegende Diophantische Aufgabe im Allgemeinen auf $4 \times 4 \times 6$ also 96 verschiedene Weisen lösen. Einige derselben mögen hier noch Platz finden.

Die einfachste ist wohl die aus den 3 Positionen

$$n = \nu, \quad m+n = \mu+\nu, \quad m-n = \mu-\nu$$

hervorgehende, welche führt zu den Werte-Paaren

$$m = \mu = k(u^2+v^2) \quad \text{und} \quad n = \nu = v^2-u^2$$

Aber sie leidet an demselben Uebelstande, wie der am Schluss von Nr. 10 an den dortigen Formeln gerügte, nämlich keine Anwendung auf rechtwinklige Dreiecke zu gestatten; denn wenn man $A = 1$, also $k = 0$ setzt, so wird $b = \infty$, also der Bogen $b = 180^0$.

16. Von dem Uebelstande frei sind unter andern folgende Fälle:

I. $m+kn=\mu+\nu,\quad m-n=\mu-k\nu,\quad n=\nu,$ woraus

$$m=u^2+(2-k)v^2,\quad \mu=(2-k)u^2+v^2,$$
$$n=v^2-u^2,\quad \nu=v^2-u^2.$$

II. $m+kn=\mu-\nu,\quad m+n=\mu-k\nu,\quad n=\nu,$

$$m=u^2+(2+k)v^2,\quad \mu=(2+k)u^2+v^2,$$
$$n=u^2-v^2,\quad \nu=u^2-v^2.$$

III. $m+kn=\mu+\nu,\quad m+n=\mu-k\nu,\quad n(k-1)=\nu(k+1),$

$$m=v^2(2-3k+2k^2-k^3)-u^2(1+k)^2,\quad \mu=v^2(1-k)^2-u^2(2+3k+2k^2+k^3),$$
$$n=v^2(k^2-1)-u^2(1+k)^2,\quad \nu=v^2(1-k)^2+u^2(1-kk).$$

IV. $2(m+kn)=\mu+\nu,\quad 2(m+n)=\mu-\nu,\quad n(k-1)=\nu,$

$$m=u^2-4v^2(1+k-3k^2+k^3),\quad \mu=u^2(3+k)-v^2k(k-1)^2,$$
$$n=u^2-8v^2(k-1),\quad \nu=u^2(k-1)-8v^2(k-1)^2.$$

V. $m+kn=\nu,\quad 2(m+n)=\mu+\nu,\quad 2n(1-k)=\mu-\nu,$

$$m=4v^2(2-3k+k^3)+u^2,\quad \mu=8v^2k(k-1)^2+u^2(3-k),$$
$$n=v^2-4u^2(k-1)^2,\quad \nu=8v^2(k-1)^2+u^2(1+k).$$

VI. $m+n=\mu-k\nu,\quad m-n=\mu-\nu,\quad 2n=\nu(1-k),$

$$m=v^2(6+2k)+u^2k(1-k^2),\quad \mu=u^2(1-k+k^2-k^3)+4v^2,$$
$$n=2v^2(k-1)+u^2(k-1)^2,\quad \nu=2u^2(1-k)-4v^2.$$

VII. $m+n=-\mu+\nu,\quad m-n=-\mu+k\nu,\quad 2n=\nu(1-k),$

$$m=2v^2(3+k)-u^2(k-1)^2k,\quad \mu=u^2(1+k-3k^2+k^3)-4v^2,$$
$$n=2v^2(1-k)+u^2(1-k)^2,\quad \nu=2u^2(1-k)+4v^2.$$

VIII. $m+n=\mu+\nu,\quad m-n=2\nu,\quad 2n=\mu-\nu,$

$$m=v^2(3+k)-2ku^2,\quad \mu=2kv^2+(3-k)u^2,$$
$$n=v^2(k-1)+2u^2,\quad \nu=2v^2-(1+k)u^2.$$

IX. $m+n=2\nu,\quad m-n=-\mu+\nu,\quad 2n=\mu+\nu,$

$$m=v^2(3-k)+2ku^2,\quad \mu=2kv^2-(3+k)u^2,$$
$$n=v^2(k+1)-2u^2,\quad \nu=2v^2-(1-k)u^2.$$

X. $m+kn=-(k+1)(k-1)^2(\mu+\nu),\quad m-n=4(k-1)(\mu-\nu k),$

$$m-n=2(k+1)^2(\mu-\nu),$$
$$m=v^2(-1+4k+k^2)-32u^2(k^2-1)^5,\quad \mu=v^2+8u^2(k^2-1)^3(1+4k-k^2),$$
$$n=-v^2(3+k^2),\quad \nu=8u^2(k^2-1)^3(3+k^2).$$

17. Eine kleine Sammlung von rationalen sphärischen Dreiecken, wovon einige noch auf anderweitigen Wegen, als hier mitgeteilt, gefunden sind.

a	b	c	A	B	C	a	b	c	A	B	C
$\frac{29}{37}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{17}{28}$	$\frac{25}{39}$	$\frac{197}{159}$	$\frac{72}{35}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{96}{35}$	$\frac{58}{221}$
$\frac{28}{17}$	$\frac{32}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{37}{29}$	$\frac{58}{221}$	$\frac{35}{96}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{159}{197}$
$\frac{73}{122}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{58}{33}$	$\frac{85}{41}$	$\frac{339}{593}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{21}{23}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{97}{240}$	$\frac{483}{322}$
$\frac{33}{58}$	$\frac{63}{61}$	$\frac{24}{11}$	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{73}{122}$	$\frac{89}{101}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{26}{73}$	$\frac{23}{74}$	$\frac{7}{40}$	1	$\frac{23}{37}$	$\frac{350}{1201}$	$\frac{829}{901}$	$\frac{100}{91}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{193}{401}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{8}{19}$	1	$\frac{119}{375}$	$\frac{233}{152}$	$\frac{281}{317}$	$\frac{169}{133}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$		
$\frac{673}{809}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{99}{35}$	1	$\frac{676}{809}$	$\frac{8001}{20225}$		$\frac{1156}{931}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{5}$		
$\frac{113}{74}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{89}{21}$	$\frac{41}{50}$	$\frac{111}{85}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{33}{19}$			
$\frac{218}{233}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{113}{195}$	$\frac{106}{119}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{33}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{111}{85}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{33}{19}$	1			5	7		$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{7}$	
$\frac{73}{51}$	$\frac{28}{3}$	$\frac{9}{13}$	1			$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{73}{35}$	$\frac{25}{77}$	$\frac{14}{5}$	1			$\frac{125}{194}$	$\frac{56}{31}$	$\frac{17}{16}$	1		
$\frac{137}{152}$	$\frac{32}{143}$	$\frac{13}{4}$	1			$\frac{73}{51}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{13}{9}$	1		
$\frac{233}{152}$	$\frac{128}{247}$	$\frac{19}{8}$	1			$\frac{113}{58}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{14}$	1		

18. Zum Schluss darf ich wohl noch erwähnen, dass im 61. Bande des Grunertschen Archivs pag. 86 ff. Herr Hoppe zwei Wege angegeben hat, wie man aus einem gegebenen rationalen Dreiecke neue in unbegrenzter Anzahl ableiten kann, und auch die betreffenden Formeln hier wiederholen. Unterscheidet man die Elemente der abzuleitenden Dreiecke von einander und von denen des Originals durch beigefügte Indices, so hat man zu setzen

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad A_1 = \frac{1}{A} \quad B_1 = B,$$

$$c_1 = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{1+AB}{1-AB}, \quad C_1 = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{A+B}{1-AB},$$

und

$$a_2 = a, \quad b_2 = A, \quad A_2 = b, \quad B_2 = B,$$

$$c_2 = \frac{a-A}{a+A} \cdot \frac{1+Bb}{b-B}, \quad C_2 = \frac{a-A}{1+aA} \cdot \frac{b+B}{b-B}.$$

Jeder von beiden Rechnungsweisen entspricht eine einfache geometrische Construction. Um solche möglichst kurz beschreiben zu können, bedienen wir uns folgender Redeweise. Wir sagen von einer begrenzten Linie, sie w a n d e l e zwischen zwei unbegrenzten Linien, wenn sie mit je einem Endpunkte in einer der beiden letztern sich befindet und nun sich abwechselnd um den einen und den andern

Endpunkt sich (bei unveränderter Grösse und Gestalt) dreht, so lange bis der bewegte Endpunkt wieder in seine Linie trifft. Wären z. B. die beiden Wege ein Paar Parallelen und die wandelnde eine gerade Strecke, so entstünde auf diese Weise eine Reihe von zusammenhängenden gleichschenkligen Dreiecken, wovon je 2 benachbarte immer einen Schenkel gemein haben, während ihre Basen abwechselnd auf der einen und der andern Parallele liegen. — Hiernach kann man die erste der erwähnten zwei Constructionen folgendermassen in Worte kleiden: „Wenn man eine Seite eines rationalen Dreiecks zwischen den Schenkeln ihres Gegenwinkels wandeln lässt, so bildet sie mit diesen in allen ihren möglichen Lagen wiederum rationale Dreiecke und zwar besitzen alle diese Dreiecke einen und denselben Modulus.“ Auch die einzelnen dabei entstehenden gleichschenkligen Dreiecke sind rational. — Die zweite Construction geht aus der beschriebenen hervor, wenn man anstatt einer Seite von einem ihrer Endpunkte aus den an ihrem andern Endpunkte gelegenen Winkel oder vielmehr dessen Bogen-Maass wandeln lässt.

19. Selbstverständlich gilt letztgenannter Satz auch für ebene rationale Dreiecke; so wie auch die Anfangs (Nr. 3, 8, 11) gegebenen Formeln für solche gelten, wenn man darin a, b, c unendlich klein werden lässt. Am einfachsten erledigt sich übrigens die Aufgabe, rationale ebene Dreiecke herzustellen, durch die Bemerkung, dass es genügt irgend zwei Winkel A, B eines ebenen Dreiecks rational zu machen, damit der dritte es auch sei, nämlich

$$C = \frac{1 - AB}{A + B}.$$

Appendix.

1. Wenn man zwischen den Schenkeln eines ebenen Winkels vom Scheitelpunkte aus eine beliebige gerade Strecke wandeln lässt und der Winkel ist ein aliquoter Teil der Halb-Ebene, etwa $\varphi = \frac{180^0}{n}$, so trifft beim $n$ten Schnitte der zur Zeit bewegliche Endpunkt der Strecke in den Scheitelpunkt zurück. Man erkennt dies sofort daraus, dass die an der wandelnden Strecke gelegenen Winkel sämmtlich Vielfache von φ und zwar der Reihe nach das 1, 2, 3fache etc. sind.

Hierin steckt nicht nur ein einfacher Beweis des Satzes, dass die Summe des Cosinus der Vielfachen solcher Winkel Null ist, sondern diese Summe zerfällt auch von selbst in zwei Teile, von

denen jeder für sich Null ist. Der eine liegt auf dem einen, der andre auf dem andern Schenkel.

Ausserdem lässt sich dies Verfahren, auch wenn der Winkel kein aliquoter Teil der Ebene ist, allenfalls zur Messung desselben verwenden, indem man dann zu wandeln aufhört bei einem Schnitte, der möglichst nahezu in den Scheitelpunkt führt. Hierbei ist darauf zu achten, wie viele Male die wandelnde Strecke den Scheitelpunkt passirt. Geschieht dies m Male und ist der nahe zu Null führende Schnitt der $n$te, so ist der Winkel nahezu $= m.180^0 : n$. — Diese Operation ist insofern interessant, als dabei die Winkel-Schenkel quasi als Kreis-Peripherie behandelt werden.

2. Bildet man eine Reihe von Zahlen nach dem Gesetz, dass jede dritte (c) aus den beiden vorhergehenden (a, b) hervorgeht in Gemässheit der Formel $c = \frac{a+b}{1+ab}$, so constituiren je 3 auf einander folgende derselben ein rationales sphärisches Dreieck des Modulus 1.

Nimmt man insbesondere die ersten beiden Glieder der Reihe einander gleich ($a = b$), so wird die Reihe:

$$a, \quad a, \quad \frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{(a+1)^2+(a-1)^2}, \quad \frac{(a+1)^3+(a-1)^3}{(a+1)^3-(a-1)^3}, \quad \frac{(a+1)^5+(a-1)^5}{(a+1)^5-(a-1)^5},$$

$$\frac{(a+1)^8-(a-1)^8}{(a+1)^8+(a-1)^8}$$

etc. Die Exponenten sind die Glieder der Reihe des goldenen Schnitts 1, 2, 3, 5, 8, 13 etc. und die Zeichen sind im Zähler + für ungerade Werte der Exponenten, — für gerade. Umgekehrt ist's im Nenner.

XXIII.

Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen.

Von

R. Hoppe.

Auf rein analytischem Grunde lassen sich die Anfangsgründe der Curventheorie, namentlich die Construction der den Lauf der Curven bestimmenden linearen Gebilde und die Variation der ihre Lage bestimmenden Grössen auf beliebig vielfache Mannichfaltigkeit erweitern. Die Gesetze des Fortschritts sind so einfach, dass durch sie die Beziehung der Raumcurven zu den ebenen Curven eine instructive Beleuchtung empfängt, indem dieser Uebergang sich als Anfang einer leicht zu übersehenden unbegrenzten Reihe darstellt.

In Betreff der Nomenclatur erwähne ich, dass ich, wie in meinem frühern Aufsatz T. LXIV. p. 189, ein Gebilde linear nenne, wenn die Variation der Coordinaten der in ihm enthaltenen Punkte nur durch lineare Relationen beschränkt ist, dass ich hingegen die Bezeichnung „eben" in diesem allgemeinen Sinne als collidirend verwerfe. Ebenso halte ich auch den Gebrauch des Wortes „Raum" in seinem empirischen speciellen Sinne aufrecht, lasse demnach weder krumme noch mehr als dreifach ausgedehnte Räume gelten. Um gleichwol für die Begriffserweiterungen kurze Ausdrücke zu gewinnen, wende ich die nicht misszuverstehenden Wörter „$n$dehnung" und „$n$dehnig" an. Hiernach heisst Ebene eine lineare Zweidehnung, Raum eine lineare Dreidehnung.

Die Curventheorie erweitere ich hier nur auf eine vierfache Mannichfaltigkeit; die Anwendbarkeit des gleichen Verfahrens auf mehr Dimensionen wird wol zur Genüge erhellen.

§. 1. Die Curve, ihre bestimmenden Grössen und Gebilde.

Es sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem der $x x_1 x_2 x_3$ angenommen. Grossenteils kann ein Buchstab x alle 4 Zeichen repräsentiren. Wir wenden daher die Indices 1, 2, 3, bei x und andern Buchstaben, welche auf die 4 Axen Bezug haben, nur an, wenn die Unterscheidung notwendig ist, schreiben auch stets ΣN für $N + N_1 + N_2 + N_3$.

Zwei consecutive Curvenpunkte (x) und $(x + \partial x)$ bestimmen durch die finale Richtung ihrer Verbindung eine Gerade, die Tangente, mit den Richtungscosinus f.

Zwei consecutive Tangenten f und $f + \partial f$ bestimmen durch die finale Stellung einer durch erstere parallel der letztern gelegten Ebene eine Ebene, die Schmiegungsebene.

Zwei consecutive Schmiegungsebenen bestimmen gleicherweise einen Raum, den Schmiegungsraum.

In der Schmiegungsebene steht normal zur Tangente die Hauptnormale, im Schmiegungsraume normal zur Schmiegungsebene die Binormale, auf dem Schmiegungsraume normal die Trinormale.

Die consecutiven Tangenten bilden einen Winkel $\partial\tau$, die consecutiven Trinormalen einen Winkel $\partial\varkappa$, und τ und $\varkappa$ heissen der erste und dritte Krümmungswinkel. Accente sollen die Differentiation nach τ bezeichnen.

Es sind nun die Richtungen der 4 orthogonalen Geraden, Tangente, Haupt-, Bi- und Trinormale nebst ihren Variationen zu bestimmen. Bezeichnet

$$\partial s = \sqrt{\Sigma \partial x^2}$$

das Curvenelement, so ist der Richtungscosinus der Tangente

$$f = \frac{\partial x}{\partial s}$$

Die daraus hervorgehende Gleichung

$$\Sigma f^2 = 1$$

differentiirt giebt:

$$\Sigma f \partial f = 0$$

daher ist die Gerade, deren Richtungscosinus den ∂f proportionirt sind, normal zur Tangente. Ausserdem liegt sie in der Schmiegungsebene; denn, sind deren Gleichungen:

$$\Sigma A(\xi - x) = 0; \quad \Sigma B(\xi - x) = 0$$

so ist

$$\Sigma Af = 0; \quad \Sigma Bf = 0; \quad \Sigma A(f + \partial f) = 0; \quad \Sigma B(f + \partial f) = 0$$

woraus:

$$\Sigma A\partial f = 0; \quad \Sigma B\partial f = 0$$

Folglich ist diese Gerade nach Definition die Hauptnormale.

Nun ist

$$\partial\tau^2 = 4\sin^2\frac{\partial\tau}{2} = 2 - 2\cos\partial\tau =$$

$$= \Sigma f^2 + \Sigma(f+\partial f)^2 - 2\Sigma f(f+\partial f) = \Sigma\partial f^2$$

folglich

$$\Sigma f'^2 = 1$$

und die f' sind die Richtungscosinus der Hauptnormale. Die der Binormale mögen g, die der Trinormale h sein.

Die Binormale liegt in dem von 3 consecutiven Tangenten bestimmten Raume, dessen Gleichung also ist

$$\begin{vmatrix} f & f' & f'' & \xi - x \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = 0$$

daher ist

$$\begin{vmatrix} f & f' & f'' & g \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$g = \lambda f + \mu f' + \nu f'' \tag{1}$$

wo λ, μ, ν unabhängig von der Coordinatenaxenstellung sind. Mit Anwendung auf alle 4 Axen erhält man:

$$0 = \Sigma f'g = \lambda\Sigma ff' + \mu\Sigma f'^2 + \nu\Sigma f'f''$$

oder wegen

$$\Sigma ff' = 0; \quad \Sigma f'^2 = 1; \quad \Sigma f'f'' = 0$$

$\mu = 0$, und Gl. (1) giebt:

$$f'' = \frac{g - \lambda f}{\nu} \tag{2}$$

Ferner ist

$$\Sigma ff'' = \Sigma(ff')' - \Sigma f'^2 = -1$$

also nach dem Vorigen

$$-1 = \Sigma f \frac{g - \lambda f}{\nu} = -\frac{\lambda}{\nu}$$

oder $\lambda = \nu$, und Gl. (2) wird

$$f'' = \frac{g}{\nu} - f$$

Hiernach variirt ein Punkt auf der Hauptnormale momentan in der Ebene zwischen der Tangente und Binormale, die Hauptnormale verbleibt also innerhalb des Schmiegungsraums. Aus der Theorie der Raumcurven ist aber bekannt, dass

$$f'' = g\vartheta' - f \tag{3}$$

und ϑ der Torsionswinkel ist; diesen nennen wir hier den zweiten Krümmungswinkel. Dieselbe Gleichung (3), die wir auf dem Schmiegungsraum anwenden dürfen, gilt also auch hier, und ν ist $= \frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}$.

Die Variationen von g uud h ergeben sich nun einfach. Zerlegt nach den 4 orthogonalen Richtungen müssen sie die Form haben:

$$g' = \alpha f + \beta f' + \gamma g + \delta h \tag{4}$$

$$h' = \alpha_1 f + \beta_1 f' + \gamma_1 g + \delta_1 h \tag{5}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$0 = \Sigma g g' = \gamma; \quad 0 = \Sigma h h' = \delta_1$$

$$\Sigma f g' = \Sigma(fg)' - \Sigma f' g = 0 = \alpha$$

$$\Sigma f h' = \Sigma(fh)' - \Sigma f' h = 0 = \alpha_1$$

$$\Sigma f' g' = \Sigma(f'g)' - \Sigma f'' g = -\Sigma(g\vartheta' - f)g = -\vartheta' = \beta$$

$$\Sigma f' h' = \Sigma(f'h)' - \Sigma f'' h = -\Sigma(g\vartheta' - f)h = 0 = \beta_1$$

Jetzt hat sich Gl. (5) reducirt auf

$$h' = \gamma_1 g$$

Da nun

$$\partial\varkappa^2 = \Sigma\partial h^2 \tag{6}$$

ist, so folgt:

$$\gamma_1^2 = \varkappa'^2; \quad \gamma_1 = \pm\varkappa'$$

Wir wählen das untere Zeichen; dann wird

$$h' = -g\varkappa' \tag{7}$$

und infoge dessen

$$\Sigma h g' = \Sigma(gh)' - \Sigma g h' = \varkappa' = \delta$$

so dass Gl. (4) sich reducirt auf

$$g' = h\varkappa' - f'\vartheta' \tag{8}$$

Die Differentialformeln für die Richtungscosinus der begleitenden Axen lauten also:

$$\left.\begin{aligned} \partial f &= f'\partial\tau \\ \partial f' &= g\partial\vartheta - f\partial\tau \\ \partial g &= h\partial\varkappa - f'\partial\vartheta \\ \partial h &= \quad -g\partial\varkappa \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Der regelmässige Fortschritt fällt hier in die Augen; es zeigt sich, dass das gewählte Vorzeichen von $\partial\varkappa$ zur Formgleichheit notwendig ist. Ueberdies ist die Reihenfolge der begleitenden Axen, die wir deshalb mit (1) (2) (3) (4) numeriren, und die der Krümmungswinkel τ, ϑ, $\varkappa$ festzuhalten.

Unter den 6 Hauptebenen, welche die 4 begleitenden Axen verbinden, zeichnen sich die beiden (1, 2) und (3, 4) dadurch aus, dass sie momentan um je eine Gerade rotiren, während die 4 übrigen nur einen Punkt mit der Consecutiven gemein haben. Die Schmiegungsebene

$$(1,\ 2) \quad \Sigma g(\xi - x) = 0; \quad \Sigma h(\xi - x) = 0$$

nämlich liegt mit ihrer Consecutiven

$$\Sigma(g + h\partial\varkappa - f'\partial\vartheta)(\xi - x) = 0; \quad \Sigma(h - g\partial\varkappa)(\xi - x) = 0 \tag{10}$$

im Schmiegungsraume

$$\Sigma h(\xi - x) = 0 \tag{11}$$

und schneidet sie in der Geraden

$$\Sigma f'(\xi - x) = 0; \quad \Sigma g(\xi - x) = 0; \quad \Sigma h(\xi - x) = 0$$

d. i. in der Tangente. Sie bildet daher mit ihr einen Winkel, denselben wie die Normalen beider Ebenen im Schmiegungsraume. Die Normale der Urebene (1, 2) ist bekannt als Binormale, nicht aber die der Consecutiven (10). Hier ist erst die allgemeine Aufgabe zu lösen: ein Lot auf eine gegebene Ebene analytisch zu bestimmen.

Die gegebene Ebene sei

$$\Sigma Ax = 0; \quad \Sigma Bx = 0 \tag{12}$$

Alle Räume, in welchen sie liegt, umfasst die Gleichung:

$$\Sigma(\lambda A + \mu B)x = 0 \tag{13}$$

Die Normale eines Raumes ist auch Normale aller in ihm enthaltenen Ebenen, und umgekehrt ist jede Normale einer Ebene auch Normale irgend eines Raumes, in welchem die Ebene liegt. Folglich umfasst die Normale des Raumes (13) für variirende λ, μ genau alle Normalen

der Ebene (12). Ihre Richtungscosinus sind proportional $\lambda A + \mu B$, und wenn man die Variation von λ, μ durch die Relation

$$\Sigma(\lambda A + \mu B)^2 = 1 \tag{14}$$

beschränkt, so sind die Richtungscosinus der gesuchten Normalen der Ebene (12)

$$= \lambda A + \mu B \tag{15}$$

wo λ, μ von 1 Willkürlichen abhangen.

In Anwendung auf die Ebene (10), wo

$$A = g + h\partial\varkappa - f'\partial\vartheta; \quad B = h - g\partial\varkappa$$

zu setzen ist, erfüllen die A und B die Gleichungen:

$$\Sigma A^2 = 1; \quad \Sigma B^2 = 1; \quad \Sigma AB = 0$$

so dass Gl. (14) übergeht in

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1$$

und man setzen kann

$$\lambda = \cos\pi; \quad \mu = \sin\pi$$

daher werden die Richtungscosinus einer beliebigen Normale

$$= (g + h\partial\varkappa - f'\partial\vartheta)\cos\pi + (h - g\partial\varkappa)\sin\pi$$

Damit dieselbe im Schmiegungsraume (11) liegt, ist die Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma h\{(g + h\partial\varkappa - f'\partial\vartheta)\cos\pi + (h - g\partial\varkappa)\sin\pi\} \\ &= \partial\varkappa\cos\pi + \sin\pi = \sin(\pi + \partial\varkappa) \end{aligned}$$

woraus:

$$\pi = -\partial\varkappa; \quad \cos\pi = 1; \quad \sin\pi = -\partial\varkappa$$

Demnach sind die Richtungscosinus der Normale der consecutiven Schmiegungsebene im Schmiegungsraume

$$= g + h\partial\varkappa - f'\partial\vartheta - (h - g\partial\varkappa)\partial\varkappa = g - f'\partial\vartheta$$

und der unendlich kleine Winkel zwischen den zwei consecutiven Schmiegungsebenen

$$= \sqrt{\Sigma\{(g - f'\partial\vartheta) - g\}^2} = \pm\,\partial\vartheta$$

Analog verhält es sich mit der die Bi- und Trinormale verbindenden Ebene

$$(3,\ 4) \quad \Sigma f(\xi - x) = 0; \quad \Sigma f'(\xi - x) = 0$$

welche mit einer durch den Punkt (x) gelegten Parallelen iher Consecutiven

$$\Sigma(f+f'\partial\tau)(\xi-x)=0;\quad \Sigma(f'+g\partial\vartheta-f\partial\tau)(\xi-x)=0 \qquad (16)$$

im Normalraume

$$\Sigma f(\xi-x)=0$$

liegt und sie in der Geraden

$$\Sigma f(\xi-x)=0;\quad \Sigma f'(\xi-x)=0;\quad \Sigma g(\xi-x)=0$$

d. i. in der Trinormale schneidet. Die Ebene (3, 4) hat im Normalraume, wie voraus bekannt, die Hauptnormale zur Normale. Für die Normale ihrer Consecutiven (16) findet man ebenso wie oben die Richtungscosinus

$$=(f+f'\partial\tau)\sin\pi+(f'+g\partial\vartheta-f\partial\tau)\cos\pi \qquad (17)$$

Im Normalraume wird

$$0=\sin\pi-\partial\tau\cos\pi=\sin(\pi-\partial\tau)$$

also $\pi=\partial\tau$. Der Ausdruck (17) reducirt sich auf

$$f'+g\partial\vartheta$$

Daher ist $\partial\vartheta$ der Contingenzwinkel.

Für jede Ebene in einer linearer Vierdehnung giebt es, wie leicht erhellt, eine einzige, durch einen ihrer Punkte O gehende Ebene von der reciproken Eigenschaft, dass jede durch O gehende Gerade der einen auf jeder durch O gehenden Geraden der andern senkrecht steht. Jede von beiden Ebenen ist nämlich der Ort der durch O gehenden Normalen der andern. Zwei solche Ebenen wollen wir c e n t r a l - n o r m a l nennen.

Offenbar sind die 2 soeben betrachteten Hauptebenen (1, 2) und (3, 4) central-normal zu einander. Es hat sich gezeigt, dass sie den gemeinsamen Drehungswinkel ϑ haben. Hiermit ist die geometrische Bedeutung des zweiten Krümmungswinkels gefunden.

Um ihn analytisch zu bestimmen, seien σ und ϱ die Drehungswinkel der Haupt- und Binormale. Dann ist

$$\left.\begin{aligned}\partial\sigma^2&=\Sigma\partial f'^2=\partial\tau^2+\partial\vartheta^2\\ \partial\varrho^2&=\Sigma\partial g^2=\partial\vartheta^2+\partial\varkappa^2\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Da nun

$$\partial\tau^2=\Sigma\partial f^2;\quad \partial\varkappa^2=\Sigma\partial h^2 \qquad (19)$$

ist, so erhält man die doppelte Bestimmung:

$$\partial\vartheta^2=\Sigma(\partial f'^2-\partial f^2)=\Sigma(\partial g^2-\partial h^2) \qquad (20)$$

woraus beiläufig die Relation

$$\Sigma(\partial f^2 + \partial g^2) = \Sigma(\partial f'^2 + \partial h^2) \tag{21}$$

Jetzt kann man, wenn die Coordinaten x in einem Parameter gegeben sind, mit Hülfe der Gl. (9) alle 16 Richtungscosinus der 4 begleitenden Axen leicht successive berechnen; denn es ist

$$\left.\begin{array}{l}
\partial s = \sqrt{\Sigma \partial x^2}; \quad f = \dfrac{\partial x}{\partial s} \\[2ex]
\partial \tau = \sqrt{\Sigma \partial f^2}; \quad f' = \dfrac{\partial f}{\partial \tau} \\[2ex]
\partial \vartheta = \sqrt{\Sigma(\partial f'^2 - \partial f^2)}; \quad g = \dfrac{\partial f' + f \partial \tau}{\partial \vartheta} \\[2ex]
\partial \varkappa = \sqrt{\Sigma(\partial f^2 - \partial f'^2 + \partial g^2)}; \quad h = \dfrac{\partial g + f' \partial \vartheta}{\partial \varkappa}
\end{array}\right\} \tag{22}$$

§. 2. Parallele Curven.

Einer Curve s ist eine andre s^0 parallel, wenn sie in den entsprechenden Punkten (x), (x^0) gemeinsamen Normalraum hat. Daraus folgt von selbst die Gleichheit der Tangentialrichtung und der constante normale Abstand.

Sind nun t, p, q, r die Coordinaten des Punktes (x^0) relativ zu den begleitenden Axen der Curve s, so ist

$$x^0 = x + tf + pf' + qg + rh$$

Soll dieser Punkt im Normalraum von s liegen, so muss $t = 0$ sein, also

$$x^0 = x + pf' + qg + rh \tag{23}$$

Jetzt ist dieser Normalraum zugleich der von s^0, wenn $f^0 = f$ gesetzt wird. Differentiirt man hiernach die letzte Gleichung, so kommt:

$$f\partial s^0 = f(\partial s - p\partial\tau) + f'(\partial p - q\partial\vartheta) + g(\partial q + p\partial\vartheta - r\partial\varkappa) + h(\partial r + q\partial\varkappa)$$

Sofern diese Gleichung für jede beliebige Axe gilt, muss einzeln sein:

$$\partial s_0 = \partial s - p\partial\tau \tag{24}$$

$$\left.\begin{array}{l}
0 = \partial p - q\partial\vartheta \\
0 = \partial q + p\partial\vartheta - r\partial\varkappa \\
0 = \partial r + q\partial\varkappa
\end{array}\right\} \tag{25}$$

Die 3 letzten Gleichungen sind diejenigen, welche die Richtungscosinus p, q, r der Tangente, Hauptnormale und Binormale einer

Raumcurve bestimmen, deren Krümmungs- und Torsionswinkel ϑ und $\varkappa$ sind. Eliminirt man q und r, so erhält man eine Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\frac{\partial^3 p}{\partial \vartheta^3}+\left(1+\frac{\partial \varkappa^2}{\partial \vartheta^2}\right)\frac{\partial p}{\partial \vartheta}-\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \vartheta\, \partial \varkappa}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \vartheta^2}+p\right)=0 \tag{26}$$

deren Integral, wenn p, p_1, p_2 Particularlösungen bezeichnen, von der Form ist

$$ap+a_1 p_1+a_2 p_2 \tag{27}$$

Die Constanten a, a_1, a_2 haben keinen Einfluss auf die Gestalt der Curve, bestimmen vielmehr nur ihre Lage im Raume.

Multiplicirt man die 3 Gl. (25) einzeln mit p, q, r und addirt sie, so kommt:

$$p\,\partial p+q\,\partial q+r\,\partial r=0$$

und nach Integration:

$$p^2+q^2+r^2=c^2 \tag{28}$$

Sollen nun p, q, r die obengenannte geometrische Bedeutung haben, so muss

$$p^2+q^2+r^2=1 \tag{29}$$

sein. Wir substituiren daher, zur Erhaltung der Allgemeinheit cp, cq, cr für p, q, r. Dann gehen die Gl. (23) (24) (28) über in

$$x^0=x+c(pf'+qg+rh) \tag{30}$$

$$\partial s_0=\partial s-cp\,\partial\tau \tag{31}$$

und in Gl. (29), während die Gl. (25) (26) fortbestehen.

Setzt man in den Gl. (25) den Ausdruck (27) für p, so gehen q, r bzhw. über in

$$\left.\begin{array}{l} aq+a_1 q_1+a_2 q_2 \\ ar+a_1 r_1+a_2 r_2 \end{array}\right\} \tag{32}$$

Da die 3 Axen, auf welche sich die Richtungscosinus p, p_1, p_2 beziehen, willkürlich sind, so kann man sie orthogonal wählen. Dann erhält man das orthogonale System:

$$\begin{array}{ccc} p & p_1 & p_2 \\ q & q_1 & q_2 \\ r & r_1 & r_2 \end{array}$$

und zur Erfüllung der Gl. (29) die Bedingung:

$$a^2+a_1{}^2+a_2{}^2=1 \tag{33}$$

Jetzt stellen die Grössen (27) (32) die Richtungscosinus von Tangente, Hauptnormale und Binormale einer durch den Krümmungs- und

Torsionswinkel ϑ und $\varkappa$ bestimmten Raumcurve gegen eine beliebige Axe dar.

In den Gleichungen der Parallele, welche nun lauten

$$x^0 = x + c\{a(pf' + qg + rh) + a_1(p_1f' + q_1g + r_1h) + a_2(p_2f' + q_2g + r_2h)\}$$

seien s und c constant; dann findet man:

$$\begin{aligned}\Sigma(x^0 - x)^2 &= c^2\{a^2\Sigma(pf' + qg + rh)^2 + \dots \\ &\quad + 2aa_1\Sigma(pf' + qg + rh)(p_1f' + q_1g + r_1h) + \dots\} \\ &= c^2\{a^2(p^2 + q^2 + r^2) + a_1^2(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) + a_2^2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) \\ &\quad + 2aa_1(pp_1 + qq_1 + rr_1) + \dots\} \\ &= c^2(a^2 + a_1^2 + a_2^2) = c^2\end{aligned}$$

Hiermit verbunden die sichtlich erfüllte Gleichung

$$\Sigma f(x^0 - x) = 0$$

bestimmt eine Kugelfläche vom Radius c im Normalraume als normalen Querschnitt des Systems von Parallelen, welches durch constantes c bedingt ist. Dies System ist dann die Grenze eines vierdehnigen Canals von constantem, kugelförmig rundem Querschnitt. Man kann diesen Canal entstanden denken durch Biegung eines vierdehnigen Quasi-Cylinders, d. h. des Ortes einer Kugel, deren Mittelpunkt längs der Normale ihres Raumes läuft.

Wir wollen indes das Variationsgebiet der a, a_1, a_2 noch weiter beschränken, so nämlich dass jener Canal sich auf einen körperlichen Canal mit kreisförmigem Querschnitt reducirt, wie er durch Biegung eines wirklichen geraden Cylinders entsteht.

Diese Aufgabe wird am einfachsten, und doch in voller Allgemeinheit gelöst, indem man

$$a_2 = 0$$

setzt. Da alsdann

$$a^2 + a_1^2 = 1$$

wird, so kann man

$$a = \cos\varphi; \quad b = \sin\varphi$$

setzen, und erhält:

$$x^0 = x + c\{(pf' + qg + rh)\cos\varphi + (p_1f' + q_1g + r_1h)\sin\varphi\} \tag{34}$$

Erstens nämlich **wird** dadurch die Aufgabe gelöst, d. h. der Querschnitt ist ein Kreis. Denn betrachtet man s als constant, mithin x^0 als allein abhängig von c und φ, so zeigt sich x^0 dargestellt als lineare Function zweier Unabhängigen

$$c\cos\varphi, \quad c\sin\varphi$$

folglich liegt der Querschnitt in einer Ebene, die, indem sie die Kugel

$$c = \text{const.}$$

in einem grössten Kreise schneidet, eben diesen zum Querschnitt des Canales macht.

Zweitens ist die Ebene $a_2 = 0$ ganz unbestimmt und kann in jeder Stellung gedacht werden, weil man für a, a_1, a_2 beliebige Orthogonalsubstitutionen machen kann, folglich vertritt jede Speciallösung sämmtliche mögliche Lösungen.

Gl. (34) stellt jetzt, wenn s und φ variiren, c hingegen constant bleibt, die Oberfläche eines gebogenen Cylinders dar, wenn statt dessen c von 0 bis zu dieser Constanten variirt, den gebogenen Cylinder selbst. Denken wir diesen als eine Schnur bestehend aus unendlich vielen Fäden, die parallel neben einander gehen, so repräsentirt jedes Wertsystem c, φ einen Faden. Betrachtet man zwei consecusive Fäden φ, $\varphi + \partial\varphi$ für gemeinsames c, so ist deren constanter Abstand

$$\partial l = \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial x^0}{\partial \varphi} \partial \varphi\right)^2}$$

und zwar findet man aus (34)

$$\frac{\partial x^0}{\partial \varphi} = c\{-(pf' + qg + rh)\sin\varphi + (p_1 f' + q_1 g + r_1 h)\cos\varphi\}$$

Die Quadratsumme der Klammer und ihrer Analogen ist ebenso $= 1$, wie es in der obigen Berechnung von $\Sigma(x^0 - x)^2$ sich ergab. Folglich wird

$$\partial l = c\,\partial\varphi$$

und $c\varphi$ drückt den Bogen des concentrischen Kreises vom Radius c im Querschnitt der Schnur aus. Hiernach sind c, φ die Polarcoordinaten eines beliebigen Punkts im Querschnitt.

Substituirt man $\varphi - \varepsilon s$ für φ, wo ε constant, so entspricht ein constantes φ einem Faden, der auf jenem concentrischen Kreise proportional dem Bogen der Mittellinie fortrückt, mithin die Schnur als Spirale umwindet. Demnach ist

$$x^0 = x + c\{(pf' + qg + rh)\cos(\varphi - \varepsilon s) + (p_1 f' + q_1 g + r_1 h)\sin(\varphi - \varepsilon s)\}$$

Die Gleichung einer gedrehten Schnur, deren Fäden durch die Biegung aus Schraubenlinien hervorgehen, wenn sie wie vorher durch $\varphi = \text{const.}$ bestimmt werden.

In einem besondern Falle nimmt der Ausdruck der Canalfläche vom kreisförmigen Querschnitt in der linearen Vierdehnung dieselbe Form an wie im Raume. Ist nämlich

$$\frac{\varkappa}{\vartheta} \text{ constant} = \operatorname{tg}\beta$$

woraus hervorgeht

$$\vartheta = \varrho \cos\beta; \quad \varkappa = \varrho \sin\beta$$

so reducirt sich Gl. (26) auf

$$\frac{\partial^3 p}{\partial \varrho^3} + \frac{\partial p}{\partial \varrho} = 0$$

und hat das vollständige Integral:

$$p = a\cos\varrho + a_1 \sin\varrho + a_2$$

Hieraus ergiebt sich nach (25):

$$q = \frac{\partial p}{\partial \varrho \cos\beta} = \frac{-a\sin\varrho + a_1\cos\varrho}{\cos\beta}$$

$$r = p\cot\beta + \frac{\partial q}{\partial \varrho \sin\beta} = -(a\cos\varrho + a_1\sin\varrho)\operatorname{tg}\beta + a_2\cot\beta$$

oder nach Substitution von $a\cos\beta$, $a_1\cos\beta$, $a_2\sin\beta$ für a, a_1, a_2:

$$\begin{aligned} p &= (a\cos\varrho + a_1\sin\varrho)\cos\beta + a_2\sin\beta \\ q &= -a\sin\varrho + a_1\cos\varrho \\ r &= -(a\cos\varrho + a_1\sin\varrho)\sin\beta + a_2\cos\beta \end{aligned}$$

wodurch die Bedingungen (29) (33) erfüllt sind. Setzt man jetzt wie oben

$$a = \cos\varphi; \quad a_1 = \sin\varphi; \quad a_2 = 0$$

so wird

$$p = \cos(\varrho - \varphi)\cos\beta; \quad q = -\sin(\varrho - \varphi); \quad r = -\cos(\varrho - \varphi)\sin\beta$$

und die Gleichung der Canalfläche wird

$$x^0 = x + c\{(f'\cos\beta - h\sin\beta)\cos(\varrho - \varphi) - g\sin(\varrho - \varphi)\}$$

Im Raume wird $\beta = 0$, $\varrho = \vartheta$, wobei die Form dieselbe bleibt.

XXIV.

Einige Eigenschaften von Kugelbüscheln und Kugelschaaren.

Von

Herrn **Norbert Herz**

in Wien.

Wenn die Gleichungen zweier Kugeln

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2+(z-\gamma_1)^2-r_1{}^2\equiv K_1=0\\(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2+(z-\gamma_2)^2-r_2{}^2\equiv K_2=0\end{array}\right\} \quad (1)$$

sind, so werden sich diese beiden Kugeln in einem Kreise schneiden, dessen Ebene die Gleichung $K_1-K_2=0$ hat. Man nennt diese Ebene die Chordalebene oder Radicalebene, den Kreis den Chordalkreis der beiden Kugeln.

Durch die Gleichung

$$K_1+\lambda K_2 = K\lambda = 0 \quad (2)$$

ist eine Kugel bestimmt, die durch den Chordalkreis von K_1 und K_2 geht; denn für die Punkte, für welche $K_1=0$, $K_2=0$ erfüllt wird, wird auch $K_1+\lambda K_2\equiv 0$. Bei veränderlichem λ giebt die Gleichung (2) unendlich viele Kugeln, deren Gesammtheit einen Kugelbüschel B bilden, für welchen K_1, K_2 Grundkugeln sind. Die Chordalebene ist auch ein Element derselben, indem für dieselbe $\lambda=1$ wird.

Jede Kugel des Büschels hat die Eigenschaft, dass das Verhältniss der Längen der durch einen beliebigen Punkt derselben an zwei

andere Kugeln des Büschels gelegten Tangenten eine constante Grösse hat, die aber für Punkte verschiedener Kugeln und für je zwei andere Kugeln des Büschels eine andere wird. Denn der Wert

$$(x_1-\alpha_1)^2+(y_1-\beta_1)^2+(z_1-\gamma_1)^2-r_1^2=K_1'$$

ist das Quadrat einer aus dem Punkte $x_1 y_1 z_1$ an K_1 gelegten Tangente, d. h. die Potenz des Punktes $x_1 y_1 z_1$ in Bezug auf die Kugel K; und da für jeden Punkt von $K\lambda$

$$K_1'+\lambda K_2'=0$$

also

$$\frac{K_1'}{K_2'}=-\lambda$$

ist, so ist der obige Satz für die Grundkugeln bewiesen, also auch allgemein, da im Büschel je zwei Kugeln zu Grundkugeln angenommen werden können.

Da für die Chordalebene $\lambda=-1$, so ist $\frac{K_1'}{K_2'}=1$, d. h. die Längen der von einem Punkte der Chordalebene an alle Kugeln eines Büschels gelegten Tangenten sind gleich; ihre Berührungspunkte liegen auf einer Kugel, der Tangentenkugel, deren Mittelpunkt der in der Chordalebene liegende gemeinschaftliche Punkt aller Tangenten ist; weil aber die Radien der einen Kugel Tangenten der andern sind, so schneiden sich die beiden orthogonal, weshalb die Tangentenkugel auch Orthogonalkugel heissen kann.

Löst man die Gleichung (2) auf, so ergiebt sich:

$$x^2+y^2+z^2-2\,\frac{\alpha_1+\lambda\alpha_2}{1+\lambda}x-2\,\frac{\beta_1+\lambda\beta_2}{1+\lambda}y-2\,\frac{\gamma_1+\lambda\gamma_2}{1+\lambda}z$$
$$+\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-r_1^2+\lambda(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2-r_2^2)}{1+\lambda}=0$$

Hieraus ergeben sich die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel $K\lambda$:

$$\alpha\lambda=\frac{\alpha_1+\lambda\alpha_2}{1+\lambda},\quad \beta\lambda=\frac{\beta_1+\lambda\beta_2}{1+\lambda},\quad \gamma\lambda=\frac{\gamma_1+\lambda\gamma_2}{1+\lambda} \tag{3}$$

Für den Halbmesser derselben findet man:

$$r\lambda^2=\left(\frac{\alpha_1+\lambda\alpha_2}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{\beta_1+\lambda\beta_2}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{\gamma_1+\lambda\gamma_2}{1+\lambda}\right)^2$$
$$-\frac{(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-r^2)+\lambda(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2-r_2^2)}{1+\lambda}$$

oder:

$$r\lambda^2=\frac{r_1^2+\lambda[r_1^2+r_2^2-c^2]+\lambda^2 r_2^2}{(1+\lambda)^2} \tag{4}$$

wenn $c^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2$ die Centrale der beiden Kugeln ist.

Aus den Gleichungen (3) sieht man, dass die Mittelpunkte aller Kugeln eines Büschels auf einer Geraden liegen, und dass λ das negative Teilverhältniss des Mittelpunktes der Kugel $K\lambda$ in Bezug auf die Mittelpunkte der Grundkugeln ist.

Aus (4) sieht man ferner, dass der Radius der Kugeln auch verschwinden kann; dies geschieht, wenn

$$r_1{}^2 + \lambda(r_1{}^2 + r_2{}^2 - c^2) + \lambda^2 r_2{}^2 = 0$$

und

$$\lambda = \frac{1}{r_2{}^2}\left\{(c^2 - r_1{}^2 - r_2{}^2) \pm \sqrt{(c^2 - r_1{}^2 - r_2{}^2)^2 - r_1{}^2 r_2{}^2}\right\}$$

oder

$$\lambda = \frac{1}{r_4{}^2}\left\{(c^2 - r_1{}^2 - r_2{}^2) \pm \sqrt{(c + r_1 + r_2)(c + r_1 - r_2)(c - r_1 + r_2)(c - r_1 - r_2)}\right\} \tag{5}$$

Für diese Werte von λ gehen also die beiden Kugeln im Punkte über; diese heissen Grenzpunkte des Büschels. Selbstverständlich gehen auch alle Tangentenkugeln durch die Grenzpunkte.

Aus (5) findet man leicht, dass die Grenzpunkte reell oder imaginär sind, je nachdem sich die Kugeln des Büschels schneiden oder nicht. Nimmt man ausser den beiden Kugeln K_1, K_2 noch eine dritte:

$$K_3 \equiv (x - \alpha_3)^2 + (y - \beta_3)^2 + (z - \gamma_3)^2 - r_3{}^2 = 0$$

an, so werden dadurch zwei weitere Büschel B_1, B_2 und zugehörige Grenzpunkte bestimmt. Die 3 Chordalebenen der drei Kugeln müssen sich in einer Geraden schneiden, die auf der Centralebene der drei Kugeln senkrecht steht, da sich ja die 3 Kugeln in zwei Punkten, den Chordalpunkten schneiden, deren Verbindungslinie obige Gerade ist, welche Chordale oder Radicalaxe der drei Kugeln heisst. Uebrigens folgt dies auch aus den Gleichungen, indem

$$K_1 - K_3 \equiv (K_1 - K_2) + (K_2 - K_3)$$

Die von den Punkten der Radicalaxe an alle Kugeln gelegten Tangenten sind gleich, da sie es für je 2 sind; die aus denselben gelegten Tangentenkugeln müssen folglich durch sämmtliche 6 Grenzpunkte gehen, welche daher in einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt der Durchstosspunkt der Radicalaxe mit der Centralebene ist.

Durch 3 Büschel ist aber noch eine ganze Reihe von Büscheln bestimmt, für welche nur die Bedingung besteht, dass die Chordalkreise durch die 2 Schnittpunkte der drei Kugeln gehen. Die Ge-

sammtheit derselben kann eine Kugelschaar heissen. Die Gleichung einer Kugel derselben ist

$$K_1 + \lambda K_2 + \mu K_3 = 0$$

weil sie durch den Schnittpunkt von $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ gehen muss.

Da alle Büschel einer Schaar dieselbe Radicalaxe haben, so muss jede Tangentialkugel zu $B B_1 B_2$ auch Tangentialkugel zu jedem anderen Büschel sein, woraus folgt, dass die Grenzpunkte aller Büschel dieser Schaar in einem Kreise liegen, welcher der Grenzpunktskreis heissen kann.

Man ersieht auch hieraus, dass der Grenzpunktskreis Chordalkreis für ein Büschel ist, dessen Mittelpunkte in der Radicalaxe sind, und für welchen die Chordalpunkte der Schaar Grenzpunkte sind.

Man kann nun ein Kugelbüschel und eine Kugelschaar, für welche die oben leicht ersichtliche Reciprocität besteht, als zugeordnet betrachten. Der Chordalkreis eines Büschels ist also Grenzpunktskreis der zugeordneten Schaar; des ersteren Radicalebene, Centrallinie und Grenzpunkte sind für die letztere Centralebene, Radicalaxe und Chordalpunkte.

Hat man 4 Kugeln im Raume

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_4 = 0$$

so erhält man für dieselben 4 Centralebenen, welche eine dreiseitige Pyramide, das Centraltetraeder bilden. Die 6 Radicalebenen von je zweien der Kugeln schneiden sich in demselben Punkte, denn ihre Gleichungen sind:

$$K_1 - K_2 = 0 \quad K_1 - K_3 = 0 \quad K_1 - K_4 = 0$$
$$K_2 - K_3 = 0 \quad K_2 - K_4 = 0 \quad K_3 - K_4 = 0$$

Da nun $K_1 - K_4 = (K_1 - K_2) + (K_2 - K_3) + (K_3 - K_4)$ ist, also die Radicalebene (14) durch den Schnitt der drei (12), (23), (34) geht, während die Ebenen (13) und (24) mit den Ebenen (12), (23) resp. (23), (34) gemeinschaftliche Schnittlinien haben, so gehen alle 6 Radicalebenen und somit auch alle 4 Radicalaxen durch denselben Punkt, welcher das Radicalcentrum der 4 Kugeln heisst. Die den 6 Büscheln, deren Mittelpunkte in den Kanten oder die den 4 Schaaren, deren Mittelpunkte in den Flächen des Centraltetraeders liegen, zugeordneten Schaaren resp. Büschel, deren Mittelpunkte in den 6 Radicalebenen bzhw. in den 4 Radicalaxen liegen, haben daher eine gemeinschaftliche Kugel, deren Centrum das Radicalcentrum der 4

Kugeln ist, und auf welcher auch sämmtliche Grenzpunktskreise liegen, was übrigens schon daraus folgt, dass ihre Mittelpunkte die Orthogonalprojectionen des Radicalcentrums auf die Seiten des Centraltetraeders sind.

Projectivische und perspectivische Kugelbüschel.

In einem Kugelbüschel kann man das Teilverhältniss des Mittelpunktes einer Kugel auch als das Teilverhältniss der Kugel in Bezug auf die Grundkugeln ansehen; dasselbe hat für die Kugel K_λ den Wert $-\lambda$; das Doppelverhältniss von 2 Kugeln K_λ und $K_{\lambda'}$ in Bezug auf die beiden Grundkugeln ist dann $d = \frac{\lambda}{\lambda'}$ und das Doppelverhältniss von 4 beliebigen Kugeln des Büschels:

$$d = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

Die Kugeln liegen harmonisch, wenn ihr Doppelverhältniss -1 ist; demnach sind 2 Kugeln harmonisch zu den Grundkugeln, wenn ihre Gleichungen

$$K_1 + \lambda K_2 = 0, \quad K_1 - \lambda K_2 = 0 \quad \text{sind.}$$

Zwei Kugelbüschel sind projectivisch, wenn jeder Kugel des einen Büschels nur eine Kugel des anderen entspricht. Wenn daher

$$K_1 + \lambda K_2 = 0$$
$$k_1 + \mu k_2 = 0$$

die Gleichungen der beiden Büschel sind, so muss für die Projectivität zwischen λ und μ die Beziehung bestehen:

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0 \tag{1}$$

Sollen die Grundkugeln sich gegenseitig entsprechen, so muss für $\lambda = 0$ auch $\mu = 0$, also $d = 0$ und für $\lambda = \infty$ auch $\mu = \infty$, also $a = 0$ sein; dann reducirt sich die Gleichung (1) auf die folgende:

$$b\lambda + c\mu = 0 \quad \text{oder} \quad A\lambda + \mu = 0 \tag{2}$$

und die Gleichungen der beiden Büschel werden:

$$K_1 + \lambda K_2 = 0$$
$$k_1 - A\lambda k_2 = 0$$

Zwei Kugelbäschel sollen perspectivisch sein, wenn sie eine Kugel entsprechend gemein haben; dann müssen sich natürlich die Träger der Mittelpunktreihen schneiden; für diesen Fall wird in die Glei-

chungen der beiden Büschel nur $K_1 \equiv k_1 = 0$ als Gleichung der perspectivisch gemeinsamen Kugel zu setzen sein.

Man kann auch von projectivischen Kugelschaaren sprechen, indem jeder Kugel der einen Schaar eine der anderen entspricht. Ihre Gleichungen werden:

$$K_1 + \lambda K_2 + \mu K_3 = 0$$
$$k_1 - A\lambda k_2 - B\mu k_3 = 0$$

Die Chordalebene von je 2 sich entsprechenden Kugeln zweier projectivischer Büschel

$$K_1 + \lambda K_2 = 0$$
$$k_1 - A\lambda k_2 = 0$$

haben die Gleichung:

$$\frac{K_1 + \lambda K_2}{1 + \lambda} - \frac{k_1 - A\lambda k_2}{1 - A\lambda} = 0$$

oder

$$(K_1 - k_1) + \lambda[(K_2 - k_1) - A(K_1 - k_2)] - A\lambda^2(K_2 - k_2) = 0 \qquad (3)$$

Die sämmtlichen Chordalebenen umhüllen eine Fläche, deren Gleichung

$$[(K_2 - k_1) - A(K_1 - k_2)]^2 + 4A(K_2 - k_2)(K_1 - k_1) = 0 \qquad (4)$$

ist. Für perspectivische Büschel ist $K_1 \equiv k_1$ zu setzen, daher wird die Gleichung irgend einer Chordalebene, indem in der Gleichung (3) $K_1 - k_1$ wegfällt:

$$(K_2 - K_1) - A(k_1 - k_2) - A\lambda(K_2 - k_2) = 0 \qquad (5)$$

Hieraus folgen die Sätze:

Die Chordalebenen von sich entsprechenden Kugeln projectivischer Büschel umhüllen eine Fläche 2ter Ordnung.

Alle Chordalebenen von sich entsprechenden Kugeln perspectivischer Büschel bilden ein Ebenenbüschel, dessen Axe die Radicalaxe der drei Kugeln $k_1 \equiv K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $k_2 = 0$ ist, und das mit der Mittelpunktsreihe der beiden Kugelbüschel projectivisch ist.

Daraus folgt ferner, dass auch je zwei beliebige, sich entsprechende Kugeln der Büschel mit der gemeinsamen Kugel derselben dieselbe Radicalaxe haben.

Anmerkung 1. Haben die Kugeln $K_1 = 0$, $k_1 = 0$ denselben Mittelpunkt, aber verschiedene Radien, d. h. sind die Mittelpunktsreihen perspectivisch, nicht aber die Kugelbüschel, so wird $K_1 - k_1 = R_1^2 - r_1^2$ und die Umhüllende der Chordalebenen wird dann wieder eine Fläche zweiter Ordnung.

Anmerkung 2. Für die Ebene gelten ganz analoge Sätze: Die Chordalen zweier projectivischer Kreisbüschel umhüllen eine Kegelschnittslinie; sind die Büschel perspectivisch, so bilden die Chordalen einen zu den Mittelpunktsreihen projectivischen Strahlenbüschel; haben aber die Kreise, deren Mittelpunkte coincidiren, verschiedene Halbmesser, so ist die Umhüllende der Chordalen ein Kegelschnitt.

Die von dem Radicalcentrum R von 4 Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 auf die Seiten des Centraltetraeders gefällten Perpendikel sind die Axen der den zu den 4 Seiten gehörigen Schaaren zugeordneten Büschel. Bestimmt man auf diesen Normalen perspectische Punktreihen als Mittelpunkte von Orthogonalkugeln mit dem gemeinschaftlichen Punkte R, so bilden die Chordalebenen je zweier Büschel im ganzen 6 mit einander projectivische Ebenenbüschel, deren Träger die Kanten eines Tetraeders bilden und nichts anderes als die Radicalaxen je zweier Kugeln mit der gemeinschaftlichen Orthogonalkugel sind. Seien Rx_1, Rx_2, Rx_3, Rx_4 die Normalen zu den Ebenen $K_2K_3K_4$, $K_1K_3K_4$, $K_1K_2K_4$ und $K_1K_2K_3$ und von den perspectivischen Reihen m_1, m_2, m_3, m_4 vier sich entsprechende Punkte als Mittelpunkte der Kugeln k_1, k_2, k_3, k_4, so sind die Kanten des obigen Tetraeders die Radicalaxen von k_1k_2R, k_1k_3R, k_1k_4R, k_2k_3R, k_2k_4R, k_3k_4R und wie man sich leicht überzeugt, keine anderen Linien, als die Kanten des Centraltetraeders, weil z. B. die Chordalebenen von k_1R und k_2R die beiden Seiten $K_2K_3K_4$ und $K_1K_3K_4$ des Centraltetraeders sind, die Radicalaxe daher die Kante K_3K_4 derselben sein muss. Je zwei der entstehenden Ebenenbüschel erzeugen nun eine Regelfläche zweiter Ordnung, und zwar entstehen hier 12 Kegel, die ihre Scheitel in den Ecken des Centraltetraeders haben, und 3 hyperbolische Paraboloide oder einfache elliptische Hyperboloide.

Perspectivische Punktreihen auf den Normalen entstehen beispielsweise als gleichzeitige Schnitte derselben aus R beschriebenen Kugel auf allen Normalen, und man erhält daher den folgenden Satz:

Die Chordalebenen je zweier von allen jenen Kugeln, welche den aus je 3 von vier gegebenen Kugeln gebildeten Schaaren zugeordneten Büscheln angehören, und deren Mittelpunkte auf einer aus dem Radicalcentrum der 4 gegebenen Kugeln beschriebenen Kugel liegen, gehen durch jene Kante des Centraltetraeders, welche den Ebenen der den beiden Kugeln zugeordneten Schaaren gemeinschaftlich ist. Die Schnittlinie je zweier der entstehenden 6 Chordalebenen beschreiben bei stetiger Veränderung des Radius der aus dem Radicalcentrum beschriebenen, die Mittelpunkte bestimmenden Kugel 12 Kegel zweiter Ordnung von denen je 3 eine Ecke des Centraltetraeders zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und 3 andere Regelflächen zweiter Ordnung.

Sind projectivische Kugelbüschel vorgelegt, so wird man Gruppen von je drei einander entsprechenden Kugeln haben, zu welchen je 3 Chordalebenen gehören; die Aufeinanderfolge dieser Ebenen giebt nach dem früheren 3 Flächen zweiter Ordnung. Jede gemeinschaftliche Tangentialebene derselben ist Chordalebene für eine Kugel A_1 des ersten Büschels und die zugehörige A_2 des zweiten, ebenso zu zwei Kugeln B_2, B_3 des zweiten und dritten und C_3, C_1 des ersten und dritten Büschels. Da es nun 8 gemeinschaftliche Tangentialebenen giebt, so giebt es auch in jedem der drei Büschel 8 Gruppen von je 2 Kugeln, deren Chordalebenen mit den ihnen entsprechenden Kugeln in je einem der beiden anderen Büschel zusammenfallen. Eine solche Gruppe ist hier im ersten Büschel $A_1 C_1$, denn die Chordalebenen von $A_1 A_2$ und $C_1 C_3$ fallen zusammen; im zweiten und dritten Büschel sind solche Gruppen $A_2 B_2$ und $B_3 C_3$. Die Radicalaxen der Kugeln A_1, A_2 und der ihnen im 3ten Büschel entsprechen A_3, so wie der einander entsprechenden Kugeln $B_1 B_2 B_3$ und $C_1 C_2 C_3$ liegen in der gemeinschaftlichen Tangentialebene; es giebt folglich auch in jedem von drei projectivischen Kugelbüscheln 8 Gruppen von je 3 Kugeln, deren Radicalaxen mit den beiden ihnen entsprechenden Kugeln, welche sich in den anderen Büscheln ebenso gruppiren, zu je dreien in einer Ebene liegen.

Sind zwei Kugelbüschel durch die Gleichungen

$$K_1 + \lambda K_2 = 0$$
$$K_1' - A\lambda K_2' = 0$$

gegeben, so sind die Chordalebenen von je entsprechenden Kugeln mit einer festen $K_3 = 0$:

$$(K_3 - K_1) + \lambda(K_3 - K_2) = 0$$
$$(K_3 - K_1') - A\lambda(K_3 - K_2') = 0$$

Die Radicalaxe der drei Kugeln K_λ, $K_{\lambda'}$ und K_3 beschreibt demnach eine Fläche, deren Gleichung

$$\begin{vmatrix} (K_3 - K_1), & (K_3 - K_2) \\ (K_3 - K_1'), & -A(K_3 - K_2') \end{vmatrix} = 0$$

ist, und welche somit eine Regelfläche zweiter Ordnung sein wird, im allgemeinen also ein hyperbolisches Paraboloid oder einfaches elliptisches Hyperboloid, welches nur dann in einen Kegel übergeht, wenn die beiden Radicalaxen der festen Kugel mit den beiden Büscheln sich schneiden, welcher Schnittpunkt dann die Spitze des Kegels zweiter Ordnung ist; die obige Fläche wird ein Cylinder sein, wenn die Radicalaxen parallel sind.

Das Radicalcentrum von 4 Kugeln, von denen zwei $K_3=0$, $K_4=0$ fest sind, und die beiden anderen zwei projectivischen Büscheln angehören, beschreiben daher stets eine Curve zweiter Ordnung, nämlich den Schnitt der obigen Regelfläche mit der Chordalebene $K_3-K_4=0$.

Nun werden aber die beiden zu K_3 und K_4 gehörigen Radicalaxen je eine Regelfläche zweiter Ordnung beschreiben; da aber von ihrem Schnitte, dem geometrischen Orte des Radicalcentrums der 4 Kugeln eine ebene Curve der zweiten Ordnung schon gefunden ist, so muss zu demselben entweder noch eine zweite ebene Curve gehören, oder die beiden Flächen müssen sich in der vorhin gefundenen Curve berühren. Sei ein Punkt der zweiten Curve P, so lassen sich durch ihn in den beiden Regelflächen je 2 Gerade ziehen, von denen je eine derjenigen Geradenschaar angehört, aus welcher die Fläche als Gesammtheit der Radicalaxen entstanden gedacht ist; sind die beiden Chordalaxen g_1, g_1' so werden sie die Chordalebene $K_3-K_4=0$ in zwei Punkten p_1, p_2 schneiden, welche beide Radicalcentra der 4 Kugeln K_3, K_4, K_λ und $K_{\lambda'}$ sein müssten. Dies ist unmöglich, und es muss daher entweder P in die in der Ebene $K_3-K_4=0$ gelegene Curve C fallen, wodurch diese doppelt gezählt wird, oder es müssen p_1, p_2 zusammen- und in C hineinfallen; dann haben die beiden Regelflächen eine Erzeugende gemeinschaftlich und folglich noch eine zweite. Dass dies aber hier nicht möglich ist, ersieht man auf folgende Weise: Pp ist Chordalaxe der Kugeln K_3, K_λ, $K_{\lambda'}$ und ebenso K_4, K_λ $K_{\lambda'}$. Die 4 Kugeln K_3, K_4, K_λ, $K_{\lambda'}$ haben demnach ein unbestimmtes Radicalcentrum, ihre Mittelpunkte liegen in derselben Ebene; wenn nun wol in 2 projectivischen Reihen R und R' (den Mittelpunktsreihen) zwei Paare sich entsprechender Punkte liegen, die mit 2 anderen Punkten $(P_3 P_4)$ in einer Ebene liegen [das Erzeugniss der beiden Reihen, eine Regelfläche zweiter Ordnung, giebt mit P_3P_4 zwei Schnittpunkte; die durch denselben gehenden zur einen Geradenschaar gehörigen Erzeugenden bestimmen die betreffenden Punktepaare auf R_1R_2], so werden die 4 Chordalaxen parallel, im allgemeinen aber nicht zusammenfallen. Man erhält daher den Satz:

Die Regelflächen zweiter Ordnung, welche die Chordalaxen zweier beweglicher Kugeln von projectivischen Büscheln mit je einer von 2 festen Kugeln beschreiben, berühren sich in einer Curve zweiter Ordnung, welche in der Chordalebene der beiden festen Kugeln liegt, und der geometrische Ort des Radicalcentrums der vier Kugeln ist.

Wien im Februar 1880.

XXV.

Untersuchungen über algebraische Gleichungen.

Von

Alfred Siebel.

Fortsetzung von N. VIII. in T. LXI.

Artikel VII. (§ 35—§ 46.)

Bestimmung der reellen Wurzeln, wobei das $F(x)$ in § 2 von der Form b^{x-h} ist.

§ 35.

Construction der Wurzeln.

(1) Die reellen Wurzeln unserer algebraischen Gleichung n ten Grades $f(x) = 0$ lassen sich als Abscissen der Durchschnitte zweier Curven

$$y = F(x) = b^{x-h}$$
$$y = \mathfrak{F}(x) = F(x) - kf(x)$$

wo $b > 0$ construiren.

Die erste Curve ist convex für jedes x, da

$$F''(x) = (ln b)^2 b^{x-h} > 0.$$

Wir wollen die Constanten so bestimmen, dass dies auch mit der zweiten der Fall ist.

$$F''(x) = (ln b)^2 \left(1 + (ln b)\frac{x-h}{1} + (ln b)^2 \frac{(x-h)^2}{2!} + \ldots\right)$$

$$kf''(x) = k\left(f''(h) + f'''(h)\frac{x-h}{1} + f^{IV}(h)\frac{(x-h)^2}{2!} + \ldots f^n(h)\frac{(x-h)^{n-2}}{(n-2)!}\right.$$

giebt subtrahirt:

$$\mathfrak{F}''(x) = (ln b)^2 - kf''(h) + \Big((ln b)^3 - kf'''(h)\Big)\frac{x-h}{1} + \ldots$$

$$+ \Big((ln b)^n - kf^n(h)\Big)\frac{(x-h)^{n-2}}{(n-2)!} + (ln b)^{n+1}\frac{(x-h)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots > 0$$

für jedes $x \geqq h$ wenn

$$(ln b)^2 - kf''(h) > 0, \quad (ln b)^3 - kf'''(h) > 0, \ \ldots \ (ln b)^n - kf^n(h) > 0.$$

Sei

(2)

$$f(x+c) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots c_{n-m} x^m + \ldots c_n$$

$$k_m = \frac{a^m}{f^m(c)} = \frac{a^m}{m!\, c_{n-m}}$$

wo

$$a > 0,$$

ferner

$\overset{\pm}{k}_{n,m}$ das absolut kleinste unter den (pos. neg.) Gliedern der Reihe $k_n, k_{n-1}, \ldots k_m$, von der Form $k_\varepsilon = \pm C_s a^s \quad (s = \varepsilon)$

so ist:

(3)

für $x \geqq c$: $F''(x) > 0$ und $\mathfrak{F}''(x) > 0$ mithin jede der beiden Curven convex, wenn

$$h = c$$

$$ln b = a > 0, \text{ d. h. } b = e^a > 1$$

$$k \text{ absol.} < \text{ oder } = \overset{\pm}{k}_{n,2}.$$

Die Bezeichnungun haben wir so gewählt, dass die Aehnlichkeit zwischen den vorliegenden Formeln und denen dem Fall $F(x) = \lambda(x-h)^r$ entsprechenden zu Tage tritt, und werden dies auch in der Folge tun.

§ 36.

Trennung der Wurzeln in pos. Sinne.

I. Sei x_1 beliebig gegeben und denke man sich die Curve

$$y = F(x) = e^{a(x-c)}$$

(1) wo $$a > 0 \quad \text{und} \quad c \leqq x_1$$

construirt, ferner den Punkt $\mathfrak{P}$ mit den Coordinaten x_1 und $y_1 = \mathfrak{F}(x_1) = F(x_1) - kf(x_1)$

(2) wo k absol. $<$ oder $= \overset{\pm}{k}_{n,2} = k_\varepsilon$ je nachdem $f(x_1) \gtrless 0$ sodass

$$kf(x_1) > 0.$$

Von $\mathfrak{P}$ ziehe man auf der pos. Seite der Ordinate die Tangente $\mathfrak{P}T$ an die Curve und bezeichne die Abscisse des Berührungspunktes T mit

$$x.$$

Es ist

$$F(x) - \mathfrak{F}(x_1) = (x - x_1)F'(x)$$

d. h.

$$e^{a(x-c)} - e^{a(x_1-c)} + kf(x_1) = (x - x_1)ae^{a(x-c)}$$

$$\frac{kf(x_1)}{e^{a(x_1-c)}} = e^{a(x-x_1)}(a(x - x_1) - 1 + e^{a(x_1-x)})$$

Statt $a(x - x_1)$ führen wir die Unbekannte

$$z$$

ein und erhalten

(3)
$$\begin{cases} x = x_1 + \dfrac{z}{a}, \\ \psi(z) = 1 + (z-1)e^z = p, \quad z > 0 \\ p = \dfrac{kf(x_1)}{e^{a(x_1-c)}} \quad (> 0) \\ a > 0, \quad c \leqq x_1, \quad k \text{ wie in (2).} \end{cases}$$

II. Nach Artikel II. § 6. ergeben sich die zur Trennung ausreichenden Kriterien:

1) Genügt z der Bedingung $\psi(z) \leqq p \; (\log \psi(z) \leqq \log p)$, so liegt im Intervall $(x_1 x)$ höchstens eine Wurzel von $f(x) = 0$.

2) Ist w eine einfache Wurzel und befindet sich x_1 hinreichend nahe auf der negativen Seite derselben, so fällt x auf die positive — mit anderen Worten: Ist x_1 ein unterer Näherungswert, so ist x eine obere Grenze von w, vorausgesetzt, dass $\psi(z)-p$ hinreichend klein. (Vergl. Art. III. § 10.)

Nach § 8. III. 2) und § 9. I. (5) ergiebt sich, dass es genügt $p<1$, $z=\sqrt{p}$ zu nehmen *).

§ 37.

Der Verlauf der Functionen ψz und $\log\psi z$ (§ 36. II.) für $z>0$ erhellt aus

1) $$\psi z=\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{1!3}z^3+\frac{1}{2!4}z^4+\ldots>0 \quad (=0 \text{ für } z=0)$$

$$\psi' z=ze^z>0 \quad (\text{,, ,, ,,})$$

$$\psi'' z=(z+1)e^z>0$$

2) $$\log\psi z \lesseqgtr 0 \quad \text{für } z\lesseqgtr 1$$

$$=-\infty \quad \text{,, } z=0$$

$$\frac{d\log\psi z}{dz}=\frac{1}{ln10}\frac{\psi' z}{\psi z}>0$$

$$\frac{d^2\log\psi z}{dz^2}=\frac{1}{ln10.(\psi z)^2}(\psi z\psi'' z-(\psi' z)^2)$$

$$= \quad \text{,,} \quad (1+z-e^z)e^z \quad <0 \quad (=0 \text{ für } z=0)$$

Zugleich erkennen wir, dass und wie man die Bedingung für z in § 36. II. leicht mittelst einer Tabelle über ψz oder besser $\log\psi z$ erfüllen kann.

---

*) Anmerkung. Kriterien für die Trennung in negativem Sinne:

1) Ist $c<x_1$ so liegt zwischen x_1 und dem grössten der Werte c und $x_1-\frac{\sqrt{p}}{a}$ keine oder eine Wurzel w.

2) Ist $c<w<x_1$, so $x_1-\frac{\sqrt{p}}{a}$ eine untere Grenze von w falls x_1-w hinreichend klein, wo p wie in I. (3) und <1.

Hülfstabelle.

z	$-\log\psi z$	z	$-\log\psi z$	z	$+\log\psi z$
0,010	4,298	0,10	2,272	1,0	0,000
15	3,945	15	1,905	1,5	0,511
20	3,693	20	1,641	2,0	0,924
25	3,498	25	1,432	2,5	1,285
30	3,338	30	1,259	3,0	1,615
35	3,203	35	1,110	3,5	1,923
40	3,085	40	0,979	4	2,217
45	2,982	45	0,862	5	2,774
50	2,889	50	0,755	6	3,305
55	2,804	55	0,658	7	3,818
60	2,727	60	0,567	8	4,319
65	2,656	65	0,482	9	4,812
70	2,590	70	0,402	10	5,297
75	2,529	75	0,327	11	5,777
80	2,472	80	0,256	12	6,253
85	2,417	85	0,188	13	6,725
90	2,366	90	0,123	14	7,194
0,095	2,318	0,95	0,060	15	7,661

Anmerkung. Ist $z < 1$ so ist

$$\frac{z^2}{2} < \psi z < z^2$$

$$\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} < \;,,\; < \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2}$$

und es befriedigt

$$z = \sqrt{p}$$

obige Bedingung $\psi z < p$.

§ 38.

Wahl von c und a.

(1) Sei

$$c = x_1,$$

so wird in § 36. I. einfacher

$$p = kfx_1 = \pm C_s a^s . c_n = \psi z \quad \text{(siehe § 35. (2))}$$

daher

$$a^s = \frac{\psi z}{\pm C_s . c_n}$$

(2)

$$x = x_1 + \frac{z}{\sqrt[s]{\psi z}} \cdot \sqrt[s]{\pm C_s c_n}$$

Bei bestimmten

$$s = \varepsilon$$

hat x seinen grössten Wert, wenn dies mit

$$F_s(z) = \frac{z^s}{\psi z}$$

der Fall ist.

Differentiirt giebt

$$F_s'(z) = \frac{z^{s-1}}{(\psi z)^2}(s\psi z - z\psi' z) = \frac{z^{s-1}}{(\psi z)^2} G_s(z),$$

wo

$$G_s(z) = s\psi z - z^2 e^z$$

Die beiden ersten Derivirten hiervon sind

$$G_s'(z) = -e^z(z^2 - (s-2)z)$$
$$G_s''(z) = -e^z(z^2 - (s-4)z - (s-2))$$

Aus Vorstehendem resultirt:

1) Ist $s = 2$, so ist

$$G_s'(z) \overset{=}{<} 0 \quad \text{wenn} \quad z \overset{=}{>} 0$$

$$G_s''(z) \overset{=}{<} 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}$$

$$F_s'(z) < 0 \quad \text{„} \quad z > 0.$$

Daher nimmt $F_s(z)$ von $z = 0$ bis $z = \infty$ ab

$$(F_2(0) = 2, \quad F_2(\infty) = 0)$$

2) Ist $s > 2$, so ist

$$G_s'(z) \begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix} 0 \quad \text{für} \quad z \begin{matrix} = \\ < \\ > \end{matrix} s-2$$

$$G_s''(z) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{s-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{s-4}{2}\right)^2 + s - 2}$$

(Dies ist die Abscisse des Wendepunktes der Curve $y = G_s(z)$ und liegt zwischen $s-3$ und $s-2$).

$G_s(z) = 0$ hat nur eine pos. Wurzel

$$\overset{m}{z_s}$$

und zwar zwischen $s-2$ und $s-1$ (siehe das Weitere § 40).

$$F_s'(z) \overset{=}{\underset{<}{>}} 0 \quad \text{für} \quad z \overset{=}{\underset{>}{<}} \overset{m}{z}_s$$

folglich wächst $F_s(z)$ von $z = 0$ bis $z = \overset{m}{z}_s$

und nimmt ab „ $z = \overset{m}{z}_s$ „ $z = +\infty$

$$(F_s(0) = 0, \quad F_s(\infty) = (s-2)!\, s).$$

(3) Sei, je nachdem $f(x_1)\ (= c_n) \gtrless 0$

im Intervall

$$\overset{\pm}{k}_{n,2} = \pm\, C_s a^s$$

$$(a_s \quad a_s')$$

$$a = a_s \text{ entspreche } z = z_s$$

$$a_s' \quad „ \quad z_s'$$

$$z = \overset{m}{z}_s \quad „ \quad a = \overset{m}{a}_s.$$

Jenes grösste, vorteilhafteste x sei bezeichnet durch

$$\overset{\mathfrak{v}}{x}_s$$

die zugehörigen a und z seien

$$\overset{\mathfrak{v}}{a}_s \text{ und } \overset{\mathfrak{v}}{z}_s,$$

die überhaupt vorteilhaftesten a, z, x

$$\overset{\mathfrak{v}}{a}, \quad \overset{\mathfrak{v}}{z}, \quad \overset{\mathfrak{v}}{x}.$$

Dann ist

(4)
$$\left\{\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{v}}{z}_s = \text{dem mittleren der Werte } z_s,\ z_s',\ \overset{m}{z}_s \\ \overset{\mathfrak{v}}{a}_s = \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad a_s,\ a_s',\ \overset{m}{a}_s \\ \overset{\mathfrak{v}}{a}_2 = a_2 \end{array}\right.$$

Die Intervalle $(a_s \ a_s')$ bestimmen wir wie in Art. IV. § 14, das

$$\overset{\mathfrak{v}}{a}$$

indem wir Nachstehendes beachten.

§ 39.

I. Zunächst ist zur Bestimmung von $\overset{\mathfrak{v}}{a}$ im Art. IV. § 16. Folgendes nachzutragen.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen sei die Reihe der bei wachsendem a aufeinanderfolgenden Ausdrücke für

$$k = \overset{\pm}{k}_{n,2} = k_e:$$

$$k_{r-m} \ldots k_{r-g} \ldots k_{r-s}, \quad k_{r-t} \ldots k_{r-u} \ldots k_r,$$

wo nach § 14

$$r-2 \geqq m \ldots \geqq g \ldots \geqq s > t \ldots \geqq u \geqq 0.$$

Die Intervalle, in welchen $e = r - s \ldots$ bezeichnen wir wie früher mit $(a_s \, a_s')$ ... und setzen statt $\overset{\mathfrak{m}}{a}_{s,r}$ zur Abkürzung

$$\overset{\mathfrak{m}}{a}_s$$

Zur Verallgemeinerung der Formeln sei

$$\overset{\mathfrak{m}}{a}_0 = 0$$

$$\overset{\mathfrak{m}}{a}_{r-2} = +\infty$$

Mit

$$\overset{\mathfrak{v}}{a}_{g\ldots t}$$

werde das $\overset{\mathfrak{v}}{a}$ unter allen a zwischen a_g und a_t' bezeichnet.

Ist zunächst

$$s < r-2 \text{ und } t > 0$$

$$r - s = p, \quad r - t = q$$

$$a_s' = a_t = a_{s,t} = a,$$

so ist

$$a = \sqrt[q-p]{\frac{\binom{r}{q}}{\binom{r}{p}} \cdot \frac{c_{n-p}}{c_{n-q}}}$$

$$\overset{\mathfrak{m}}{a}_s = A_{p,r} \sqrt[p]{\frac{c_n}{c_{n-p}}}, \quad \overset{\mathfrak{m}}{a}_t = A_{q,r} \sqrt[q]{\frac{c_n}{c_{n-q}}}$$

wo

$$A_{p,r}{}^p = \frac{p\binom{r}{p}}{r(r-1)\,(z-1)^2 z^{r-2}}, \quad A_{q,r}{}^q = \frac{q\binom{r}{q}}{r(r-1)(z_1-1)^2 z_1{}^{r-2}},$$

$$z = \overset{\mathfrak{m}}{z}_{s,r}, \quad z_1 = \overset{\mathfrak{m}}{z}_{t,r}.$$

Sei

$$\frac{a}{\overset{\mathfrak{m}}{a_s}} = \sigma, \qquad \frac{a}{\overset{\mathfrak{m}}{a_t}} = \tau,$$

so folgt

$$\sigma^{p(q-p)} = \frac{\binom{r}{q}^p}{\binom{r}{p}^p C_{q,p} A_{p,r}{}^{p(q-p)}}$$

$$\tau^{q(q-p)} = \frac{\binom{r}{q}^q}{\binom{r}{p}^p C_{q,p} A_{q,r}{}^{q(q-p)}}$$

wo

$$C_{q,p} = \frac{c_{n-q}{}^p \,.\, c_n{}^{q-p}}{c_{n-p}{}^q}$$

daher

$$\frac{\sigma^p}{\tau^q} = \frac{z_s}{z_t}, \quad \text{sei} = B$$

wo

$$z_s = \frac{1}{r-s}(z-1)^2 z^{r-2}, \quad z_t = \frac{1}{r-t}(z_1-1)^2 z_1{}^{r-2}.$$

Wegen

$$\frac{r-1}{s} < z < \frac{r-2}{s} \quad \text{und} \quad \frac{r-1}{t} < z_1 < \frac{r-2}{t}$$

ist eine obere Grenze von B

$$B' = \frac{r-t}{r-s}\left(\frac{r-s-2}{r-t-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{r-2} \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^r$$

$$B' < \frac{q(p-2)^2}{p(q-1)^2} < 1,$$

da $2 < p < q$.

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sigma^s}{\tau^t} < 1.$$

Hieraus folgt

1) $\sigma > 1$ bedingt $\tau > 1$

d. h.

$$\text{(2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } \overset{\mathfrak{m}}{a_s} < a_s', \text{ so } \overset{\mathfrak{m}}{a_t} < a_t \text{ mithin } \overset{\mathfrak{m}}{a_u} < a_u \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad \overset{\mathfrak{v}}{a_t} = a_t \;\ldots\ldots\; \overset{\mathfrak{v}}{a_u} = a_u \ldots \\ \qquad \overset{\mathfrak{v}}{a}_{s\ldots u} = \overset{\mathfrak{v}}{a_s} \end{array} \right.$$

2) $\tau < 1$ bedingt $\sigma < 1$

d. h.

$$
(3)\quad \begin{cases} \text{Ist } \overset{\mathfrak{m}}{a}_t > a_t \text{ so } \overset{\mathfrak{m}}{a}_s > a_s' \text{ somit} \ldots \overset{\mathfrak{m}}{a}_g > a_g' \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \overset{\mathfrak{v}}{a}_s = a_s' \ldots\ldots\ldots \overset{\mathfrak{v}}{a}_g = a_g' \\ \quad \overset{\mathfrak{v}}{a}_{g\ldots t} = \overset{\mathfrak{v}}{a}_t \end{cases}
$$

während

$$
(4)\quad \begin{cases} 1) \text{ falls } \overset{\mathfrak{m}}{a}_s > a_s' : \overset{\mathfrak{v}}{a}_{s\ldots u} = \overset{\mathfrak{v}}{a}_{t\ldots u} \\ 2) \quad ,, \quad \overset{\mathfrak{m}}{a}_t < a_t \ : \overset{\mathfrak{v}}{a}_{g\ldots t} = \overset{\mathfrak{v}}{a}_{g\ldots s} \end{cases}
$$

Diese Formeln gelten auch für

$$u = 0, \quad g = m.$$

Dieselben besagen:

$$
(5)\quad \begin{cases} \qquad \overset{\mathfrak{v}}{a} \text{ ist ein ganz bestimmtes } a \\ \text{den Fall § 16. (2) a ausgeschlossen } (\overset{\pm}{k}_{n,2} = k_2 \text{ für jedes } a). \end{cases}
$$

Man findet

$$
(6)\quad \begin{cases} 1) \text{ wenn } a_s < \overset{\mathfrak{m}}{a}_s < a_s' : \overset{\mathfrak{v}}{a} = \overset{\mathfrak{m}}{a}_s \\ 2) \quad ,, \quad \overset{\mathfrak{m}}{a}_s > a_{s,t} > \overset{\mathfrak{m}}{a}_t : \ ,, = a_{s,t} \quad (\text{§ 16. Bspl. II.}) \end{cases}
$$

II. Zur Bestimmung von $\overset{\mathfrak{v}}{a}$ in § 38.

Seien

$$k_r \ldots k_g \ldots k_t, \quad k_t \ldots k_u \ldots k_m$$

die Ausdrücke, welche $\overset{\pm}{k}_{n,2} = k_\varepsilon$ bei wachsendem a der Reihe nach annimmt.

Wegen § 14. ist

$$r \ldots \geqq g \ldots \geqq s > t \ldots \geqq u \ldots \geqq m \geqq 2.$$

Die Bedeutung von

$$\overset{\mathfrak{v}}{a}_{g\ldots t}$$

sei wie ad I., ferner

$$\overset{\mathfrak{m}}{a}_2 = 0.$$

Ist $t > 2$

$$a_s' = a_t = a_{s,t} = a$$

so ist

$$a = \sqrt[s-t]{\frac{s!}{t!} \cdot \frac{c_{n-s}}{c_{n-t}}}$$

$$\overset{m}{a}_s = \sqrt[s]{s! \, \frac{c_{n-s}}{c_n} \, \overset{m}{\psi z_s}}$$

$$\overset{m}{a}_t = \sqrt[t]{t! \, \frac{c_{n-t}}{c_n} \, \overset{m}{\psi z_t}}$$

Die Verhältnisse

$$\sigma = \frac{a}{\overset{m}{a}_s} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{a}{\overset{m}{a}_t}$$

ergeben sich aus

$$\sigma^{s(s-t)} = \frac{s!^t}{t!^s} \cdot \frac{C_{s,t}}{(\overset{m}{\psi z_s})^{s-t}}$$

$$\tau^{t(s-t)} = \frac{s!^t}{t!^s} \cdot \frac{C_{s,t}}{(\overset{m}{\psi z_t})^{s-t}}$$

wo

$$C_{s,t} = \frac{c_{n-s}{}^t \cdot c_n{}^{s-t}}{c_{n-t}{}^s}.$$

Daher

$$\frac{\sigma^s}{\tau^t} = \frac{\overset{m}{\psi z_t}}{\overset{m}{\psi z_s}} < 1.$$

(1) . . . (6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{wie ad I.,} \quad u \geqq m, \quad g \leqq r \\ \overset{v}{a} \text{ ist in jedem Fall ein ganz bestimmtes } a. \end{array} \right.$

§ 40.

Die positive Wurzel

$$\mathfrak{z} = \overset{m}{z_s}$$

(siehe § 38.) von

$$G(z) = s - e^z(z^2 - sz + s) = s\psi z - z^2 e^z$$
$$= \left(\frac{s}{2} - 1\right) z^2 + \frac{1}{1!}\left(\frac{s}{3} - 1\right) z^3 + \frac{1}{2!}\left(\frac{s}{4} - 1\right) z^4 + \ldots,$$

wo $s > 2$, liegt zwischen $s-2$ und $s-1$, und ist in diesem Intervall

$$G'(z) < 0 \quad \text{und} \quad G''(z) < 0.$$

Nach Euler finden wir die nähere obere Grenze von $\mathfrak{z}$:

$$s-1-\frac{G(s-1)}{G'(s-1)} = s-1-\frac{e^{s-1}-s}{(s-1)e^{s-1}}.$$

Dieselbe ist grösser als

$$\mathfrak{z}' = s-1-\frac{1}{s-1} = \frac{s(s-2)}{s-1} \tag{1}$$

und es entsteht die Frage, ob auch $\mathfrak{z}'$ stets $> \mathfrak{z}$.

Es ist

$$G(\mathfrak{z}') = s\left(1-\frac{e^{\mathfrak{z}'}}{(s-1)^2}\right) < 0$$

wenn

$$(s-1)^{2(s-1)} < e^{s(s-2)}$$

oder $s-1 = t$ gesetzt

$$t^{2t} < e^{t^2-1}$$

um so mehr, wenn

$$t^{\frac{1}{t-1}} < \sqrt{e}$$

Dies ist der Fall für $t > 3$, während $t = 2$ und $t = 3$ die vorletzte Ungleichheit erfüllen.

Folglich ist auch $\mathfrak{z}'$ eine obere Grenze von $\mathfrak{z}$.

Die grösste Wurzel von

$$z^2 - sz + s$$

d. i.

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{s+\sqrt{s(s-4)}}{2}, \quad > s-2 \tag{2}$$

ist eine untere Grenze, da $G(\mathfrak{z}_1) = s > 0$.

Beides zusammengezogen:

$$\mathfrak{z} = \overset{m}{z_s} \text{ liegt zwischen } \mathfrak{z}_1 \text{ und } \mathfrak{z}'. \tag{3}$$

Hülfstabelle über $\overset{m}{z_s}$

s	$\overset{m}{z_s}$	s	$\overset{m}{z_s}$
3	1,36	6	4,75
4	2,56	7	5,80
5	3,67	8	6,83

§ 41.

I. Beispiele zur Trennung.

Bspl. I. (§ 16. Bspl. I[a].)

$$f(x) = x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0,$$

die kleinste Wurzel zu trennen.

Für $x_1 = c = 0$ ist $f(x_1) = 5000 > 0$, $k = \overset{+}{k}_{n,2}$

$$k_4 = \frac{a^4}{4!1}, \quad k_2 = \frac{a^2}{2!1998}$$

$$k_4 = k_2 \quad \text{für} \quad a = a_2 = \sqrt{\frac{2}{333}} = 0{,}0775$$

$$k = \begin{cases} k_4 \\ k_2 \end{cases} \quad \text{,,} \quad a \lessgtr a_2$$

$$\overset{\mathfrak{v}}{a} = a_2, \quad \psi z = k_2 . 5000 = 0{,}0075, \quad z = 0{,}116$$

$$\overset{\mathfrak{v}}{x} = \frac{z}{a_2} = 1{,}496.$$

Zwischen 0 und $\overset{\mathfrak{v}}{x}$ liegt folglich höchstens eine Wurzel, und da $f(1) < 0$, so in (0,1) eine, in (1; 1,496) keine. Dies ist nahezu dasselbe Resultat wie in § 16.

Bspl. II. (§ 16. Bspl. I[b].)

Die zweitkleinste Wurzel der Gleichung

$$(0) \qquad f(x) = 0 \quad \text{(wie in Bspl. I.)}$$

zu trennen und zwar von der unteren Grenze $x_1 = 1$ aus.

Die nach 1 transformirte Gleichung lautet

$$(1) \qquad x^4 - 76x^3 + 1764x^2 - 11177x - 8018 = 0$$

$$f(x_1) = -8018 < 0, \quad k = k_3 = -\frac{a^3}{3!80} \text{ für jedes } a$$

$$\psi z = \frac{8018}{3!80} a^3, \quad a = \overset{\mathfrak{v}}{a} = \overset{\mathfrak{m}}{a}_3 \text{ entsprechend } z = \overset{\mathfrak{m}}{z}_3 \overset{c^a}{=} 1{,}4, \quad \text{d. i.}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{480}{8018} \cdot 2{,}62} = 0{,}54$$

$$\overset{\mathfrak{v}}{x} = 1 + \frac{z}{a} = c^a\, 3{,}6$$

während sich nach § 16. $\overset{\mathfrak{v}}{x} = 4{,}75$ ergab.

Wir fanden in § 16. weiter, dass die Gleichung (0) zwischen

5 und 11,236
12 „ 15,75

höchstens je eine Wurzel besitzt.

Die sich analog nach dem vorliegenden Modus ergebenden Intervalle sind

(5; 9,38)
(12; 14,8)

also wieder kleiner wie in § 16.

Bspl. III. (§ 16. Bspl. I[c].)

$$f(x) = x^4 + 48x^3 + 462x^2 - 1753x + 104 = 0$$

Ein Intervall $(0, x)$ mit höchstens einer Wurzel zu bilden.

$$x_1 = c = 0, \quad f(x_1) = 104 > 0, \quad k = \overset{+}{k}_{n,2}$$

$$k_4 = \frac{a^4}{4!}, \qquad k_3 = \frac{a^3}{3!\,48}, \qquad k_2 = \frac{a^2}{2!\,462}$$

$$\left.\begin{aligned} k_4 = k_3 \quad \text{für} \quad a = a_{4,3} &= \frac{1}{12} = 0{,}0833 \\ = k_2 \quad „ \qquad a_{4,2} &= \sqrt{\frac{2}{77}} = 0{,}1609 \end{aligned}\right\} a_4' = a_{4,3}$$

also wegen § 14. Hülfssatz I. $\qquad a_3' = a_{3,2} = \frac{24}{77} = 0{,}311$

sodass sich k wie folgt darstellt:

$$\begin{array}{lcccc} a = 0 & & \frac{1}{12} & \frac{24}{77} & \infty \\ k = & k_4 & & k_3 & k_2 \end{array}$$

Weiter ist $\overset{m}{a}_3 = c^a \sqrt[3]{7} > a_{3,2} > \overset{m}{a}_2 = 0.$

Daher nach § 39. II. $(6)_2$

$$a = \overset{\mathfrak{v}}{a} = a_{3,2} = \frac{24}{77}$$

$$\psi z = k_2 . 104 = 0{,}0109, \qquad z = 0{,}14$$

$$x = \overset{\mathfrak{v}}{x} = \frac{z}{a} = 0{,}45,$$

d. i. wieder annähernd dasselbe Resultat wie in § 16.

Bspl. IV. (§ 16. Bspl. II.)

$$f(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 0.x + 5 = 0.$$

Ein Intervall $(0\ x)$ zu berechnen, das nicht mehr als eine Wurzel in sich schliesst.

Man findet

$$a_4 = \frac{10}{3} = a_{5,4} < \overset{\mathfrak{m}}{a_4} = 5{,}59 < a_4' = +\infty,$$

folglich nach § 39. II. $(6)_1$:

$$\overset{\mathfrak{v}}{a} = 5{,}59$$

und ist daher die Feststellung der Intervalle, in welchen $k = k_6$ und $k = k_5$, sowie die Untersuchung dieser, d. h. die Ermitttelung von $\overset{\mathfrak{v}}{a}_5$ und $\overset{\mathfrak{v}}{a}_6$ erspart.

$$z = \overset{\mathfrak{m}}{z_4} = 2{,}6$$

$$x = \overset{\mathfrak{v}}{x} = \frac{z}{\overset{\mathfrak{v}}{a}} = 0{,}465,$$

kleiner als das in § 16. gefundene $\overset{\mathfrak{v}}{x} = 0{,}492$.

Bspl. V. (§ 16. Bspl. III.)

$$f(x) = x^{14} - 2x^{11} + x^{10} + 3x^9 + 5x^6 - 3x^4 + x^2 + 0.x + 1 = 0$$

x wie vor zu bestimmen.

Es ergiebt sich

$$a_{14}' = a_{14,2} = a_2 = \sqrt[12]{\frac{14!}{2}}$$

$$\overset{\mathfrak{m}}{a_{14}} > a_2, \quad \text{daher} \quad \overset{\mathfrak{v}}{a} = a_2, \quad \psi z = \frac{a_2^2}{2}$$

$$x = \overset{\mathfrak{v}}{x} = 0{,}36,$$

$$> \overset{\mathfrak{v}}{x} \text{ in § 16.} = 0{,}245.$$

II. Vorstehende Beispiele zeigen, dass das $\overset{\mathfrak{v}}{x}$ nach § 38.

$$\overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{x}} \gtreqless \overset{\mathfrak{v}}{x} \text{ nach § 16.}$$

sein kann und wollen wir im Folgenden versuchen, einfache Merkmale für das Eintreten des einen und des anderen Falles aufzustellen.

Die Bedingungen, mit denen wir uns zu beschäftigen haben, sind

$$v = \frac{\overset{\mathfrak{v}}{x} - x_1}{\overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{x}} - x_1} \overset{=}{\lessgtr} 1.$$

Die lateinischen Buchstaben bei dem vorliegenden „Modus II." mögen durch die entsprechenden deutschen ersetzt werden; da wo Verwechselungen mit den gleichlautenden Bezeichnungen bei dem früheren „Modus I." stattfinden können. Hiernach ergiebt sich die Bedeutung von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}_t$ ... Statt $\overset{\mathfrak{m}}{z_s}$ ... werde kürzer ... $\mathfrak{z}_s$ gesetzt, $\mathfrak{z}_2 = 0$, $\overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}_1} = 0$.

§ 42.

Sei wie früher die nach c Transformirte von $f(x) = 0$

$$f(x+c) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots c_{n-1} x + c_n.$$

Diejenigen Glieder unter

$$c_0 x^n, \quad c_1 x^{n-1} \dots c_{n-2} x^2$$

welche dasselbe Vorzeichen wie c_n haben, seien

(1) $$c_{n-r} . x^r \quad \dots \quad c_{n-q} . x^q \dots c_{n-t} x^t,$$

so dass

$$n \geqq r \dots \geqq q \dots \geqq t \geqq 2$$

der Fall, dass, wie in § 41. Bspl. II.

die Anzahl der Glieder in (1) $= 1$

lässt sich leicht erledigen.

Es ist nämlich

$$\overset{\mathfrak{v}}{x} - x_1 = \sqrt[r]{\frac{1}{r-1} \cdot \frac{c_n}{c_{n-r}}}$$

$$\overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{x}} - x_1 = \sqrt[r]{\frac{1}{r!} \frac{c_n}{c_{n-r}} \frac{\mathfrak{z}^r}{\psi \mathfrak{z}}}$$

wo $$\mathfrak{z} = \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{z}}.$$

Daher

$$v^r = \frac{r!}{r-1} \frac{\psi \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^r} > 1$$

für jedes $\mathfrak{z} > 0$, mithin auch für $\mathfrak{z} = \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{z}}$, d. h.

$$\overset{\mathfrak{v}}{x} > \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{x}}.$$

§ 43.

Die Anzahl der Glieder in § 42. (1) sei $= 2$.

I. Aus Art. IV, § 13. folgt:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Zwischen } x_1 = c \text{ und } x \text{ liegt höchstens eine Wurzel von } f(x) = 0, \text{ wenn} \\ x = x_1 + a(z-1) \\ z > 1, \quad \overset{q}{a} = \binom{r}{q} \cdot \dfrac{c_n}{c_{n-q}} \cdot \dfrac{1}{\varphi_r(z)} \\ q = \begin{cases} t \\ r \end{cases}, \quad \text{falls } \varphi_r(z) \gtrless \dfrac{c_n}{c_{n-r}} \cdot \dfrac{1}{a_0{}^r} = \binom{r}{t} \dfrac{c_n}{c_{n-t}} \cdot \dfrac{a}{a_0{}^t}; \end{cases}$$

ferner aus § 16. (siehe § 39. I.)

$$\left(\frac{\overset{\mathfrak{m}}{a_{s,r}}}{a_0}\right)^t = \sqrt[r-t]{\binom{r}{t}^t} \cdot \frac{t\binom{r}{t}}{r(r-1)(\mathfrak{m}-1)^2\mathfrak{m}^{r-2}} \cdot C, \quad \text{sei} = \frac{1}{a} C$$

wo

$$(2)\qquad C^{r-t} = \frac{c_{n-r}{}^t \, c_n{}^{r-t}}{c_{n-t}{}^r}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \overset{\mathfrak{n}}{a} = a_0 \quad \text{wenn} \quad C > \alpha \\ \quad = \overset{\mathfrak{m}}{a_{s,r}} \quad ,, \quad\quad < \end{cases}$$

II. Aus § 36. resultirt:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Zwischen } x_1 = c \text{ und } \mathfrak{x} \text{ hat } fx = 0 \text{ höchstens eine Wurzel, wenn} \\ \mathfrak{x} = x_1 + \dfrac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{z} > 0, \quad \mathfrak{a}^q = q!\dfrac{c_{n-q}}{c_n}\psi\mathfrak{z} \\ q = \begin{cases} t \\ r \end{cases}, \quad \text{falls } \psi\mathfrak{z} \gtrless \dfrac{1}{t!}\dfrac{c_n}{c_{n-t}}\mathfrak{a}_t{}^t = \dfrac{1}{r!}\dfrac{c_n}{c_{n-r}}\mathfrak{a}_t{}^r \end{cases}$$

ferner aus § 39. II.:

$$(2)\quad \begin{cases} \text{Hat } C \text{ die Bedeutung wie in I., } \mathfrak{z}_t \ldots \text{ wie in § 41. II.} \\ \beta = \dfrac{\mathfrak{z}_t{}^2 e^{\mathfrak{z}_t}}{s\sqrt[t]{\dfrac{r!^t}{t!^r}}}, \quad \gamma = \dfrac{\mathfrak{z}_r{}^2 e^{\mathfrak{z}_r}}{s\sqrt[r]{\dfrac{r!^t}{t!^r}}} > \beta \quad (\text{wegen § 39. II. (1)}), \end{cases}$$

so ist

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{a}} &= \overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}_t \quad \text{wenn} \quad C < \beta \\ &= \overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}_r \quad \text{,,} \quad\quad > \gamma \\ &= \mathfrak{a}_t \quad \text{,,} \quad \beta < C < \gamma \end{aligned}\right.$$

III. Darstellung von v (§ 41. II.)

$$(1)\qquad v = \frac{x - x_1}{\mathfrak{x} - x_1} = a\mathfrak{a}\,.\frac{z-1}{\mathfrak{z}}$$

wo

$$a = \overset{\mathfrak{v}}{a}, \quad \mathfrak{a} = \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{a}}.$$

Die Ausdrücke, welche die rechte Seite in (1) annimmt, wenn man

$$a = \left\{\begin{array}{l} a_0 \\ \overset{\mathfrak{m}}{a}_{s,r} \end{array}\right. \text{und } \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_t,\ \overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}_r,\ \overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}_t \text{ setzt, seien } \left\{\begin{array}{l} v_1,\ v_2,\ v_3 \\ v_4,\ v_5,\ v_6 \end{array}\right.$$

v stellt sich wegen I. (3) und II (3) wie folgt dar:

1) $t = 2$

Da $\alpha = 0$, $\beta = 0$, so ist

$$v = \left\{\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \end{array}\right., \text{ falls } C \lessgtr \gamma.$$

2) $t > 2$

Fall	Aufeinanderfolge von α, β, γ C	v
I.	$0 \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \infty$	
	C	v_6
	C	v_3
	C	v_1
	C	v_2
II.	$0 \quad \beta \quad \alpha \quad \gamma \quad \infty$	
	C	v_6
	C	v_4
	C	v_1
	C	v_2
III.	$0 \quad \beta \quad \gamma \quad \alpha \quad \infty$	
	C	v_6
	C	v_4
	C	v_5
	C	v_2

Man findet

$$v_1 = \sqrt[s]{s!} \cdot \frac{z-1}{\mathfrak{z}}$$

wo

$$\varphi_r(z) = C \cdot \sqrt[s]{\binom{r}{t}^r}, \quad \psi \mathfrak{z} = C \cdot \sqrt[s]{\frac{r!^t}{t!^r}}.$$

$$\left.\begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix}\right\} = \frac{z-1}{\mathfrak{z}m} \sqrt[m]{m!\binom{m}{r}\frac{\psi \mathfrak{z}m}{\varphi_r \mathfrak{z}}}$$

wo

$$m = \left\{\begin{matrix} r \\ t \ (> 2) \end{matrix}\right., \quad \varphi_r(z) \text{ wie vor.}$$

$$v_4 = \frac{\sqrt[t]{\lambda \psi \mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}}$$

wo

$$\lambda = t!(\overset{m}{z_{s,r}} - 1)^t A_{t,r} = (r-2) \ldots (r-t+1) t \frac{(\overset{m}{z_{s,r}} - 1)^{t-2}}{\overset{m}{z_{r,1}}^{r-2}}$$

$\psi \mathfrak{z}$ wie vor.

$$v_5 = \frac{\overset{m}{z_{s,r}} - 1}{\mathfrak{z}r} A_{t,r} \sqrt[r]{r!\,\psi \mathfrak{z}r} \cdot \sqrt[tr]{C^s}, \quad \text{sei} = \sqrt[tr]{\left(\frac{C}{D}\right)^s}$$

$$v_6 = (\overset{m}{z_{s,r}} - 1) A_{t,r} \frac{\sqrt[t]{t!\,\psi \mathfrak{z}t}}{\mathfrak{z}t} = \sqrt[t]{E}$$

wo

$$E = (r-2) \ldots (r-t+1) \frac{(\overset{m}{z_{s,r}} - 1)^{t-2}}{\overset{m}{z_{s,r}}^{r-2}} \cdot \frac{e^{\mathfrak{z}t}}{\mathfrak{z}t^{t-2}}.$$

Bei gegebenen t und r, unabhängig veränderlichen Coefficienten $c_0, c_1 \ldots c_n$ kann man sich die $v_1 \ldots v_6$ als Functionen von

$$C = c_n \sqrt[r-t]{\frac{c_{n-r}{}^t}{c_{n-t}{}^r}}$$

ausgedrückt denken, mithin setzen

$$v = V(C),$$

unter V eine stetige, endliche Function verstanden.

Die in Bezug auf rechtwinklige Achsen hierdurch dargestellte Curve setzt sich aus Bögen von vier der Curven

$$v_1 = V_1(C) \quad \dots \quad v_6 = V_6(C)$$

zusammen.

§ 44.

I. Untersuchung der Bedingungen $v_1 \gtreqless 1 \dots v_6 \gtreqless 1$.

Es ist

$$v_1 \gtreqless 1 \quad \text{je nachdem} \quad F_1(z) \gtreqless 0$$

wo

$$F_1(z) = \psi(\lambda(z-1)) - \mu_r \varphi_r(z),$$
$$F_1(1+y) = A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots A_p y^p + \dots$$

Für $p < r$ (nicht $= r-s$) ist $A_p = (p-1)\mu^p(1-\mu_{r-p}) > 0$

„ $> r$ „ „ $= (p-1)\mu_p > 0$

„ $= \begin{cases} r-s \\ r \end{cases}$ „ „ $= 0$.

$$\lambda = \sqrt[s]{s!}, \quad \mu_r = \frac{\lambda^r}{r!}.$$

$F_1(z) = 0$ hat a) keine Wurzel > 1

b) eine solche z_1'

c) 2 „ z_1' und z_1''

(1)
ad a) ist $v_1 > 1$ für jedes z, mithin für jedes C

„ b) $\lesseqgtr$ „ $z \lesseqgtr z_1'$ „ „ $C \lesseqgtr C_1'$

„ c) < 1 „ $z_1' < z < z''$ „ „ $C_1' < C < C_1''$.

$\overline{\overline{>}}$ . . . . „ „ $C \overline{\overline{<}} C_1'$ oder $\overline{\overline{>}} C_1''$

wo

$$C_1' = \frac{\varphi_r(z_1')}{\sqrt[s]{\binom{r}{t}^r}}, \quad C_1'' = \frac{\varphi_r(z_1'')}{\sqrt[s]{\binom{r}{t}^r}}$$

Fall a) findet z. B. statt, wenn $s = 1$; $s = 2$, $r > 4$; $s = 3$, $r > 7$; $s = 4$, $r > 14$.

b) wenn $s = r - 2$ und > 1, d. h. $t = 2$ und $r > 3$.

Für $r = 4$ und $r = 5$ erhält man $z_1' = 2{,}12$ bezügl. $= 2{,}87$.

c) wenn $s > 1$ und $< r - 2$, d. h. $t > 2$ und $r > t + 1$.

Ist z. B. $t = 3$, $r = 6$ so $z_1' = 1{,}83$, $z_1'' = 3{,}25$

t	r	z_1'	z_1''
3	6	1,83	3,25
	7	1, ..	3, ..
4	7	2, ..	3, ..
	8	2, ..	4, ..

$$v_2 \gtreqless 1 \text{ wenn } F_2(z) \gtreqless 0$$

$$= (r_m)\lambda_m(z-1)^m - \varphi_r(z), \quad \text{wo } m = r$$

$$F_2(1+y) = \underbrace{(\lambda_r - (r-1))}_{+}y^r - \binom{r}{1}(r-2)y^{r-1} - \binom{r}{2}(r-3)y^{r-2} .. - \binom{r}{2}y^2$$

$$\lambda_m = m!\,\frac{\psi \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{z}_m} = (m-1)!\,\frac{e^{\mathfrak{z}_m}}{\mathfrak{z}_m{}^{m-2}}$$

$F_1(z) = 0$ hat Eine Wurzel $z_2' > 1$ und es ist

$$v_2 \lesseqgtr 1 \quad \text{wenn} \quad C \lesseqgtr C_1' = \frac{\varphi_r(z_2')}{\sqrt[s]{\binom{r}{t}^t}} \tag{2}$$

Ist z. B. $r = 3$ so $z_2' = 1{,}8$

4 „ 2,8

$$v_3 \gtreqless 1 \quad \text{falls} \quad F_3(z) \gtreqless 0$$

$$\text{„ wie } F_2(z), \quad m = t$$

$$-F_3(1+y) = (r-1)y^r$$
$$+\binom{r}{1}(r-2)y^{r-1} + \ldots \binom{r}{t}\underbrace{(-\lambda_t + (t-1))}_{-}y^t \ldots + \binom{r}{2}y^2.$$

$F_3(z) = 0$ hat höchstens 2 Wurzeln > 1.

Sind dieselben z_3' und z_3'', die entsprechenden C: C_3' und C_3'', so

$$(3)\quad \begin{cases} v_3 > 1 \text{ wenn } C_3' < C < C_3'' \\ \stackrel{=}{<} \quad \text{,,} \quad C \stackrel{=}{<} C_3' \text{ oder } C \stackrel{=}{>} C_3''. \end{cases}$$

Ist speciell $t = 3$, so $\lambda_t = 5{,}73$

$$F_3(z) = -(r-1)z^r + r \cdot z^{r-1} + \binom{r}{3} 5{,}73 \cdot (z-1)^3 - 1.$$

Diese Gleichung hat, falls $r < 18$ zwei Wurzeln > 1, getrennt durch $1 + \frac{2}{r-1}$. Ist z. B. $r = 4, 5, 6$, so ist $z_3' = 1{,}44;\ 1{,}2;\ 1{,}2$ und $z_3'' = 5{,}53;\ 2{,}9;\ 1{,}8$.

$$v_4 \stackrel{=}{\gtrless} 1 \text{ wenn } F_4(\mathfrak{z}) \stackrel{=}{\gtrless} 0$$

$$= \lambda \psi \mathfrak{z} - \mathfrak{z}^t, \quad \lambda \text{ wie in § 43.}$$

$F_4(\mathfrak{z}) = 0$ hat a) keine oder b) 2 pos. Wurzeln z_4' und z_4''.

$$(4)\quad \begin{cases} \text{ad a) ist } v_4 > 1 \\ \text{b)} \qquad < 1 \text{ wenn } C_4' < C < C_4'' \\ \qquad \text{sonst} \stackrel{=}{>} 1 \end{cases}$$

wo

$$C_4' = \frac{\psi z_4'}{\sqrt[s]{\frac{r!^t}{t!^r}}}, \quad C_4'' = \frac{\psi z_4''}{\sqrt[s]{\frac{r!^t}{t!^r}}}$$

Fall a) findet z. B. statt, wenn $t = 3$ und $r = 4, 5, 6, 15$.

Ob Fall b) möglich ist, sei dahingestellt.

$$(5)\qquad v_5 \stackrel{=}{\gtrless} 1 \text{ wenn } C \stackrel{=}{\gtrless} D$$

(D ist nur abhängig von r und t).

$$(6)\qquad v_6 \stackrel{=}{\gtrless} 1 \text{ falls } E \stackrel{=}{\gtrless} 1.$$

(E wie D constant).

II. Die Bedingungen $v \stackrel{=}{\gtrless} 1$ in besonderen Fällen.

a) $t = 2$.

Ist $r = 3$, so ist $V_1(C) > 1$ für jedes C, also auch für $C = \gamma$ d. i. $V_2(\gamma) > 0$, folglich $v_2 = V_2(C) > 1$ für $C > \gamma$, sodass $v > 1$,

$$\overset{\mathfrak{v}}{x} > \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{x}}.$$

Ist $r = 4; 5; 6$ so ist $v \gtreqless 1$ wenn $\log C \gtreqless \log C_1' = 0{,}79 - 1$; $1{,}003$; $1{,}58$.

Im Folgenden haben wir es mit Fall I. *) in § 43. III. zu tun:

$$\begin{array}{cccccc} C = 0 & \alpha & \beta & \gamma & \infty \\ v = & v_6 & v_3 & v_1 & v_2 \\ & C_I & C_{II} & C_{III} & C_{IV} \end{array}$$

Es möge jedes C in den sich folgenden Intervallen von C repräsentiren, sodass $0 < C_I < \alpha$ u. s. w.

b) $t > 2$, $r = t + 1$.

Es ist 1) $v_1 = V_1(C) > 0$, mithin 2) $V(\beta) > 0$, 3) $V(\gamma) > 0$ und 4) $V(C_{III}) > 0$.

Aus 3) und I. folgt 5) $V(C_{IV}) > 0$.

Ferner ist wegen $E > 0$: 6) $V(\alpha) > 0$ und 7) $V(C_I) > 0$.

Aus 2), 6) und I): 8) $V(C_{II}) > 0$.

„ 7), 8), 4), 5): $v = V(C) > 1$. $\quad \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{x}} > \overset{\mathfrak{v}}{x}$.

Ebenso in den Fällen $t = 3$, $r = 5$ und $t = 4$, $r = 6$.

c) $t = 3$, $r = 6$.

Man findet $\log C_1' = 0{,}52$, $\log C_1'' = 2{,}27$, $\log C_2' = 2{,}31$, $\log \beta = 0{,}08 - 1$, $\log \gamma = 1{,}37$.

Daher

$$\beta < C_1' < \gamma < C_1''$$

und

$$\gamma < C_2'.$$

$$V(0) = V(\alpha) = \sqrt[t]{E} > 1, \quad V(\beta) > 1, \quad V(\gamma) < 1, \quad V(\infty) > 1.$$

---

*) Ob die Fälle II. und III. eintreten können, lassen wir dahingestellt sein.

1) $v = V(C) = 1$ für C_1' und C_2'
2) $<$ wenn $C_1' < C < C_2'$
3) $>$ „ $C < C_1'$ oder $> C_2'$.

ad 1), 2), 3) $\overset{\mathfrak{v}}{x} \begin{smallmatrix} = \\ < \\ > \end{smallmatrix} \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{x}}$.

In dieser Weise lässt sich leicht für beliebige t und r ein für alle Mal feststellen, ob Modus I. oder II. grössere Intervalle liefert.

§ 45.

I. Die Anzahl der Glieder in § 42. (1) sei beliebig, ferner $t > 2$, und c_n hinreichend klein, und zwar:

$$(a_t = 0 <)\overset{\mathfrak{m}}{a}_{r-t,r} = \sqrt[t]{\binom{r}{t} \frac{c_n}{c_{n-t}} \cdot \frac{1}{\overset{\mathfrak{m}}{\varphi}_r(z_{r-t,r})}} < a_t'$$

$$\mathfrak{a}_t < \overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}_t = \sqrt[t]{t!\, \frac{c_{n-t}}{c_n} \overset{\mathfrak{m}}{\psi}(z_t)} \quad (\mathfrak{a}'_t = \infty)$$

Nach § 39 $\left\{\begin{matrix} \text{I.} \\ \text{II.} \end{matrix}\right.$ $(6)_1$ ist

$$\overset{\mathfrak{v}}{a} = \overset{\mathfrak{m}}{a}_{r-t}, \quad \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{a}} = \overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}_t.$$

Es folgt hieraus:

(1) $v = v_6 = \sqrt[t]{E} \begin{smallmatrix} = \\ > \\ < \end{smallmatrix} 1$ je nachdem $E \begin{smallmatrix} = \\ > \\ < \end{smallmatrix} 1$ (§ 43. III.)

Bsple.: 1) $t = 3,\ r = 5$. 2) $t = 3,\ r = 6$.

$$E > 1 \text{ daher } v > 1,\ \overset{\mathfrak{v}}{x} > \overset{\mathfrak{v}}{\mathfrak{x}} \quad (\text{§ 44. II.})$$

Anwendung. Ist $f(\omega) = 0,\ f'(\omega) > 0,$

$$f''(\omega) > 0 \underbrace{\ldots}_{>0} f^t(\omega) < 0 \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{teils } >,\ <0} f^r(\omega) < 0 \underbrace{\ldots}_{>0}$$

so gilt (1) für jedes $c = x_1$, welches hinreichend nahe auf der negativen Seite der Wurzel ω liegt.

Ebenso wenn

$$f'(\omega) < 0,\ f''(\omega) < 0 \underbrace{\ldots}_{<0} f^t(\omega) > 0 \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{teils } >,\ <0} f(\omega)^{r(=n)} > 0.$$

II. Jede Gliederzahl sei > 2, jedoch nehme bei Modus II. $k = k_{n,2}$ und die Ausdrücke k_r und k_t an. (Bspl. V. in § 41. I.): d. h. es sei für jedes der q in § 42.

$$(1) \qquad Aq > Q$$

wo

$$Aq = \frac{c_{n-t}{}^{r-q}\, c_{n-r}{}^{q-t}}{c_{n-q}{}^{r-t}}, \qquad Q = \frac{q!^{r-t}}{r!^{q-t}\, t!^{r-q}}.$$

Die analogen Bedingungen bei Modus I. sind zusammengefasst in

$$(2) \qquad Aq > Q_1 = \frac{\binom{r}{t}^{r-q}}{\binom{r}{q}^{r-t}}.$$

Da

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{(r-t)!^{r-q}}{(r-q)!^{r-t}} > 1,$$

so hat (1) die Bedingungen (2) zur Folge, sodass bei Modus I. ebenfalls nur $k = k_r$ und $k = k_t$ in Betracht kommen.

Der vorliegende Fall ist somit auf den in § 43. zurückgeführt.

§ 46.

Wendet man § 3., Krit. III. speciell auf die Curven $F(x) = e^{a(x-c)}$, $\mathfrak{F}(x) = F(x) - kf(x)$ an, wo $a > 0$, $k =$ (oder $<$) $\overset{\pm}{k}_{n,2}$ falls $f(x_1) \lessgtr 0$ (siehe § 35. (2)), so erhält man folgende Kriterien zur Annäherung an die Wurzeln:

1) in pos. Sinne.

Ist $x_1 \geqq c$, $z > 0$ und $G(z) = e^z - \frac{\mathfrak{F}'(x_1)}{F'(x_1)} z + \frac{kf(x_1)}{F(x_1)} - 1 < 0$, so liegt zwischen x_1 und $x = x_1 + \frac{z}{a} (> x_1)$ keine Wurzel von $f(x) = 0$.

2) in neg. Sinne.

Ist $x_1 > c$, $z < 0$ und $G(z) \lessdot 0$, so hat $f(x) = 0$ zwischen

$$x_1 \text{ und } x = \begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{z}{a} (< x_1) \\ c \end{cases}$$

keine Wurzel, je nachdem $x_2 \gtrless 0$.

Specielle Lösungen sind:

ad 1) $x = x_1 + ln\left(1 - \frac{kf(x_1)}{\mathfrak{F}(x_1)}\right)$

ad 2) $x_2 = x_1 + \frac{kf(x_1)}{\mathfrak{F}'(x_1)}$,

wo k wie oben, und zugleich $kf'(x_1) < F'(x_1)$ (d. i. $\mathfrak{F}'(x_1) > 0$).

Die bisherigen Kriterien lassen sich auch auf transcendente Gleichungen ausdehnen, wir kommen hierauf näher zurück.

XXVI.

Neuer Ellipsograph.

Von

Herrn **D. Sidersky**, stud. phil. in Berlin.

Das Instrument hat den Zweck, eine Ellipse entweder nach gegebenen Achsenlängen, oder wenn eine Achse und ein Brennpunkt gegeben sind, zu construiren.

Dasselbe beruht auf folgender kinematischen Betrachtung:

Man nehme zwei einander gleiche Linien $AB = CD$ (Fig. 1.) und verbinde sie mit einander durch zwei andere (längere als die ersten) einander kreuzende Linien $AD = BC$, so wird man leicht bemerken, dass, wenn man eine der kürzeren Linien, z. B. AB, festhält und die zweite, nämlich CD, in Bewegung bringt, das Viereck $ABCD$ immer ein gleichschenkliges Trapez bildet, dessen Schenkel AB und CD, und dessen Diagonalen AD und BC sind. Bezeichnet man den Durchschnittspunkt der Diagonalen mit E, so wird $AE = CE$ und $BE = DE$ sein; weshalb

$$AE + BE = AE + DE = AD,$$

d. h. die Summe der Entfernungen des Punktes E von A und B ist immer constant und zwar gleich einer der Diagonalen $AD = BC$. Also ist der geometrische Ort des Punktes E eine Ellipse, deren X-Achse $= AD = BC$, und deren Brennpunkte A und B sind.

Der Ellipsograph besteht aus vier platten Stäben, welche paarweise gleich sind, von denen $AB = CD$ die kürzeren, und $AD = BC$ die längeren sind. Die Breite aber, sowie die Stärke sind bei allen

gleich, und zwar die Stärke $= \frac{1}{3}$ der Breite. An einer der Ecken hat jeder Stab eine kleine Charnieröffnung, und zwar: AB und BC in B, AD und CD in D. In einer geringen Entfernung von dieser Oeffnung, wie in Fig. 2. dargestellt ist, hat jeder Stab einen langen prismatischen Schlitz, dessen Breite $= \frac{1}{3}$ der Breite des Stabes ist, so, dass durch die Kanten des Schlitzes die Breite des Stabes in gleiche Teile geteilt ist. Dieser prismatische Schlitz verlängert sich bis zu einem kleinen Abstande von der Ecke des Stabes. Die Stäbe AB und BC (Fig. 3.) sind mittelst eines nach Fig. 5. eingerichteten Charniers in B verbunden. Ebenso sind AD und CD durch ein solches Charnier, über dessen Eigenschaften noch weiter gesprochen wird, in D verbunden. Die Verbindung der Stäbe AB und AD in A, sowie die Verbindung der Stäbe BC und CD in C, ist aber auf eine andere Art eingerichtet, nämlich durch dazu geeignete Vorrichtungen. Letztere bestehen, wie Fig. 4. anzeigt, aus zwei auf einander liegenden Kuben a und a_1, die in den prismatischen Schlitzen der Stäbe genau einpassen, aber auch herumgeschoben werden können. Auf der oberen Ebene des obenliegenden, sowie auf der unteren Ebene des untenliegenden Kubus ist eine dünne Platte befestigt, deren Breite dem Kubus gleich ist; die Länge aber ist der Breite des Stabes gleich und hat an einem der Enden eine rechtwinklig ausgebogene, quadratförmige Verlängerung, in welcher eine kleine Schraube c sitzt. Jeder Kubus liegt in dem Schlitze jedes Stabes und die auf ihm befestigte Platte bedeckt ein wenig die Breite und die Stärke des Stabes (von einer Seite). Mittelst der Schraube c kann der Kubus a an einer beliebigen Stelle des Schlitzes befestigt werden. Die beiden Kuben a und a_1, von welchen a im Schlitze des Stabes AD, und a_1 im Schlitze des Stabes AB herumgeschoben wird, sind miteinander durch ein einfaches Charnier verbunden, wodurch AB und AD um den durch diese Vorrichtung festgestellten Punkt A sich frei herumdrehen können. Ebenso sind BC und CD durch ein in ihren Schlitzen herumgeführtes Charnier verbunden. Also kann man die Länge der Entfernungen AB, CD, AD und BC, ganz beliebig bestimmen.

Die Lage der Stäbe ist folgende: AB und BC liegen auf AB und unter CD, und kreuzen einander; und zwar liegt AD unter BC. Im Kreuzungspunkte E der Schlitze der Stäbe AD und BC sitzt eine, aus zwei auf einanderstehenden, in die Schlitze genau passenden, durch ein Charnier mit einander verbundenen Cylindern bestehende Vorrichtung (Fig. 6.), bei welcher von oben, d. h. über dem in BC gehenden Cylinder, ein Griff, und von unten, nämlich unter dem in AD gehenden Cylinder eine Stelle für Bleistift, Reissfeder etc. angebracht sind. Das festsitzende Charnier B, und das in den Schlitzen der Stäbe AB und AD herumführende Charnier A, besitzen von unten

zwei Stifte (oder Nadeln), welche dazu dienen, das Instrument auf dem Papier festzuhalten.

Um die Ellipse nach den gegebenen Achsen zu zeichnen, macht man $AD = BC =$ der grossen Achse, und $AB = CD =$ dem Abstande der beiden Brennpunkte der betreffenden Ellipse (was leicht zu finden ist, wenn die Achsen bekannt sind). Dann setzt man die Stifte A und B in die Brennpunkte ein und bringt den Punkt E in Bewegung, wodurch der untensitzende Bleistift (oder Reissfeder) die Ellipse beschreibt.

Es ist noch zu bemerken, dass, wenn E in die Endpunkte der grossen Achse fallen soll, die Punkte A, B, C, D und E in einer graden Linie liegen müssen, d. h. je zwei Stäbe müssen die andern zwei vollständig bedecken. Das kann aber nur in einem Falle geschehn, nämlich, wenn A seine Stellung zwischen B und C nimmt, d. h. wenn E in den bei A befindlichen Endpunkt fällt. Im zweiten Falle, d. h. wenn B zwischen A und D kommen soll, kann der Stab AD wegen des Charniers B nicht genau unter BC hinuntergehen und die Ellipse wird nicht mit einem Male beschrieben werden können. Um dieser Unbequemlichkeit auszuweichen sind für B und D geeignete Charniere nach Fig. 5. eingerichtet; d. h. jedes Charnier ist von beiden Seiten kurbelartig; die äusseren Teile des Stiftes nämlich, die in den Oeffnungen der Stäbe sitzen, liegen in einer graden Linie, der mittelste Teil aber ist durch zwei Querlinien mit den äusseren verbunden, so dass AD zwischen die Querlinien kommend, vollständig genau auf AB und unter BC liegen kann. Die Länge der Querlinien ist etwas grösser als die Hälfte der Breite der Stäbe und die Charniere sind so eingerichtet, dass sie bei leichtem Druck in Bewegung kommen.

XXVII.

Miscellen.

1.

Bemerkungen betreffend die Auflösung eines Knotens in vierter Dimension.

Im LXXXII. Bande der Sitzungsberichte der k. böhmischen Akademie der Wissenschaften erschien kürzlich ein Artikel von H. Durège: „Ueber die Hoppe'sche Knotencurve.“ Sie schliesst sich an meinen Artikel, T. LXIV. des Archivs S. 224. „Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten nebst Auflösung in 4. Dimension“, an und untersucht mehrere Fragen, auf die jener nicht eingegangen war. Namentlich ist darin der Nachweis geführt, dass die Curve bei Uebergang in den Kreis im Dreidimensionenraum einmal und nur einmal einen Doppelpunkt bilden muss, und dieser analytisch dargestellt. Wird hierdurch die Untersuchung wesentlich vervollständigt, so scheint mir dagegen der vorhergehende Nachweis, dass der allen 4 Coordinaten beigegebene Factor $f(t)$, welcher zur Erhaltung der unveränderten Länge der Curve dient, nicht unendlich gross wird, eher entbehrlich. Der gedachte Fall würde der einer Curve sein, die in einen Punkt degenerirt, was schon ohnedies unzulässig ist, und sichtlich nie eintritt, weil für keinen Wert von t alle Coordinaten unabhängig von u werden.

Sehr erwünscht musste es mir sein, dass der Verfasser, und zwar gleich anfangs, einen Fehler zur Anzeige bringt. Die 4. Coordinate ist nämlich angegeben $w = u \sin t f(t)$. Da dieser Ausdruck während des Uebergangs nie auf seinen Anfangswert zurückkommt, so ist die Curve ebenso lange nicht geschlossen.

Der Fehler ist am einfachsten dadurch zu berichtigen, dass man setzt:

$$w = \sin u \sin t\, f(t)$$

Da jedoch alsdann die Coordinate im Intervall der u jeden Wert zweimal annimmt, so wird der Nachweis erforderlich, dass den 2 Werten von u kein Doppelpunkt entspricht, d. h. dass nicht gleichzeitig x, y, z ihre Werte behalten, wenn man $-\cos u$ für $\cos u$ substituirt. Die 2 Werte von x haben die Differenz

$$\cos u (3 + \cos t) f(t)$$

die nur für $u = \mathrm{R}$ oder $u = 3\mathrm{R}$ verschwindet. Für beide aber fallen die 2 Werte von u selbst zusammen, so dass kein Doppelpunkt entsteht.

Ferner ist ein Einwand zu untersuchen, der mir mündlich zugekommen ist. Man kann nämlich fragen, ob das, was von der Curve als Repräsentant des Bandes nachgewiesen ist, sich auch auf das körperliche Band anwenden lässt.

Wir denken das Band als eine Schnur von kreisförmigem Querschnitt, jene Curve als ihre Mittellinie. Die bisher angenommene Undehnbarkeit kann hier um der Biegung willen nicht beibehalten werden. Dann ist der Factor $f(t)$ überflüssig und sei $= 1$. Ausserdem steht einer Torsion der Schnur bei unverändertem Querschnitt dann nichts entgegen.

Zuerst ist zu fragen, ob die Gestalt der Mittellinie eine Durchdringung verschiedener Teile der Schnur zur Folge hat. Da die Minima der Sehnen zwischen Punkten der Mittellinie, die durch endlichen Bogen getrennt sind, nur endlich oder null sein können, letzterer Fall schon bei der Bestimmung der Mittellinie ausgeschlossen ist, so kann bei hinreichender Dünne der Schnur eine Durchdringung nicht eintreten. Bei Sehnen, welche zugleich mit dem Bogen verschwinden, ist der Fall der notwendigen Durchdringung nur denkbar, wenn der Bogen einen Rückkehrpunkt enthält. Ein Rückkehrpunkt setzt voraus, dass ∂x, ∂y, ∂z, ∂w zugleich verschwinden. Für $\partial w = 0$ wird $\cos u = 0$, gleichzeitig hiermit

$$\partial x = \mp \tfrac{1}{2}(3 + \cos t)\, \partial u$$

folglich tritt während der Variation der Curve nie ein Rückkehrpunkt ein; zu Anfang und zu Ende derselben ist dies schon vorher bekannt.

Eine zweite Frage ist, ob das stetige Angrenzen der Teile der Schnur während der Variation fortbestehen kann. Die Anordnung der Körperelemente zu Anfang und zu Ende kann man, solange

man von der Schliessung absieht, so denken, dass die Schnur aus unendlich vielen Fäden besteht, die der Mittellinie parallel sind, und ihren Abstand von derselben nie ändern. Im Artikel XXIII. ist gezeigt, dass eine gleiche Construction auch bei 4 Dimensionen für eine beliebige dreifach gekrümmte Curve möglich ist. Lässt man also die Anordnung während der Variation fortbestehen, so wird das Angrenzen der Elemente weder longitudinal noch transversal verändert.

Die Anordnung bedarf jedoch einer Modification, wenn man in Betracht zieht, dass Anfang und Ende der Schnur fest verbunden sind. Ist die Mittellinie ein Kreis, wie sie zuletzt werden soll, so sind offenbar auch alle Parallelen Kreise, Anfang und Ende jedes Fadens fallen zusammen. Dass auch die Parallelen der ursprünglichen Mittellinie nach zweiter Erreichung des Querschnitts, von dem sie ausgegangen, in ihrem Ausgangspunkte eintreffen, ist wenigstens kein Grund ersichtlich. Ist es nicht der Fall, so ist der stetige Uebergang aus dem ursprünglichen Zustand in den schliesslichen unmöglich. Ja sogar der Fall ist unzulässig, wo zwar alle Parallelen geschlossene Curven sind, aber erst nach einer oder mehreren Windungen um die Schnur ihren Ausgangspunkt wiedererreichen.

Nehmen wir an, dass eine vom Punkte (c, φ) ausgehende Parallele zur Zeit t nach Durchlaufung der Schnur in den Punkt $(c, \varphi + \delta)$ fällt, wo δ positiv oder negativ, $<$ oder $=$ oder $> 4R$ sein kann, so lässt sich der Endpunkt durch Rotation des Endschnitts $s = l$ um den Winkel $-\delta$ auf den Anfangspunkt (c, φ) zurückführen, und wenn man zugleich allen Querschnitten eine proportionale Rotation, d. h. um den Winkel $-\frac{\delta s}{l}$ erteilt, so erhält man diejenige tordirte Lage der Schnur, in welche sie kommen muss, wenn sie von der circulären Ringform aus bis zu der Knotencurve deformirt wird.

Geht man umgekehrt von der anfänglich gegebenen Knotenform aus, so sind, wenn (xyz) der laufende Punkt der Mittellinie, $(x_0 y_0 z_0)$ der entsprechende einer beliebigen Parallele im Abstand c ist, die Gleichungen der letztern:

$$x_0 = x + c(X \cos\varphi - X_1 \sin\varphi); \text{ etc.} \tag{1}$$

und zwar bedeuten anfänglich, also im Raume, X und X_1 die Richtungscosinus der Haupt- und Binormale, φ den Torsionswinkel.

Wir müssen nun auf den Fall Rücksicht nehmen, dass eine Parallele einen geschlossenen Faden nicht repräsentirt oder, wenn es der Fall ist, mit der Mittellinie im Kettennexus steht, geben also, wie oben gezeigt, durch Substitution von $\varphi - \frac{\delta s}{l}$ für φ allen Normal-

schnitten die genügenden Rotationen, welche den Anschluss ohne Kettennexus herbeiführt. Dann werden die Gleichungen eines Fadens:

$$x_0 = x + c\left\{X\cos\left(\varphi - \frac{\delta s}{l}\right) - X_1 \sin\left(\varphi - \frac{\delta s}{l}\right)\right\};\ \text{etc.} \tag{2}$$

Dieselbe Form besteht fort, wenn bei der Deformation die Mittellinie in 4. Dimension ausweichend dreifach gekrümmt wird. Denn in dem cit. Art. XXIII. ist gezeigt, dass die Parallele einer dreifach gekrümmten Curve Gleichungen von der Form (1), nur mit andrer Bedeutung von X, X_1, φ, hat und durch Hinzufügung eines dem Bogen proportionalen Incrementes zu φ in eine, die Urcurve in constantem Abstand umwindende Curve übergeht. Die Grösse δ ist dann Function der Zeit t und verschwindet am Ende des ganzen Vorgangs.

Betrachtet man jetzt in Gl. (2) s, φ, c als Parameter, so wird, wenn s von 0 bis l, φ von 0 bis 4R, c von 0 bis zum Radius des Querschnitts variirt, für jeden Zeitpunkt des Uebergangs der durch (2) bestimmte Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ das ganze Volum der Schnur erzeugen, und die materiell identisehen Elemente die ganze Zeit hindurch in gleicher Ordnung auf einander folgen. Hiermit ist auch die zweite Frage erledigt und bewiesen, dass die körperliche Schnur, als dehnbar und tordirbar, aber mit unveränderlichem, normal bleibendem Querschnitt gedacht, die Bedingungen der Knotenauflösung erfüllt.

R. Hoppe.

2.

Zurückführung der vollständigen Gleichung vierten Grades auf eine reciproke Gleichung zweiten Grades.

Die Gleichung vierten Grades sei

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Hat man

$$1)\quad y + \frac{1-t^2}{4} \cdot \frac{1}{y} + 1 = 0,$$

so ergiebt sich

$$2)\quad y = \frac{-1 \pm t}{2}.$$

Setzt man in Nr. 1)

$$3)\quad y = \frac{x^2 + \frac{(a-1)x}{2} + s}{x + v},$$

so entsteht nach Fortschaffung der Nenner:

$$4)\quad \left(x^2+\frac{(a-1)x}{2}+s\right)^2+\frac{1-t^2}{4}(x+v)^2+(x+v)\left(x^2+\frac{(a-1)x}{2}+s\right)=0.$$

Diese Gleichung nach x geordnet giebt

$$5)\quad x^4+ax^3+\frac{(4(2s+v)+a^2-t^2)x^2}{4}+\frac{(2as+(a-t^2)v)x}{2}+\frac{(2s+v)^2-v^2t^2}{4}=0.$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung Nr. 1) identisch, wenn

$$6)\quad 4(2s+v)+a^2-t^2=4b$$

$$7)\quad 2as+(a-t^2)v=2c$$

$$8)\quad (2s+v)^2-v^2t^2=4d.$$

Aus 6) folgt:

$$2s+v=\frac{t^2+4b-a^2}{4}$$

oder wenn man

$4b-a^2=A$ setzt:

$$9)\quad 2s+v=\frac{t^2+A}{4}.$$

Aus Nr. 9) und 7) ergiebt sich

$$v=\frac{at^2+aA-8c}{4t^2}$$

oder wenn

$aA-8c=B$ gesetzt wird,

$$10)\quad v=\frac{at^2+B}{4t^2}.$$

Setzt man die Werte von $2s+v$ und v aus Nr. 9) und 10) in Nr. 8) ein, so ergiebt sich

$$11)\quad (t^2+A)^2t^2-(at^2+B)^2=64dt^2$$

oder geordnet:

$$12)\quad t^6+(2A-a^2)t^4+(A^2-2aB-64d)t^2-B^2=0.$$

Aus welcher Gleichung t^2 bestimmt werden kann.

Aus Nr. 2) und 3) hat man:

$$\frac{x^2+\frac{(a-1)x}{2}+s}{x+v}=\frac{-1\pm t}{2}\quad\text{oder}$$

$$x^2+\frac{(a-1)x}{2}+s=\frac{x(-1\pm t)}{2}+\frac{v(-1\pm t)}{2}\quad\text{oder}$$

13) $x^2 + \frac{(a \mp t)x}{2} = \pm \frac{vt}{2} - \frac{2s+v}{2}$. Hieraus

14) $x = \frac{1}{4}\left(-(a \mp t) \pm \sqrt{\pm 8vt - 8(2s+v) + (a \mp t)^2}\right)$.

Führt man für v und $2s+v$ die früher gefundenen Werte ein

15) $x = \frac{1}{4}\left(-(a \mp t) \pm \sqrt{\pm \frac{2(at^2+B)}{t} - 2(t^2+A) + (a \mp t)^2}\right)$

oder nach einer einfachen Umformung:

$$x = \frac{1}{4}\left(-(a \pm t) \pm \sqrt{\pm \frac{2B}{t} - t^2 - (2A - a^2)}\right).$$

Ist

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = 0,$$

so wird

$$t^6 - 12t^4 + 432t^2 - 1600 = 0; \quad t^2 = 4.$$

Die Werte von x werden

$$2 \pm \sqrt{3} \quad \text{und} \quad 1 \pm i\sqrt{2}.$$

Für den Fall, dass die Gleichung vierten Grades eine reducirte ist, also $a = 0$ wird, ergiebt sich, wenn man in der Resolvente $t^2 = 4z^2$ setzt,

16) $z^6 + 2bz^4 + (b^2 - 4d)z^2 - c^2 = 0$ und

17) $x = \frac{1}{2}\left(\pm z \pm \sqrt{\mp \frac{2c}{z} - z^2 - 2b}\right)$.

Die Gleichungen Nr. 16) und 17) sind dieselben wie bei der Ampère'schen Formel.

Ich füge noch einige Bemerkungen über die Zerlegung der Gleichung vierten Grades in Factoren zweiten Grades bei.

Wenn

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + ux + p)(x^2 + vx + q)$$

ist, so muss:

18) $u + v = a$

$qu + pv = c$

$uv = b - (p+q)$ und $p \cdot q = d$ sein.

Damit die Gleichungen in Nr. 18) zusammen bestehen können, muss die Determinante:

19) $\begin{vmatrix} ap - c, & (p-q)^2 \\ p + q - b, & aq - c \end{vmatrix} = 0$

sein, alsdann ist

$$20)\quad x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{(ap-c)x}{p-q}+p\right)\left(x^2-\frac{(aq-c)x}{p-q}+q\right).$$

Setzt man in

$$x^4-6x^3+12x^2-14x+3=0,\ \text{da}\ d=3.1$$
$$p=3\ \text{und}\ q=1,$$

so ergiebt sich

$$\begin{vmatrix}-4, & 4\\ -8, & 8\end{vmatrix}=0,$$

also

$$x^4-6x^3+12x^2-14x+3=(x^2-2x+3)(x^2-4x+1).$$

Ist die Gleichung vierten Grades reducirt, also $a=0$, so hat man nach Nr. 18) und 19) zur Bestimmung von p und q die folgenden Gleichungen:

$$21)\quad (p-q)^2(p+q-b)=c^2\ \text{und}\ p.q=d\quad \text{oder}$$
$$((p+q)^2-4pq)(p+q-b)=c^2.$$

Setzt man $p+q=z$ und beachtet, dass $pq=d$, so erhält man:

$$22)\quad (z^2-4d)(z-b)=c^2$$

oder geordnet:

$$23)\quad z^3-bz^2-4dz+4bd-c^2=0.$$

Man hat alsdann

$$24)\quad x^4+bx^2+cx+d=\left(x^2-\frac{c}{p-q}x+p\right)\left(x^2+\frac{c}{p-q}x+q\right).$$

Ist a nicht gleich Null, so hat man wegen

$$(ap-c)(aq-c)=a^2d-acz+c^2$$

die Resolvente

$$a^2d-acz+c^2=(z^2-4d)(z-b)$$

oder geordnet

$$z^3-bz^2+(ac-4d)z-a^2d+4bd-c^2=0.$$

Kiel, den 15. Nov. 1879.

Ligowski.

3.

Lösung einer Classe von Aufgaben der Sphärik.

Es seien a, b, c die drei Seiten und α, β, γ die entsprechend gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreiecks, in welchem gegeben sind

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} \alpha+a &= 2A \\ \beta+b &= 2B \\ \gamma+c &= 2C \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \text{II)}\quad \begin{aligned} \alpha+a &= 2A \\ \beta+b &= 2B \\ \gamma-c &= 2C \end{aligned}$$

$$\text{oder}\quad \text{III)}\quad \begin{aligned} \alpha+a &= 2A \\ \beta-b &= 2B \\ \gamma-c &= 2C \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \text{IV)}\quad \begin{aligned} \alpha-a &= 2A \\ \beta-b &= 2B \\ \gamma-c &= 2C \end{aligned}$$

so setze man

im Falle I):

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{4} + \delta$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{2\sqrt{\sin\delta \cos(A-\delta)\cos(B-\delta)\cos(C-\delta)}}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} A \cos\xi; \quad \operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg} B \cos\xi; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg} C \cos\xi$$

so wird

$$\begin{aligned} \alpha &= A+\varphi \\ a &= A-\varphi \end{aligned}; \quad \begin{aligned} \beta &= B+\eta \\ b &= B-\eta \end{aligned}; \quad \begin{aligned} \gamma &= C+\vartheta \\ c &= C-\vartheta \end{aligned}$$

im Falle II):

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{4} + \delta$$

$$\cos \xi = \frac{2\sqrt{\sin\delta \sin(A-\delta)\sin(B-\delta)\cos(C-\delta)}}{\sin A \sin B \cos C}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin\xi \operatorname{tg} A; \quad \operatorname{tg}\eta = \sin\xi \operatorname{tg} B; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\operatorname{tg} C}{\sin\xi}$$

so wird

$$\begin{aligned} \alpha &= A+\varphi \\ a &= A-\varphi \end{aligned}; \quad \begin{aligned} \beta &= B+\eta \\ b &= B-\eta \end{aligned}; \quad \begin{aligned} \gamma &= \vartheta+C \\ c &= \vartheta-C \end{aligned}$$

im Falle III):

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{4} + \delta$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{2\sqrt{\cos\delta \cos(A-\delta)\cos(B-\delta)\sin(C-\delta)}}{\sin A \sin B \cos C}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg} A}{\cos\xi}; \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos\xi}; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \cos\xi \operatorname{tg} C$$

so wird

$$\begin{matrix}\alpha = \varphi + A \\ a = \varphi - A\end{matrix}; \quad \begin{matrix}\beta = \eta + B \\ b = \eta - B\end{matrix}; \quad \begin{matrix}\gamma = C + \vartheta \\ c = C - \vartheta\end{matrix}$$

im Falle IV):

$$\frac{A+B+C}{2} = \delta - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\xi = \frac{2\sqrt{\cos\delta\sin(\delta-A)\sin(\delta-B)\sin(\delta-C)}}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}A}{\sin\xi}; \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{\operatorname{tg}B}{\sin\xi}; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\operatorname{tg}C}{\sin\xi}$$

so wird

$$\begin{matrix}\alpha = \varphi + A \\ a = \varphi - A\end{matrix}; \quad \begin{matrix}\beta = \eta + B \\ b = \eta - B\end{matrix}; \quad \begin{matrix}\gamma = \vartheta + C \\ c = \vartheta - C\end{matrix}$$

Zur allgemeinen Entwickelung bedeuten ε, ε', ε'' drei Werte, welche entweder $+1$ oder -1 sind.

Ist nun gegeben:

1) $$\alpha + \varepsilon a = 2A; \quad \beta + \varepsilon' b = 2B; \quad \gamma + \varepsilon'' c = 2C$$

so setze man:

2) $$\begin{matrix}\alpha = A + \varphi \\ a = \varepsilon(A - \varphi)\end{matrix}; \quad \begin{matrix}\beta = B + \eta \\ b = \varepsilon'(B - \eta)\end{matrix}; \quad \begin{matrix}\gamma = C + \vartheta \\ c = \varepsilon''(C - \vartheta)\end{matrix}$$

ferner:

3) $$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = k$$

so folgt aus 2) und 3)

4) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1-\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\operatorname{tg}A; \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{1-\varepsilon' k}{1+\varepsilon' k}\operatorname{tg}B; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{1-\varepsilon'' k}{1+\varepsilon'' k}\operatorname{tg}C$$

Nun setze man aus 2) die Werte von α, a, β, b, γ, c in die Cagnolische Gleichung

$$\cos a\cos b\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos c = \sin\alpha\sin\beta - \sin a\sin b$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}&(\cos A\cos B\cos\varphi\cos\eta + \sin A\sin B\sin\varphi\sin\eta)\cos C\cos\vartheta \\ &-(\sin A\cos B\sin\varphi\cos\eta + \cos A\sin B\cos\varphi\sin\eta)\sin C\sin\vartheta = \\ &(\sin A\sin B\cos\varphi\cos\eta + \cos A\cos B\sin\varphi\sin\eta)\left(\frac{1-\varepsilon\varepsilon'}{2}\right) \\ &+(\cos A\sin B\sin\varphi\cos\eta + \sin A\cos B\cos\varphi\sin\eta)\left(\frac{1+\varepsilon\varepsilon'}{2}\right)\end{aligned}$$

oder

$$1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\eta-(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}\eta)\operatorname{tg}C\operatorname{tg}\vartheta=$$
$$\frac{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\eta}{\cos C\cos\vartheta}\left(\frac{1-\varepsilon\varepsilon'}{2}\right)+\frac{\operatorname{tg}B\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}\eta}{\cos C\cos\vartheta}\left(\frac{1+\varepsilon\varepsilon'}{2}\right)$$

Führt man in diese Gleichung die Werte von $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\eta$, $\operatorname{tg}\vartheta$ aus 4) ein, so erhält man:

$$1+\frac{1-\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\cdot\frac{1-\varepsilon' k}{1+\varepsilon' k}\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B-\left(\frac{1-\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\operatorname{tg}^2A+\frac{1-\varepsilon' k}{1+\varepsilon' k}\operatorname{tg}^2B\right)\frac{1-\varepsilon'' k}{1+\varepsilon'' k}\operatorname{tg}^2C=$$

$$5)\quad\left(\frac{1-\varepsilon\varepsilon'}{2}\right)\frac{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}{\cos C}\left(1+\frac{1-\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\cdot\frac{1-\varepsilon' k}{1+\varepsilon' k}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1-\varepsilon'' k}{1+\varepsilon'' k}\right)^2\operatorname{tg}^2C}$$
$$+\left(\frac{1+\varepsilon\varepsilon'}{2}\right)\frac{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}{\cos C}\left(\frac{1-\varepsilon k}{1+\varepsilon k}+\frac{1-\varepsilon' k}{1+\varepsilon' k}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1-\varepsilon'' k}{1+\varepsilon'' k}\right)^2\operatorname{tg}^2C}$$

Es ist jetzt zu setzen im Falle:

I) $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=1$, $\varepsilon''=1$	II) $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=1$, $\varepsilon''=-1$	III) $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=-1$, $\varepsilon''=-1$	IV) $\varepsilon=-1$, $\varepsilon'=-1$, $\varepsilon''=-1$

Da die weitere Behandlung dieser einzelnen Fälle eine ganz ähnliche ist, so wird es ausreichen, den ersten derselben durchzuführen.

Im Falle I) erhält man aus 5) die Gleichung:

$$1+\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2(\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B-\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2C-\operatorname{tg}^2B\operatorname{tg}^2C)=$$
$$\frac{2\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}{\cos C}\cdot\frac{1-k}{1+k}\sqrt{1+\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2\operatorname{tg}^2C}$$

oder

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2+\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B-(\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B)\operatorname{tg}^2C=\frac{2\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}{\cos C}\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2+\operatorname{tg}^2C}$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2-1=\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2C+\operatorname{tg}^2B\operatorname{tg}^2C+\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B+2\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B\operatorname{tg}^2C$$
$$-1\pm\frac{2\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{\cos A\cos B\cos C}$$

Sei der Kürze wegen die linke Seite $=\operatorname{tg}^2\xi$, so wird nach leichter Umformung:

$$\operatorname{tg}^2\xi\,.\cos^2A\cos^2B\cos^2C=(\sin C\pm\sin A\sin B)^2-\cos^2A\cos^2B$$

Setzt man hier

$$\delta = \frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{4}$$

so erhält man entweder

$$\mathrm{tg}^2\xi \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C = 4 \sin\delta \cos(A-\delta)\cos(B-\delta)\cos(C-\delta)$$

oder

$$= 4\cos\delta \sin(A-\delta)\sin(\delta-B)\sin(A-\delta)$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\mathrm{tg}\,\xi = \frac{2\sqrt{\sin\delta\cos(A-\delta)\cos(B-\delta)\cos(C-\delta)}}{\cos A \cos B \cos C}$$

Die zweite Lösung ist zu verwerfen, da sie auf ein Dreieck führt mit den Seiten a, b, c und den Winkeln $\pi-\alpha$, β, $\pi-\gamma$.

Auf dieselbe Weise lassen sich die Lösungen für die andern Fälle herleiten. Meissel.

4.

Die Summe gleichartiger Potenzen von den Wurzeln einer algebraischen Gleichung als Function der Coefficienten derselben Gleichung und umgekehrt. (Neue Methode der Ableitung).

I. Bezeichnen wir die Summe der Variationen $r$ter Classe von den Elementen ε_1, $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ mit V_r:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_r + \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{r-2}\,\varepsilon_r\,\varepsilon_{r-1} + \ldots + \varepsilon_n\,\varepsilon_{n-1} \ldots \varepsilon_{n-r+1} = V_r;$$

bezeichnen wir ferner die Summe der Variationen $r$ter Classe von den Elementen ε_1, $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_{t+1} \ldots \varepsilon_n$ mit $V_{r,t}$: so haben wir dann die Identität

$$V_{k+1} = \sum_{u=1}^{u=n} \varepsilon_u V_{k,u} \tag{1}$$

als mathematischen Ausdruck des Satzes, dass aus den Variationen $k$ter Classe die Variationen $(k+1)$ter Classe gebildet werden, indem man zu jeder Variation jedes Element setzt, das sie noch nicht enthält. Ferner haben wir

$$V_k = V_{k,u} + k\,\varepsilon_u V_{k-1,u} \tag{2}$$

Wenn nämlich ε_u als 1ter, 2ter ... $k$ter Factor zu allen Complexionen von $V_{k-1,u}$ hinzugefügt wird, so entstehen die Variationen $k$ter Classe, welche ε_u enthalten. Die k Complexionen $k$ten Grades aber, welche von derselben Complexionen $(k-1)$ten Grades entstehen, sind ein-

ander gleich, und folglich ist $k\,\varepsilon_u V_{k-1,u}$ gleich der Summe der Variationen $k$ter Classe, welche ε_u enthalten. Da $V_{k,u}$ hingegen die Summe der Variationen $k$ter Classe repräsentirt, welche das Element ε_u nicht enthalten; so ist die Richtigkeit von (2) klar.

Aus (2) folgt

$$\begin{aligned} V_{k,u} &= V_k - k\,\varepsilon_u V_{k-1,u}, \\ V_{k-1,u} &= V_{k-1} - (k-1)\,\varepsilon_u V_{k-2,u}, \\ V_{k-2,u} &= V_{k-2} - (k-2)\,\varepsilon_u V_{k-3,u} \\ \cdots & \quad \cdots\cdots \end{aligned}$$

Vermöge dieser Relationen geht (1) über in

$$V_{k+1} = V_k \Sigma\varepsilon_u - k V_{k-1} \Sigma\varepsilon_u^2 + k(k-1) V_{k-2} \Sigma\varepsilon_u^3 - k(k-1)(k-2) V_{k-3} \Sigma\varepsilon_u^4 + \ldots + (-1)^k k(k-1) \ldots 2.1 \Sigma\varepsilon_u^{k+1} \quad (3)$$

II. Betrachten wir jetzt $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ als Wurzeln der Gleichung

$$x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n = 0.$$

Da $V_r = r!\, C_r$, so hat man als Consequenz von Relation (3)

$$(k+1) C_{k+1} = C_k \Sigma\varepsilon_n - C_{k-1} \Sigma\varepsilon_u^2 + C_{k-2} \Sigma\varepsilon_u^3 - \ldots + (-1)^k \Sigma\varepsilon_u^{k+1}.$$

Schreiben wir nun nach einander $0, 1, 2 \ldots k-1$ an die Stelle von k, so erhalten wir, wenn zur Abkürzung $\Sigma\varepsilon_u^r = \Sigma_r$ gesetzt wird

$$\begin{aligned} C_1 &= \Sigma_1 \\ 2C_2 &= C_1 \Sigma_1 - \Sigma_2 \\ 3C_3 &= C_2 \Sigma_1 - C_1 \Sigma_2 + \Sigma_3 \\ \cdots & \quad \cdots\cdots \\ kC_k &= C_{k-1} \Sigma_1 - C_{k-2} \Sigma_2 + C_{k-3} \Sigma_3 - \ldots + (-1)^{k-1} \Sigma_k \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= C_1 \\ \Sigma_2 &= C_1 \Sigma_1 - 2C_2 \\ \Sigma_3 &= C_1 \Sigma_2 - C_2 \Sigma_1 + 3C_3 \\ \cdots & \quad \cdots\cdots \\ \Sigma_k &= C_1 \Sigma_{k-1} - C_2 \Sigma_{k-2} + C_3 \Sigma_{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} k C_k \end{aligned}$$

folglich

$$\Sigma_k = \begin{vmatrix} C_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 2C_2 & C_1 & 1 & 0 & \ldots \\ 3C_3 & C_2 & C_1 & 1 & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots \\ kC_k & C_{k-1} & C_{k-2} & C_{k-3} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$C_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} \Sigma_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \Sigma_2 & \Sigma_1 & 2 & 0 & \cdots \\ \Sigma_3 & \Sigma_2 & \Sigma_1 & 3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_k & \Sigma_{k-1} & \Sigma_{k-2} & \Sigma_{k-3} & \cdots \end{vmatrix}$$

J. Farkas.

5.

Mittlerer verticaler Druck des symmetrischen Pendels auf seine Axe.

Ich betrachte hier als symmetrisch ein jedes Pendel, dessen sämmtliche, zur Axe senkrechte Schichten ihre Schwerpunkte in einer und derselben Ebene der Axe haben.

I. Ist ϱ der Abstand des Schwingungspunktes von der Axe, und bekommt das ruhende Pendel eine momentane horizontale Winkelgeschwindigkeit w, so ist die Anfangsgeschwindigkeit des Schwingungspunktes ϱw. Setzen wir $\varrho w = \sqrt{2as}$, wo a die Acceleration bedeuten möge, so hat das Pendel dann bei einem Ausschlagswinkel φ die Winkelgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\varrho}\sqrt{2a\{s - \varrho(1 - \cos\varphi)\}}.$$

Ist m die Masse einer unendlich dünnen, zur Axe senkrechten Scheibe und r der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Axe, so ist

$$f = mrv^2$$

die Fliehkraft derselben, deren Richtung mit der Geraden zusammenfällt, welche vom Schwerpunkte auf der Axe senkrecht steht. Die verticale Componente dieser Kraft und des Gewichtes der Scheibe sind $f\cos\varphi$ und $ma\cos^2\varphi$; folglich ist der verticale Druck der Scheibe bei dem Ausschlagswinkel φ

$$2\,\frac{amr}{\varrho}\left(\cos\varphi + \frac{s-\varrho}{\varrho}\right)\cos\varphi + ma\cos^2\varphi.$$

Der verticale Druck des ganzen Pendels ist also

$$q = 2\,\frac{a\Sigma mr}{\varrho}\left(\cos\varphi + \frac{s-\varrho}{\varrho}\right)\cos\varphi + P\cos^2\varphi,$$

wo P offenbar das Gewicht des ganzen Pendels bedeutet. Ist σ der Abstand des Schwerpunktes des ganzen Pendels von der Axe, so ist $a\Sigma mr = \sigma P$. Schreiben wir noch zur Abkürzung $\frac{s-\varrho}{\varrho} = u$, alsdann haben wir

$$q = 2P\frac{\sigma}{\varrho}(\cos\varphi + u)\cos\varphi + P\cos^3\varphi \text{ *)}.$$

Die Dauer dieses Druckes ist

$$dt = \sqrt{\frac{\varrho}{2a}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi + u}}.$$

Der mittlere verticale Druck Q während der Zeit t, die erforderlich ist, um zu dem Ausschlagswinkel φ zu gelangen, ist gegeben durch

$$\frac{1}{t}\int_0^t q\,dt\,;$$

folglich haben wir

(1)

$$Q = \frac{P\sigma}{t}\sqrt{\frac{2}{a\varrho}}\int_0^\varphi \cos\varphi\sqrt{\cos\varphi + u}\,d\varphi + \frac{P}{t}\sqrt{\frac{\varrho}{2a}}\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi + u}}\,d\varphi.$$

Dies darf auch so geschrieben werden

$$Q = \frac{P\sigma}{t\sqrt{2a\varrho}}\int_0^\varphi \frac{3\cos^2\varphi + 2u\cos\varphi - 1}{\sqrt{\cos\varphi + u}}\,d\varphi + \frac{P}{t}\sqrt{\frac{\varrho}{2a}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi + u}}$$

$$- \frac{P(\varrho - \sigma)}{t\sqrt{2a\varrho}}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi + u}}\,d\varphi,$$

wovon man sich wohl sehr leicht überzeugen kann. Ferner hat man

$$\frac{3\cos^2\varphi + 2u\cos\varphi - 1}{\sqrt{\cos\varphi + u}}\,d\varphi = 2d\{\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi + u}\},$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi + u}} = \sqrt{\frac{2a}{\varrho}}\,dt,$$

also

*) $\sigma > 0$, da im Falle $\sigma = 0$ die verticale Componente des Gewichtes constant P ist.

$$Q = P + \frac{P\sigma}{t}\sqrt{\frac{2}{a\varrho}}\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi + u} - \frac{P(\varrho - \sigma)}{t\sqrt{2a\varrho}}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi + u}}\,d\varphi \tag{2}$$

II. Untersuchen wir jetzt die zwei besonderen Fälle, wenn nämlich $s < \varrho$, $s > \frac{5}{2}\varrho$, wo im ersten Falle das Pendel ruhig hin und her schwingt, im zweiten aber dasselbe beständig im Kreise herumläuft.

1. Gesetzt $s < \varrho$ und zwar $s = \varrho(1 - \cos\alpha)$, so hat man $u = \frac{s - \varrho}{\varrho} = -\cos\alpha$, und für eine halbe Schwingung erhalten wir

$$Q_1 = P - P\frac{\varrho - \sigma}{t\sqrt{2a\varrho}}\int_0^{\alpha}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}\,d\varphi.$$

Schreibt man $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi$, so kommt

$$Q_1 = P - 4P\frac{\varrho - \sigma}{t\sqrt{a\varrho}}\sin^2\frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi}\,d\psi \tag{3}$$

oder

$$Q_1 = P - 2P\left(1 - \frac{\sigma}{\varrho}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2} \times$$

$$\frac{1 - \frac{1.3}{2.4}\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3.5}{4.6}\sin^4\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{5.7}{6.8}\sin^6\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{7.9}{8.10}\sin^8\frac{\alpha}{2} - \ldots}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2;4.6}\right)^2\sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots}$$

Aus (3) liest man unmittelbar den Satz:

Der mittlere verticale Druck des ruhig hin und her schwingenden physischen Pendels ist während einer halben Schwingung kleiner als sein Gewicht.

Wenn $\varrho = \sigma$, dann wird $Q_1 = P$, das ist:

Der mittlere verticale Druck des ruhig hin und her schwingenden mathematischen Pendels ist während einer halben Schwingung gleich dem Gewichte desselben.

2. Ist $s > \frac{5}{2}\varrho$, dann findet man für einen halben Umlauf sehr leicht

$$Q_2 = P - 8P\frac{\varrho-\sigma}{t\sqrt{2as}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sqrt{1-\frac{2\varrho}{s}\sin^2\theta}}d\theta \tag{4}$$

oder

$$Q_2 = P - \tfrac{1}{2}P\left(1-\frac{\sigma}{\varrho}\right)\frac{1+\frac{\varrho}{2s}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{5}{6}\left(\frac{\varrho}{2s}\right)^2+\left(\frac{3.5}{2.3}\right)^2\frac{7}{10}\left(\frac{\varrho}{2s}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1.3..(2n-1)}{1.2..n}\right)^2\frac{2(2n+1)}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{\varrho}{2s}\right)^n+\ldots}{1+\frac{\varrho}{2s}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\varrho}{2s}\right)^2+\left(\frac{3.5}{2.3}\right)^2\left(\frac{\varrho}{2s}\right)^3+\left(\frac{3.5.7}{2.3.4}\right)^2\left(\frac{\varrho}{2s}\right)^4+\ldots}$$

Der mittlere verticale Druck des herumlaufenden $\left\{\begin{matrix}\text{physischen}\\ \text{mathematischen}\end{matrix}\right.$ Pendels ist während eines halben Umlaufes $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner, als}\\ \text{eben so gross, wie}\end{matrix}\right.$ das Gewicht desselben.

J. Farkas.

6.

Rechenschema für die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch.

Die Verwandlung der $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch beruht der Hauptsache nach bekanntlich darauf, dass der Radicand D in der Form

$$a_{n-1}^2 + \partial_{n-1}.\partial_n = a_n^2 + \partial_n.\partial_{n+1}$$

dargestellt werden kann. Es ist nämlich nur nötig:

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} &= \partial_n k_n + r_n \\ a_n &= a_{n-1} - r_n \\ \partial_{n+1} &= \partial_{n-1} + k_n r_n \end{aligned}$$

einzusetzen. Zugleich gelten dann auch die Formeln:

$$2a_n = \partial_n k_n - r_n \quad \text{und} \quad a_{n-1} + a_n = \partial_n k_n.$$

Für $n = 1$ sei a_0 die grösste in $\sqrt{D} = \sqrt{a_0^2 + \partial_0\,\partial_1}$ enthaltene ganze Zahl $a_0 = [\sqrt{D}]$ und ∂_0 sei immer $= 1$.

Es folgt nun aus:

$$\frac{+\sqrt{D}+a_{n-1}}{\partial_n} = k_n + \frac{1}{x_n}, \quad D = a_{n-1}^2 + \partial_{n-1}.\partial_n$$

für x_n der Wert:

$$\frac{\partial_n}{+\sqrt{D}+a_{n-1}-\partial_n k_n} = \frac{\partial_n}{+\sqrt{D}-a_n} = \frac{+\sqrt{D}+a_x}{\partial_{n+1}} = k_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}},$$
$$D = a_n^2 + \partial_n . \partial_{n+1}$$

etc. . . . und ergiebt sich somit die Entwickelung einer Quadratwurzel in einen regelmässigen Kettenbruch, wenn man für die Elemente k immer die grössten in den Brüchen enthaltenen Zahlen wählt, also

$$k_n = \left[\frac{a_0 + a_{x-1}}{\partial_n}\right]$$

Ist nämlich $\frac{1}{x_n}$ ein positiver echter Bruch, so wird $k_{n+1} > 0$; sind ∂_n und a_{n-1} positive Grössen und letztere $\overline{\overline{<}}\, a_0$, so gilt dasselbe auch für ∂_{n+1} und a_n.

Denn aus

$$a_0 + a_{n-1} = \partial_n k_n + \varepsilon$$

kann

$$a_{n-1} < \partial_n k_n$$

geschlossen werden, weil $a_0 > \varepsilon$; a_0 ist nämlich entweder $> \partial_n$ und dieses $> \varepsilon$, oder $\partial_n > a_0$, dann aber ist k_n notwendig $= 1$ und nun muss $\varepsilon < a_0$ sein, weil schon $a_{n-1} \overline{\overline{<}}\, a_0$ vorausgesetzt war. Aus der Ungleichung $a_{n-1} < \partial_n k_n$ ergiebt sich $a_n (= \partial_n k_n - a_{n-1})$ als positive Grösse und weil $\frac{1}{x_n} > 0$, muss nun auch ∂_{n+1} positiv sein, folglich

$$D - \partial_n \partial_{n+1} = a_n^2 < D$$

mithin auch:

$$a_n \overline{\overline{<}}\, a_0.$$

In Bezug auf ∂_{n+1} ist noch zu bemerken, dass es $\overline{\overline{<}}\, 2a_0$, aber $> a_0 - a_n \left(= \sum_1^n r_n\right)$ sein muss, denn aus $a_n + \partial_{n+1} < a_0$ würde

$$a_n^2 + (2a_n + \partial_{n+1})\partial_{n+1} < a_0^2$$

folgen. Nun ist:

$$2a_n = \partial_n k_n - r_n$$

und das stets positive

$$\partial_{n+1} = \partial_{n-1} + k_n r_n$$

also

$$2a_n + \partial_{n+1} > \partial_n,$$

da k_n zum Mindestens $= 1$ ist, folglich müsste um so mehr

$$D = a_n^2 + \partial_n . \partial_{n+1} < a_0^2$$

sein, was nicht statt hat.

Aus diesen Relationen lässt sich ein neues Rechenschema für die Entwickelung einer Wurzelgrösse in einen Kettenbruch aufstellen, welches namentlich bei grösseren Radicanden bequem ist, indem die Erhebung der Grössen a auf's Quadrat hier unnötig wird.

Schema.

$$\sqrt{D} = \sqrt{a_0^2 + \partial_0 \partial_1} = a_0 \qquad a_1 (= a_0 - r_1) \qquad a_2 = (a_1 - r_2)$$

$$\partial_1 \left| \begin{matrix} 2a_0 \\ \partial_1 k_1 \end{matrix} \right| k_1; \quad \underline{} \; r_1 \qquad \partial_2 \left| \begin{matrix} 2a_1 \\ \partial_2 k_2 \end{matrix} \right| k_2; \quad \underline{} \; r_2 \qquad \partial_3 \left| \begin{matrix} 2a_2 \\ \partial_3 k_3 \end{matrix} \right| k_3 \quad \underline{} \; r_3 \quad \text{etc.}$$

$$\partial_0 = 1, \qquad \partial_2 = \partial_0 + r_1 k_1, \qquad \partial_3 = \partial_1 + r_2 k_2$$

$$\sqrt{D} = (a_0, k_1, k_2, k_3 \ldots 2a_0 \ldots)$$

Jedoch ist zu beachten, dass die Quotienten $k_2, k_3 \ldots$ nicht $\left[\frac{2a_1}{\partial_2}\right], \left[\frac{2a_2}{\partial_3}\right] \ldots$ sondern $\left[\frac{a_0 + a_1}{\partial_2}\right], \left[\frac{a_0 + a_2}{\partial_3}\right] \ldots$ sind, also nie Null oder negativ werden; andernfalls erhielte man einen unregelmässigen Kettenbruch.

Die Divisionen sind so lange fortzusetzen, bis ein Rest $= 0$ wird, dann hat man entweder die halbe oder die ganze Periode; im letzteren Fall erkennt man den Abschluss der halben Periode daran, dass zwei auf einander folgende Divisoren ∂_n und ∂_{n+1} einander gleich werden.

Aus den Gleichungen, welche das angegebene Schema repräsentiren:

$$\begin{array}{ll} \partial_1 = D = a_0^2 & 2a_0 = \qquad\qquad\qquad \partial_1 k_1 + r_1 \\ \partial_2 = r_1 k_1 + 1 & 2a_1 = \partial_1 k_1 - r_1 = \partial_2 k_2 + r_2 \\ \partial_3 = r_2 k_2 + \partial_1 & 2a_2 = \partial_2 k_2 - r_2 = \partial_3 k_3 + r_3 \\ \partial_4 = r_3 k_3 + \partial_2 & 2a_3 = \partial_3 k_3 - r_3 = \partial_4 k_4 + r_4 \\ \partial_5 = r_4 k_4 + \partial_3 & 2a_4 = \partial_4 k_4 - r_4 = \partial_5 k_5 + r_5 \\ \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \qquad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{array}$$

folgt nämlich, dass die Divisoren ∂ und die Reste r sich in umgekehrter Reihenfolge wiederholen (letztere jedoch mit entgegengesetzten Zeichen).

1) sobald irgend ein $r = 0$ wird

etwa $r_3 = 0$, so $\partial_4 = \partial_2$ und falls $k_4 = k_2$ gewählt wird

$$\partial_3 k_3 = \partial_2 k_2 + r_4,$$

also $r_4 = -r_2$, dann aber

$$\partial_5 = -r_2 k_2 + \partial_3 = \partial_1 \quad \text{etc.}$$

2) sobald zwei auf einander folgende Divisoren gleich sind

etwa $\partial_3 = \partial_4$. Nun folgt, falls $k_4 = k_3$ gewählt wird, aus

$$2a_3 = \partial_3 k_3 - r_3 = \partial_3 k_3 + r_4$$

für r_4 der Wert $-r_3$, also

$$\partial_5 = -r_3 k_3 + \partial_3 = \partial_2 \quad \text{etc.}$$

Beispiel 1) $21 = (4)^2 + 5$, $a_0 = 4$, $\partial_1 = 5$, $\partial_0 = 1$

$$\begin{array}{cccc||ccc}
\sqrt{21} = & 4 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4\\
 & 5\left|\begin{array}{c}8\\5\end{array}\right|1 & 4\left|\begin{array}{r}2\\4\end{array}\right|1 & 3|6|2 & 4\left|\begin{array}{c}6\\4\end{array}\right|1 & 5\left|\begin{array}{r}2\\5\end{array}\right|1 & 1|8|8\\
 & \overline{\;3\;} & \overline{-2} & & \overline{\;2\;} & \overline{-3} &
\end{array}$$

$\sqrt{21} = (4, 1, 1, 2, 1, 1, 8 \ldots)$

Beispiel 2) $29 = (5)^2 + 4$, $a_0 = 5$, $\partial_1 = 4$, $\partial_0 = 1$

$$\begin{array}{ccc||ccc}
\sqrt{29} = & 5 & 3 & 2 & 3 & 5\\
 & 5\left|\begin{array}{r}10\\8\end{array}\right|2 & 5\left|\begin{array}{c}6\\5\end{array}\right|1 & 5\left|\begin{array}{r}4\\5\end{array}\right|1 & 4\left|\begin{array}{r}6\\8\end{array}\right|2 & 1|10|10\\
 & \overline{\;2\;} & \overline{\;1\;} & \overline{-1} & \overline{-2} &
\end{array}$$

$\sqrt{29} = (5, 2, 1, 1, 2, 10 \ldots)$

Dass die Elemente k in der andern Hälfte der Periode in der Tat wieder dieselben werden, nur in umgekehrter Reihenfolge, ergiebt sich aus dem Satze, dass die grösste in $\dfrac{\sqrt{D} + a_n}{\partial_n}$ enthaltene Zahl $=$ der grössten in $\dfrac{\sqrt{D} + a_{n-1}}{\partial_n}$ enthaltenen ist.

Es sei

$$\left[\frac{a_0 + a_{n-1}}{\partial_n}\right] = k_n,$$

dann ist $\frac{a_{n-1} + a_n}{\partial_n}$ genau $= k_n$, also muss

$$\left[\frac{a_0 + a_n}{\partial_n}\right] \overset{=}{>} k_n;$$

es kann aber nicht $> k$ sein, da wie oben gezeigt, $a_0 - a_{n-1} < \partial_n$ ist. Mithin ist auch

$$\left[\frac{a_0 + a_n}{\partial_n}\right] = k = \left[\frac{a_0 + a_{n-1}}{\partial_n}\right].$$

In der Theorie der reducirten Formen von positiver Determinante D (vgl. Dirichlet Zahlentheorie § 78) beruht das Verfahren benachbarte reducirte Formen zu finden darauf, dass der mittlere Coefficient a_n einer der Form: $\{\pm\partial_{n-1}, a_{n-1}, \mp\partial_n\}$ benachbarten Form so zu bestimmen gesucht wird, dass $a_n \equiv a_{n-1} \bmod. \partial_n$ und $a_0 - \partial_n < a_n < a_0 + 1$ ist;

$$\partial_{n+1} \text{ wird dann } = \frac{D - a_n^2}{\partial_n}.$$

Hier ist nun sowohl

$$a_n = a_{n-1} - r_n,$$

als auch

$$\partial_{n+1} = \partial_{n-1} + r_n k_n$$

durch Einführung der Grösse r_n bereits bestimmt, also erscheint jener Algorithmus vereinfacht.

Wie sich aus vorstehendem Schema die Periodicität und Symmetrie der Teilnenner k ohne weiteres erkennen liess, so können auch andre hieher gehörige Sätze mit Hilfe dieser Relationen bewiesen werden, z. B. der Satz, dass $p^2 - q^2 D = \pm\partial$ wird, wenn $\frac{p}{q}$ ein Näherungswert des Kettenbruchs $\sqrt{D}$.

Beweis mittelst Schluss von n auf $n+1$.

Es gelte:

$$[a_0 k_1 \dots k_{n-2}][a_0 k_1 \dots k_{n-3}] - [k_1 \dots k_{n-2}][k_1 \dots k_{n-3}]D = (-1)^{n-2} a_{n-2}$$

und

$$[a_0 k_1 \dots k_{n-1}]^2 - [k_1 \dots k_{n-1}]^2 D = (-1)^n \partial_n.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit k_n^2 und addirt:

$$[a_0 k_1 \dots k_{n-2}]^2 - [k_1 \dots k_{n-2}]^2 D = (-1)^{n-1}\partial_{n-1} = (-1)^{n+1}\partial_{n-1}$$

und ausserdem das $2k_n$fache von E, worin

$$E = [a_0 k_1 \dots k_{n-1}][a_0 k_1 \dots k_{n-2}] - [k_1 \dots k_{n-1}][k_1 \dots k_{n-2}]D$$
$$= k_{n-1}(-1)^{n-1}\partial_{n-4} + (-1)^{n-2} a_{n-2}$$
$$= (-1)^{n-1} a_{n-1}$$

ist, so erhält man links:

$$[a_0 k_1 \dots k_n]^2 - [k_1 \dots k_n]^2 D$$

und rechts:

$$(-1)^{n+1}\{\partial_{n-1} - k_n^2 \partial_n + 2k_n a_{n-1}\}$$
$$= (-1)^{n+1}\{\partial_{n-1} - k_n^2 \partial_n + k_n(k_n \partial_n + r_n)\} = (-1)^{n+1}\partial_{n+1}$$

das ist:

$$p_n^2 - q_n^2 D = (-1)^{n+1}\partial_{n+1}.$$

Denkt man sich die Divisionen des Schema für $2a_0$ auf einander folgende Radicanden ausgeführt, so wird man die Frage nach denjenigen Radicanden, für die eine besonders kurze Periode eintritt, leicht beantworten können, doch kann dies auch aus der Relation

$$[2a_0 k_1 \dots k_{n-1}] = H[k_1 \dots k_n]$$

gefolgert werden, welche gelten muss, wenn

$$\sqrt{D} = \sqrt{a_0^2 + H} = (a_0, k_1, k_2 \dots k_n, 2a_0 \dots)$$

eine Periode von $n+1$ Elementen haben soll;

$$k_n = k_1, \quad k_{n-1} = k_2 \; . \; . \; .$$

Königsberg, den 4. November 1879.

Hermes.

7.

Ueber das Gesetz der Säulenverjüngung.

Schüleraufgabe.

(Fig, 1.) AB sei die Axe einer Säule, $ABCD$ ihr halber Längendurchschnitt. Dann gelten nach Vignola für die einzelnen Strecken dieser Figur die Werte:

$$BC = 18, \quad AB = 295 \cdot 5$$
$$DA = 15, \quad BG = 98 \cdot 5 = \tfrac{1}{3} AB$$

$$CE = DF = 19\tfrac{1}{3}$$

(nach einer beliebigen Einheit gemessen).

Die Curve CD ist nach folgendem Gesetze gebildet:

Die Geraden DF und CE treffen sich nahezu in einem Punkte O der in G auf AB errichteten Senkrechten.

Ein beliebiger Strahl des Strahlenbüschels vom Mittelpunkte O treffe die Axe AB in X. Man verlängere OX um

$$XX' = EC = FD = 19\tfrac{1}{3}.$$

Es ist dann X' ein Punkt der Begrenzungscurve CD.

Da nun DF und CE die im ersten Drittel G der Säulenaxe auf derselbeu errichteten Normalen nicht in zwei zusammen fallenden Punkten O, sondern in zwei getrennten (DF in O_1, CE in O_2) treffen: kann die Aufgabe vorgelegt werden, die Coincidenz der Punkte O_1 und O_2 herzustellen, indem von einem der gegebenen Verhältnisswerte Umgang genommen werde.

Es werde zunächst gefordert, dass statt $DA = 15$ ein solcher Wert gewählt werde, für welchen DF und CE sich in einem Punkte O der im ersten Drittel G der Axe errichteten Normalen treffen.

Man erhält aus dem rechtwinkligen Dreiecke CBE

$$BE = \sqrt{19\tfrac{1}{3}^2 - 18^2} = 7{\cdot}0553368$$

Ferner ist:

$$GO : GE = BC : BE$$

Die Rechnung gibt:

$$GO = 233{\cdot}2991$$

Nachdem nun GO bestimmt ist, würde sich DA aus den beiden Dreiecken DAF und OGF mittelst einer biquadratischen Gleichung finden lassen. Mit Anwendung der regula falsi gelangt man zu dem Werte:

$$DA = 15{\cdot}1489.$$

In der Praxis empfiehlt sich ferner unter Beibehaltung des Wertes $DA = 15$ eine Verschiebung der Normalen GO, so dass die Maximalschwellung der Säule nicht genau im ersten Drittel ihrer Höhe sich zeigt.

(Fig. 2.) Wir erhalten dann den Punkt O, wenn wir, die Werte

$$DA = 15, \quad DF = CE = 19\tfrac{1}{3}$$
$$BC = 18, \quad AB = 295{\cdot}5$$

vorausgesetzt, DF und CE bis zu ihrem Schnittpunkt O verlängern. Setzen wir dann:

$$BE = u, \quad GE = y,$$
$$AF = v, \quad FG = z, \quad OG = x$$

G liegt auf der Axe AB und ist der Fusspunkt des von O auf die Axe gefällten Lotes, liegt also nicht mehr im ersten Drittel der Säulenaxe. Wir haben dann:

$$u = 7 \cdot 0553368$$
$$v = 12 \cdot 1974496$$
$$y + z = 276 \cdot 2472136$$

Ferner ist:

$$\frac{x}{z} = \frac{15}{v}, \quad \frac{x}{y} = \frac{18}{u}$$

Die Elimination von x gibt:

$$5uz = 6vy$$

d. i.

$$73 \cdot 1846978\, y = 35 \cdot 2766840\, z$$

Wir haben also zwei Gleichungen zur Bestimmung von y und z. Ihre Auflösung gibt:

$$y = 89 \cdot 84844$$
$$z = 186 \cdot 39877$$
$$x = 229 \cdot 2267$$

Es wird also:

$$BG = u + y = 96 \cdot 9038.$$

Wien, December 1879.

Emil Hain.

8.

Ueber den Schwerpunkt des Vierecks.

Aus den von Herrn Nöggerath über diesen Gegenstand im vorigen Hefte des Archivs pag. 218. ff. mitgeteilten Resultaten lässt sich eine interessante Folgerung ziehen.

Bezeichnet man nämlich die Coordinaten der vier Eckpunkte des Vierecks durch x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; die des Durchschnittspunktes der Geraden, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender

Seiten des Vierecks verbinden, mit $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$; und endlich die des Schwerpunktes mit $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$, so hat man die vier Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}; \quad \mathfrak{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4};$$

$$\mathfrak{x}_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \mathfrak{x}_1}{3}; \quad \mathfrak{y}_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - \mathfrak{y}_1}{3};$$

welche sich in folgende zwei zusammenziehen lassen:

$$\mathfrak{x}_3 = \frac{4\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}_3 = \frac{4\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1}{3},$$

oder anders geschrieben:

$$3(\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_2) = \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 \quad \text{und} \quad 3(\mathfrak{y}_3 - \mathfrak{y}_2) = \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1,$$

woraus sich ergibt, dass in jedem Viereck der Durchschnittspunkt der Diagonalen, der Durchschnittspunkt der Geraden, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verbinden und der Schwerpunkt in einer geraden Linie liegen, und zwar so, dass die Entfernung des ersten und dritten Punktes durch den zweiten im Verhältniss von 3 zu 1 geteilt wird.

Bensheim, August 1880.

Dr. Stoll.

9.

Die Anzahl S_n der innerhalb eines nEcks fallenden Schnittpunkte seiner Diagonalen.

Auflösnng.

$$S_n = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}.$$

Beweis.

Die Anzahl der Schnittpunkte sei für das $(n-1)$Eck S_{n-1}. Berehnen wir die Anzahl der für das nEck zu dieser Zahl neu hinzukommenden Schnittpunkte

$$x = S_n - S_{n-1}.$$

Ist $ABCDEF$ ein $(n-1)$Eck, N das $n$te hinzugekommene Eck, so sei NC die erste von N ausgehende Diagonale. Diese wird von

allen von d ausgehenden Diagonalen, also mit $1 \times (n-3)$ Schnittpunkten durchschnitten.

Die zweite Diagonale NB wird von Diagonalen aus C und D durchschnitten. Es fallen aber nur $\gamma n - 4$ Schnittpunkte in die Fläche des nEcks (NC und Bd) kommen in Abrechnung. Also $2(n-4)$ Schnittpunkte.

Die dritte Diagonale NA gibt auf dieselbe Weise $3(n-5)$ Schnittpunkte.

Und die letzte Diagonale gibt $(n-3) \times 1$ Schnittpunkte. Daher ist

$$x = 1 \times (n-3) + 2(n-4) + 3(n-5) + \ldots (n-3) \times 1$$

Nun ist aber

$$1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\ldots+(n-2)\times 2+(n-1)\times 1+n(n-n)$$
$$= n \times \Sigma(n-1) - \Sigma n^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\times 2\times 3}$$
$$= \frac{n(n+1)(n-1)}{1\times 2\times 3} = \binom{n+1}{3}$$

So ist

$$1 \times n + 2(n-1) + \ldots + n \times 1 = \binom{n+2}{3}$$

eine Formel, die man auch aus der Tabelle aller Combinationen von $(n+2)$ Elementen zur dritten Classe ablesen kann.

Und

$$x = \binom{n-1}{3}.$$

Daraus folgt

$$S_n = \binom{n-1}{3} + \binom{n-2}{3} + \binom{n-3}{3} + \ldots \binom{3}{3}$$

Da aber

$$\binom{m}{n} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-3}{m-1} + \ldots \binom{m-1}{m-1},$$

eine Formel, die man ebenfalls aus einer Tabelle aller Combinationen von n Elementen zur $m$ten Classe ablesen, oder aus der Formel

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

ableiten kann, so ist

$$S_n = \binom{n}{4}.$$

Aschaffenburg.

F. Englert, Gymnasialabiturient.

10.

Neuer Beweis.

Wenn für alle Werte der veränderlichen Grösse φ die Gleichung

$$a_0 + a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + \ldots a_n \sin n\varphi = 0$$

stattfindet, dann ist jeder einzelne Coefficient a gleich Null.

Setzt man $\varphi = 0$ in oben stehende Gleichung, dann findet man sogleich $a_0 = 0$. Für alle Werte von φ gilt also auch

$$a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + \ldots a_n \sin n\varphi = 0.$$

Sei nun

$$0 < \varphi, < \varphi_2 \ldots < \varphi_{m-1} < \pi$$

Dann ist

$$\sin p\varphi_1(a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin 2\varphi_1 + \ldots a_n \sin n\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$\sin p\varphi_2(a_1 \sin\varphi_2 + a_2 \sin 2\varphi_2 + \ldots a_n \sin n\varphi_2)(\varphi_3 - \varphi_2) = 0$$

. . . .

$$\sin p\varphi_{m-1}(a_1 \sin\varphi_{m-1} + a_2 \sin 2\varphi_{m-1} + \ldots a_n \sin n\varphi_{m-1})(\pi - \varphi_{m-1}) = 0$$

Addirt man diese Gleichungen, so giebt der Grenzwert für unendlich zunehmendes m und unendlich abnehmende Differenzen $\varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_2, \ldots \pi - \varphi_{m-1}$:

$$\int_0^\pi (a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + \ldots a_n \sin n\varphi) \sin p\varphi \, d\varphi = 0$$

woraus folgt, wenn p eine ganze Zahl $<$ oder $= n$ ist:

$$a_p \int_0^\pi \sin^2 p\varphi \, d\varphi = 0 \quad \text{oder}$$

$$a_p \cdot \frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{woraus}$$

$$a_p = 0.$$

Ebenso lässt sich beweisen, dass wenn für alle Werte der veränderlichen Grösse φ die Gleichung

$$a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots a_m \cos n\varphi = 0$$

stattfindet, jeder einzelne Coefffcient gleich Null ist.

Dann findet man auf gleiche Weise

$$\int_0^\pi (a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots a_n \cos n\varphi) \cos p\varphi \, d\varphi = 0$$

woraus folgt

$$a_p \int_0^\pi \cos^2 p\varphi \, d\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad a_p = 0.$$

Utrecht, 2. October 1880. Dr. W. Kapteyn.

Litterarischer Bericht

CCLVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Stifels arithmetica integra. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik des 16. Jahrhunderts. Von Jul. Giesing, Oberlehrer an der Königlichen Realschule zu Döbeln. Döbeln 1879. C. Schmidt. 96 S.

Das Wort „integra" sagt, dass gegenüber den zahllosen Rechenbüchern seiner Zeit Stifels Werk als erstes die Bestimmung hatte, die gesammte Arithmetik vollständig zu umfassen. Der nähern Auskunft über dasselbe geht voraus eine Reihe gesammelter biographischer Notizen, welche allein vorliegen, um daraus Bruchstücke von Stifels Lebensgeschichte zu entnehmen. Er ward 1486 d. 19. April in Esslingen geboren. In seinem, der schriftstellerischen Tätigkeit vorausgehenden, wechselvollen Leben als Pfarrer mit wiederholten Unterbrechungen erweckt besonders sein freundschaftliches Verhältniss zu Luther Interesse. Anfangs ergab er sich sehr dem Hange aus Wort- und Buchstabenzählung in Sprüchen zu weissagen, verwarf denselben, verfiel ihm aber viel später noch einmal. Seine erste grössere Arbeit war die Ausgabe des Euklid, den er entgegen früherer kritischen Verkürzung wieder herstellte. Ueber deren Verhältniss zur arithmetica integra sagt die Schrift kein Wort, während sie von beiden beständig promiscue spricht. Doch wird als Fortschritt hervorgehoben, dass Stifel die Raumgrösse als Zahl auffasste, mithin der Geometrie von Descartes vorarbeitete. Dies würde indes im Euklid erst vom 5. Buche an Platz haben, von dem bis dahin noch nicht die Rede ist. Von der arithmetica integra heisst es hier zu-

erst, dass sie die Zahlen in rationale (numeri veri) und irrationale (ficti) einteilt, erstere wieder in abstracti und denominati. Ueber die Methode wird mitgeteilt, dass algebraische Aufgaben dadurch zur Lösung gelangen, dass man durch regelmässiges Probiren das Gesetz der Variation einer resultirenden Zahl findet, welche eine gegebene sein soll, von derselben aber anfangs differirt (regula falsi), also wesentlich verschieden von einem Durchprobiren bis zum Zutreffen. Es werden nun ausführlicher durchgegangen 1) die arithmetische, 2) die geometrische Proportion, 3) die Wurzelausziehung, 4) das Verhältniss, 5) die astronomische, 6) die musikalische Progression. Der vollständige Titel des Werkes ist: Arithmetica Integra, Authore Michaele Stifelio, Cum praefatione Philippi Melanchthonis. Norimbergae apud Joh. Petrejum. Anno Christi M. D. XLIIII. Cum gratia et privilegio Caesareo atque Regio ad Sexennium. H.

Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—29. Von Leo Königsberger. Leipzig 1879. B. G. Teubner. 104 S.

Die Wahl dieses kleinen Zeitraums ist dem Verfasser einerseits durch das 50jährige Jubiläum der fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum an die Hand gegeben, andrerseits fand er in demselben die wichtige Epoche der Entwickelung der Theorie, wo sich der Uebergang von der durch Legendre zur Reife gebrachten ersten Gestaltung zu der neuen Auffassung durch Jacobi und Abel vollzog. Es war offenbar nicht möglich die Erscheinungen aus diesen 4 Jahren zu beleuchten ohne auf die vorausgehende Geschichte Rückblicke zu tun. So wird denn die ganze schöpferische Tätigkeit Legendre's eingehend charakterisirt, und als wesentlich unterscheidend gegenüber den Arbeiten der Vorgänger aufgestellt, dass durch ihn zuerst die elliptischen Integrale um ihrer selbst willen untersucht, als besondere Functionen definirt, ihre nicht weiter zu reducirenden Gattungen ermittelt, und ihre Eigenschaften studirt werden, während es sich vorher nur um Relationen zwischen Curvenbogen u. s. w. handelte, zu deren Berechnung sie dienten. Der Verfasser lässt den Umfang der lange Zeit von ihm allein ans Licht gezogene Eigenschaften überblicken, welcher sich bis zur Behandlung des Multiplications- und Divisionsproblems erstreckt. Das Bedeutendste, was Legendre gelöst vorfand, war das von Euler entdeckte Additionstheorem. Die entschieden elegantere Lösung von Lagrange, die indes Legendre nicht adoptirte, wird hier nur ganz beiläufig erwähnt. Der Zeitfolge nach sollten nun die Arbeiten von Gauss besprochen werden; der Verfasser zieht es jedoch vor, nachdem er die längst vorausgegangene Ent-

deckung der doppelten Periodicität durch ihn constatirt hat, erst von Abel und Jacobi zu handeln. Es folgt nun die denkwürdige, in der Geschichte der Wissenschaften einzig dastehende Zeit, wo unter dem wetteifernden Zusammenwirken dieser zwei Männer eine grosse Entdeckung nach der andern ans Licht kam, und die Theorie in kurzem zu einer Vollendung geführt ward, wie sie durch den Zuwachs in den nächsten 50 Jahren nicht wesentlich grösser werden konnte; während als Dritter, Legendre, in beständigem Verkehr mit ihnen, ein tätiger Teilnehmer blieb. Von einem Verkehr mit Gauss ist nicht die Rede. Die Behandlungsweise deutet darauf, dass die Schrift als eine im Detail begründete Schilderung aufzufassen ist, dazu bestimmt dem Leser eine lebendige Vorstellung von den Vorgängen zu geben und namentlich die Beziehungen zwischen den Personen zu charakterisiren. Jede einzelne Darstellung wird mit der Mitteilung einer Stelle aus einem Briefe verbunden, in welcher sich dieselben gegenseitig über ihre Arbeiten aussprechen. Der Verfasser findet zwischen beiden den Unterschied, dass Abel seine Untersuchung auf die vorliegenden Integrale concentrirte, Jacobi hingegen allgemeine Eigenschaften der Functionen im Auge hatte. Die gegenseitige Mitteilung soll sich mit der Zeit mehr und mehr gemindert haben. Zum Schluss werden die gleichzeitigen Resultate der Untersuchungen von Gauss vorgeführt, die wol als ganz selbständige anzusehen sind. H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XII. Roma 1879. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte ist folgender.

1. bis 4. Heft. Antonio Favaro: Ueber das Leben und die Werke von Prosdocimo de' Beldomandi, Paduanischem Mathematiker des 15. Jahrhunderts.

5. Heft. P. Riccardi: Neue Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna. — Gustaf Eneström: Notiz über die Correspondenz Johann I Bernoulli's. — T. Zebrawski: Einige Worte in Betreff der Note von Herrn Maximilian Curtze über die Schreibung des Namens und über das Vaterland Witelo's. — Luigi Dall' Oppio: Bericht über die „Fisica tecnologica, elettricità e magnetismo, elettrometallurgia, accensione elettrica delle mine, illuminazione ellettrica, telefoni ecc." von Rinaldo Ferrini. Neapel, Mailand, Pisa 1878. Ulrich Hoepli. — F. Hultsch: Bericht über seine Ausgabe der erhaltenen Teile der Sammlung des Alexandriners Pappus mit lateinischer Interpretation

und Commentaren, in 3 Bänden. Berlin 1878. Weidmann. Aus dem Deutschen ins Italienische übersetzt.

6. Heft. Steinschneider: Ueber Johannes de Lineriis (Liveriis) und Johannes Siculus. — B. Boncompagni: Ueber die von Bernardino Baldi geschriebenen, noch nicht herausgegebenen Lebensbeschreibungen dreier Mathematiker (Johannes Danck, Johannes de Lineriis und Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro). Es folgen die 3 Lebensbeschreibungen, dann in einem Anhang Documente in Betreff der letzten.

Publicationsverzeichnisse im 2., 4. und 6. Heft.

Im 254. litt. Ber. ist der Wortlaut dreier Briefe von Lagrange mitgeteilt, von denen der Fürst Boncompagni Photolithographien veranstaltet hat, nebst nähern Angaben von Genocchi über die beiden ersten. Ueber den dritten, an Canterzani gerichteten, findet sich in den Atti della Reale Accad. delle Sc. di Torino, Vol. XIV. von demselben Autor jetzt Folgendes gesagt.

„Canterzani ward geboren in Bologna den 25. August 1734 und starb ebenda den 19. März 1819. Er ward 1760 zum Professor der Mathematik an dieser Universität ernannt, folgte 1766 dem berühmten Francesco Maria Zanotti als Secretär am Istituto di Bologna, gieng 1789 auf den Ruf des Staats-Secretärs Card. Boncompagni Ludovisi nach Rom, um über die beabsichtigten Reparaturen an der Kuppel von St. Peter sein Gutachten zu geben, und ward 1817 zum Präsidenten einer Section des Istituto Francese gewählt, welche ihren Sitz in Bologna hatte. Auch ward er in die Gesellschaft der Vierzig aufgenommen, und in deren Abhandlungen XIX. physikalische Abteilung, p. 141—171 las man die Lobesschrift des Piacentiner Marchese Ferdinando Landi, auf welche ein Verzeichniss der gedruckten und ungedruckten Werke Canterzani's folgte. Unter den ungedruckten fanden wir einige Schediasmi ad uso dell' eminentissimo Boncompagni, eine Schrift Sul principio delle velocità virtuali und eine Uebersetzung eines grossen Teils der analytischen Mechanik von Lagrange, mit Randglossen versehen, u. s. w. (p. 170—171.).

Es ist zu bemerken, dass in keinem gedruckten Werke die Erwählung Lagrange's zum Mitglied der Bologner Akademie sich erwähnt findet. Im 6. Band der Commentarii dell' Ist. Bol. zusammengetragen vom Secretär Canterzani wird Lagrange genannt, aber nicht als Mitglied der Akademie bezeichnet; daselbst wird, wo vom Princip der kleinsten Wirkung nach Maupertuis die Rede ist, behauptet, dass es in einigen Beziehungen der grösste Mathematiker Leonhard Euler bewiesen hat, „denique in plerisque omnibus is qui jure italorum

Geometrarum princeps nunc habetur, Ludovicus Lagrangius." Vorher wird im 1. Bande der Comm. (Bol. 1731. p. 48) systematisch festgesetzt, die Namen der aggregati all' Accademia wegzulassen." (Es folgt die Stelle).

Aufs neue hat der Fürst Boncompagni ein Facsimile eines Briefes herstellen lassen. Der Wortlaut folgt hiernächst. H.

Lettera inedita di Carlo Federico Gauss a Sofia Germain, pubblicata da B. Boncompagni. Firenze 1879. Calcografia e autografia Achille Paris.

Votre lettre du 20 Fevrier, mais qui ne m'est parvenue que le 12 Mars, a été pour moi la source d'autant de plaisir que de surprise. Combien l'acquisition d'une amitié aussi flateuse et précieuse est-elle douce à mon coeur; l'interêt vif, que Vous avez pris à mon sort pendant cette guerre funeste merite la plus sincère reconnaissance. Assurément, Votre lettre au Général Pernety m'eût été fort utile, si j'avais été dans le cas d'avoir recours à une protection spécielle de la part du gouvernement françois. Heureusement les évenemens et les suites de la guerre ne m'ont pas touché de trop jusqu' ici, bienque je suis persuadé, qu' elles auront une grande influence sur le plan de ma vie. Mais comment Vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voyant se metamorphoser mon correspondant estimé Mr. Leblanc en cet illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j' aurois peine de croire. Le goût pour les sciences abstractes en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare: on ne s'en étonne pas, les charmes enchanteux de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu' à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu' une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos préjugés doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches épineuses, sait néansmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu' elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. En effet rien ne pourroit me prouver d'une manière plus flateuse et moins équivoque, que les attraits de cette science, qui ont embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimériques que la prédilection, dont Vous l'avez honorée.

Les notes savantes, dont toutes Vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle Vous avez pénétré toutes

les branches de l'Arithmétique, et la sagacité avec laquelle Vous avez su généraliser et perfectionner. Je Vous prie d'envisager comme une preuve de cette attention, si j'ose ajouter une remarque à un endroit de Votre dernière lettre. Il me semble, que la proposition inverse, savoir „si la somme des puissances n^emes^ de deux nombres quelconques est de la forme $hh+nff$, la somme de ces nombres eux-mêmes sera de la même forme" est énoncée un peu trop généralement. Voici un exemple où cette règle est en défaut:

$$15^{11}+8^{11} = 8649\,955\,859\,375+8\,589\,934\,592 =$$
$$8658\,345\,793\,967 = 1595\,826^2+11.745\,391^2$$

Néans moins $15+8=23$ ne peut se réduire sous la forme $xx+11yy$. Il en est de même de la proposition: si l'un des facteurs de la formule $yy+nzz$ (n étant un nombre premier) est de la forme $(1, 0, n)$, l'autre appartient nécessairement à la même forme. Votre démonstration ne prouve que ce, qu' aucune autre forme indéfinie, que telle qui est équivalente à $(1, 0, n)$, multipliée par la forme $(1, 0, n)$, ne peut donner le produit $(1, 0, n)$, mais cette démonstration ne s'étend pas sur les nombres définis. Soit, pour le déterminant $-n$, C une classe de formes, quelconque mais ni équivalente à la principale, ni à une autre classe *anceps*, soit D la classe résultante de la duplication de C (qui sera différente de la principale), enfin soit D' la classe opposée à D. Il s'ensuit, que de la composition de $C+C+D'$ résulte la classe principale. Ainsi si les deux nombres f, g peuvent être représentés par une forme de la classe C, et le nombre h par une forme de la classe D', le produit $fg \times h$ peut se réduire à $(1, 0, n)$; mais il est facile que fg ne se réduit pas seulement à D ou D', mais aussi à $(1, 0, n)$. Nous avons donc ici le cas, qu' un facteur fg, et le produit $fg.h$ sont de la forme $(1, 0, n)$, sans que pourtant l'autre facteur y appartienne nécessairement. Au reste on voit facilement que le premier facteur doit être composé, sans cela la proposition serait juste. Dans l'exemple ci dessus le facteur $\frac{15^{11}+8^{11}}{23}$ enveloppe le diviseur 67.

Depuis cinq ans des travaux astronomiques — auxquels pour le dire en passant je dois surtout l'heureuse situation, dont j'ai joui pendant la vie de notre duc, le victime malheureux de son attachement fidèle à la maison de Prusse — m'ont empêché de me délivrer autant qu' auparavant à ma prédilection pour l'Arithmétique et les autres branches d'analyse. Je n'ai pas pourtant négligé celle ci tout à fait. Tout au contraire j'ai rassemblé peu à peu un grand nombre de recherches, qui un jour fourniront un autre volume — si non deux

— certainement pas moins intéressant que le premier. Même dans le dernier hiver j'ai réussi à y ajouter une branche entièrement nouvelle. C'est la théorie des résidus cubiques et des résidus biquarrés, portée à un degré de perfection é g a l à celui, qu' a atteint la théorie des residus quarrés. Je mets cette théorie qui repand un nouveau jour sur les résidus quarrés parmis les recherches les plus curieuses dont je me sois jamais occupé. Je ne saurais Vous en donner une idée sans écrire un memoire exprès. Voici pourtant quelque théorème special, qui pourra servir d'un petit échantillon.

I. Soit p un nombre premier de la forme $3n+1$. Je dis que 2 (c. à. d. $+2$ et -2) est résidu cubique de p, si p se réduit à la forme $xx+27yy$; que 2 est non résidu cubique de p, si $4p$ se réduit à cette forme. P. E. 7. 13. 19. 31. 37. 43. 61. 67. 73. 79. 97. Vous ne trouverez que $31 = 4+27$, et $2 \equiv 4^3$ (mod. 31) $2 \equiv (-9)^3$ (mod. 43).

II. Soit p un nombre premier de la forme $8n+1$. Je dis que $+2$ et -2 seront résidus ou non-résidus biquarrés de p, suivant ce que p est ou n'est pas de la forme $xx+64yy$. Par ex. parmi les nombres 17. 41. 73. 89. 97. 113. 137. Vous ne trouvez que $73 = 9+64$, $89 = 25+64$, $113 = 49+64$, et $25^4 \equiv 2$ (mod. 73), $5^4 \equiv 2$ (mod. 89), $20^4 \equiv 2$ (mod. 113).

Les démonstrations de ces théorèmes et de ceux qui sont plus généraux sont intimement liées à des recherches délicates. — Voici une autre proposition relative aux résidus quarrés, dont la démonstration est moins cachée: je ne l'ajoute pas, pour ne pas Vous dérober le plaisir de la développer Vous-même, si vous la trouverez digne d'occuper quelques momens de Votre loisir.

Soit p un nombre premier. Soient les $p-1$ nombres inférieurs à p partagés an deux classes

A . . . . $1, 2, 3, 4, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$
B . . . . $\frac{1}{2}(p+1), \frac{1}{2}(p+3), \frac{1}{2}(p+5), \ldots p-1$

Soit a un nombre quelconque non-divisible par p. Multipliez tous les nombres A par a: prenez en les moindres résidus selon le module p, soient, entre ces résidus, α appartenants à A et β appartenants à B de sorte que $\alpha+\beta = \frac{1}{2}(p-1)$. Je dis, que a est résidue quarré de p, lorsque β est pair, non-résidu lorsque β est impair.

On peut tirer de cette proposition plusieurs conséquences trèsremarquables; entre autres elle donne le moïen d'étendre l'induction, par laquelle on rassemble des cas spéciels du théorème fondamental

aussi loin qu' on veut, ce qui ne pourroit se faire par les méthodes exposeés art. 116—124.

J'ai donné dans mon ouvrage deux démonstrations rigoureuses de ce fameux théorème et j'en possède encore trois autres toutes entièrement différentes entre elles; deux d'entre elles même peuvent être conduites de deux différentes manières chacune: ainsi je pourrois soutenir que je peux le démontrer de sept manières différentes. Les autres démonstrations que je préférerois pour l'élegance aux deux données dans mon ouvrage seront publiées aussitot que j'ay trouverai l'occasion. A propos, dans la première démonstration qui se trouve dans la IV. section il s'est glissé une faute legère que je n'ai aperçue qu' après que je ne pouvois plus l'indiquer. Il faut donc faire la correction suivante.

p. 146. (cas (4)) l. 21 lisez comme il suit: „Facile vero perspicitur, ex ista aequatione deduci posse haec $a'pRh$ ... (α), $\pm ahRa'$ ... (β), $\pm ahRp$ ... (γ). Ex (α) sequitur, perinde ut in (ε), h vel utriusque a', p vel neutrius residuum esse. Sed casus prior ideo est impossibilis, quod ex hRa' et (β) sequeretur aRa' contra hypoth. Quamobrem necessarie est hNp ideoque, per (γ), aNp. Q. E. D.“

Au recto à la page 144 il se trouve une faute d'impression non indiquée, savoir art. 139 ligne 3 au lieu de $\pm aNp$ il faut lire $\pm ARp$.

J'aurois répondu plus tot à Votre lettre, mais la découverte d'une nouvelle planète par Mr. Olbers m'a un peu distrait. Par le premier essai que j'ai fait sur son orbite, je trouve son mouvement considérablement plus vîte que celui de Cérès, Pallas et Junon, savoir 978″ par jour. L'inclinaison de l'orbite de 7° 6′. L'excentricite 0, 1. Cette planète a beaucoup plus de clarté que Cérès, Pallas et Junon, et j'espère à la trouver parmi les observations de l'histoire celeste, peut être même parmi celles de Flamsteed. Je viens d'achever un ouvrage étendu sur les méthodes, qui me sont propres, à déterminer les orbites des planètes. Mais quoique je l'ai écrit en allemand, je trouve beaucoup de difficulté d' y engager un libraire. La guerre a suspendu tout connexe, plusieurs de nos plus grands libraires l'ont refusé. Je suis à présent à traiter avec un autre qui se montre un peu plus courageux. S'il trouvera son cente à cette entreprise, peut-être il sera encouragé par-là à risquer la publication d'un second volume de mes disquisitiones.

Continuez, Mademoiselle, de me favoriser de Votre amitié et de

Votre correspondance, qui font mon orgueil, et soîez persuadée, que je suis et serai toujours avec la plus haute estime

Bronsvic ce 30 April 1807 jour de ma naissance. Votre plus sincère admirateur Ch. Fr. Gauss.

Methode und Principien.

Neue Theorie des Imaginären in der Functionenrechnung und der Analytischen Geometrie von Wilhelm Friedrich Schüler. Programm zu dem Jahresberichte der k. bayerischen Realschule Freising pro 1877/78. 56 S.

Um einen imaginären Punkt mit den complexen Coordinaten $x+i\xi$, $y+i\eta$, $z+i\zeta$ reell im Raume darzustellen, construirt der Verfasser zuerst den reellen Punkt (xyz) und trägt dann von ihm aus nach der durch $\frac{\eta}{\xi}$, $\frac{\zeta}{\xi}$ bestimmten Richtung das Stück $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^3}$ ab. Offenbar ist dies weiter nichts als die Construction und Verbindung der 2 Punkte (xyz) und $(x+\xi, y+\eta, z+\xi)$. Die Strecke von ersterm zu letzterm, für conjugirte Punkte entgegengesetzt genommen, nennt er Potenz und sagt. ein imaginärer Punkte sei dargestellt durch einen reellen Punkt, eine Richtung und eine Potenz; verschwinde die Potenz, so könne die Richtung noch bestimmt bleiben; in diesem Falle nenrt er den Punkt einen Curvenpunkt. Der Begriff der Derivation einer Function müsse erweitert werden; er definirt sie als den Quotienten der imaginären Teile von Function und Argument, so dass, wenn $x=a+ib$, und $f(x)=A+iB$, $f'(x)=\frac{B}{b}$ sein würde. Einzige Voraussetzung sei also die Darstellung von $f(x)$ in der Form $A+iB$; mit der Stetigkeit habe der Begriff nichts zu tun. Zu erinnern ist hiergegen, dass ohne Stetigkeit oder, was derselben gleichkommt, ohne einen Curvenzug, der eigentliche Derivationsbegriff sich unter den neuen nicht subsumiren lässt; dann aber hat letzterer keinen Anspruch darauf eine Erweiterung zu heissen und kann in Betreff der Leistungen den erstern nicht ersetzen. Noch andere Begriffe findet der Verfasser Grund zu erweitern, z. B. den der Exponentialfunction e^x auf $e^{x+2mi\pi x}$. Ungeachtet aller hierin enthaltenen Willkür sei dem Verfasser die Berechtigung dazu nicht bestritten, wenn er, was er in der Tat verspricht, eine erwiesenermassen widerspruchslose Theorie daraus herleitet. Wenn er aber erwartet, dass ihm ein Leser auf dem Wege der Herleitung folgen soll, so

hätte er, u. E., auch versprechen müssen, dass durch die Theorie etwas für die Wissenschaft gewonnen sei, und dies hat er nicht getan. Die der Reihe nach behandelten Themata sind: Geometrische Bedeutung der arithmetischen Operationen, das Imaginäre in der analytischen Geometrie, Prüfung dieser Interpretation, die Potenzfunction, die Exponentialfunction, Ableitungen der einzelnen Functionen, die ersten Lehrsätze der Functionenrechnung, allgemeine Eigenschaften einer Function einer complexen Veränderlichen; analytische Geometrie: die reelle Curve 1. Ordn. (Gerade), die complexe Curve 1. Ordn., imaginäre Gerade durch reellen und complexen Punkt, complexe Curve 1. O. durch 2 complexe Punkte, Coordinaten einer imaginären Geraden, die reellen Curven 2. O. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. A. Meyer, ord. Professor an der Universität zu Lüttich. Deutsch bearbeitet von Emanuel Czuber. Leipzig 1879. B. G. Teubner. 554 S.

Die gegenwärtige deutsche Ausgabe ist das Resultat einer zweimaligen Bearbeitung des im Manuscript hinterlassenen Originals. Diesem gieng voraus das von A. Meyer selbst herausgegebene Werk „Theorie analytique des probabilités a posteriori". Die erste französische Ausgabe ward von F. Folie, dem das Manuscript anvertraut war, veranstaltet. Es wurden einige Rechenfehler berichtigt, einige Erklärungen eingeschaltet, eine Lücke mit Hülfe der Aufzeichnungen eines Zuhörers ergänzt, eine neue Einteilung eingeführt, die beiden Fehlertheorien von Laplace und Bienaymé an das Ende gesetzt und ein Auszug aus den Sterblichkeitstafeln von Quetelet hinzugefügt. Nach Folie's Aussage enthält das Werk vollständig die bedeutendsten Arbeiten über Wahrscheinlichkeitsrechnung von Bernoulli, Moivre, Laplace, Poisson, Gauss, Encke, Bienaymé u. A. Als eigne Production Meyer's führt er an Verallgemeinerungen von Problemen mit Hülfe der höhern Analysis und Differenzenrechnung, einen Beweis des Bernoulli'schen Theorems nebst Verallgemeinerung, den Rechnungsgang bei Entwickelung der Formeln von Laplace und zahlreiche Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Bevölkerung und Versicherungswesen. Beim Theorem und Problem von Poisson wird von Folie darauf aufmerksam gemacht, dass den Näherungsrechnungen kein Vertrauen zu schenken sei. Mit der Uebersetzung waren, zufolge der Vorrede, neue Veränderungen verbunden; namentlich hat

das Capitel über Ausgleichungsrechnung eine durchgreifende Umarbeitung und Erweiterung erfahren, wobei die Bedürfnisse für die gewöhnlichen Fälle Augenmerk waren. Den im Original behandelten Aufgaben ward jene über Functionen direct beobachteter Grössen und ein Abschnitt über Ausgleichung bedingter Beobachtungen hinzugefügt; neben der Ableitung der vorteilhaftesten Werte der Unbekannten hat der Bearbeiter auch der Genauigkeitsbestimmung und den Rechnungscontrolen Raum gegeben und den einzelnen Abschnitten vollständig durchgeführte Beispiele aus verschiedenen Gebieten der Anwendung angeschlossen. In den Entwickelungen wurden nach Helmert's Vorgang die wahren Fehler ven den plausibeln geschieden. Auch das Capitel über Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Sterblichkeit u. s. w. ist neu bearbeitet gemäss den Fortschritten aus den letzten Jahren. Als selbständige Arbeit giebt Czuber an die Entwickelung der mittlern Dauer der Ehen, des Witwen- und Witwerstandes. Der Inhalt des Buches ist (abgekürzt) folgender: Grundregeln, Wahrscheinlichkeiten wiederholter Versuche, Bernoulli's Theorem, mathematische und moralische Hoffnung, Wahrscheinlichkeiten der Ursachen und künftigen Ereignisse, Satz von Bayes, Satz von Laplace über die Wahrscheinlichkeit der Mittelwerte von Beobachtungen, Theorie der Beobachtungsfehler, Wahrscheinlichkeiten bezüglich auf das Menschenleben, Lebensversicherungen, Wahrscheinlichkeiten von Zeugenaussagen und Urteilen, Fehlertheorien nach Laplace, nach Bienaymé, Ausdehnung des Bernoullli'schen Theorems auf Factoriellen von Binomen, Anmerkungen und 3 Tafeln. H.

Généralisation du logarithme et de l'exponentielle. Par J. Farkas. Budapest 1879. F. Kilian. 121 S.

Der Verfasser behandelt die Theorie der elliptischen Integrale in der Form, wo die Function unter dem Wurzelzeichen ein Product dreier linearen Factoren ist. H.

Invarianti, covarianti e contravarianti delle funzioni omogenee, nota del P. Giacomo Foglini. (estr. dagli Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei XXXI.). Roma 1879. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 70 S.

Die Theorie der Invarianten ist hier für Studirende in klarem, leicht verständlichem Vortrage bearbeitet. H.

Vorlesungen über lineare Differential-Gleichungen. Von Prof. Simon Spitzer. Wien 1878. Carl Gerold's Sohn. 194 S.

Integration particller Differential-Gleichungen. Von Prof. Simon Spitzer. Wien, 1879. Carl Gerold's Sohn. 93 S.

Im 225. litt. Ber. ist eine der Fortsetzungen der Schrift desselben Verfassers: „Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen" besprochen. Die gegenwärtige Schrift „Vorlesungen etc." unterscheidet sich von den „Studien" nicht durch den Inhalt, aber durch eine weit sorgfältigere Bearbeitung. Der durchgehende Gesichtspunkt ist hier: Wieweit kann jede Aufgabe durch die einzelnen namhaften Methoden gelöst werden? eine Frage die in jener dem Leser meist überlassen war zu untersuchen. In der Vorrede wird durch eine Reihe von Arbeiten über dieselbe lineare Gleichung 2. Ordn. mit linearen Coefficienten, deren Autoren sämmtlich die Laplace'sche Methode entweder zu grossem Nachteil ungenutzt lassen oder anwenden ohne Laplace zu nennen, gezeigt, dass Laplace's Arbeit ganz vergessen war. Die zweite Schrift „Integration etc." ist ein Versuch die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen nach dem gewöhnlichen Inhalt im Zusammenhang darzustellen. Hierzu kommt die Behandlung einer grössern Zahl specieller Aufgaben. Der 1. Abschnitt betrifft die trinomische totale Differentialgleichung. Die 2 folgenden die linearen, der letzte die nicht linearen partiellen 1. Ordnung.

H.

Vermischte Schriften.

Nouvelle Correspondance mathématique. Rédigée par Eugène Catalan, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liége; avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. Tome cinquième. Liége 1879. E. Decq.

Der Inhalt der 2. Hälfte des Bandes an Abhandlungen ist folgender.

Starkof: Ueber die Integration der linearen Gleichungen.

Chadu: Ueber den Kreis der 9 Punkte.

Neuberg: Ueber die Krümmung der Linien.

Ribaucour: Ueber die einhüllenden Curven von Kreisen und die einhüllenden Flächen von Kugeln.

Brocard: Ueber die Häufigkeit und Gesammtzahl der Primzahlen (Forts. Bd. V.).

Neuberg: Ueber die homologen Dreiecke (Bemerkungen d. Red.).

Lucien Lévy: Darlegung der ersten Eigenschaften der Flächen 2. Grades.

Neuberg: Ueber die homologen Tetraeder.

Neuberg: Eigenschaft des Dreiecks (Forts. Bd. III.).

E. Catalan: Eine Eigenschaft der Zahl 365.

Neuberg: Ueber die Cykloide.

P. Mansion: Principien der Theorie der Developpoiden der ebenen Curven.

G. de Longchamps: Ueber die kubischen Unicursalen.

E. Catalan: Ueber die Zerlegung eines Kubus in 4 Kuben.

J. L. W. V. Jensen: Multiplication zweier convergenten Reihen.

S. Realis: Fragen aus der numerischen Analysis.

E. Catalan: Ueber einen Grundriss der descriptiven Geometrie.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CL.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Redtenbacher, F., geist. Bedeut. d. Mechanik u. geschichtl. Skizze d. Entdeckung ihrer Prinz. München, Bassermann. 2 Mk. 40 Pf.

Methode und Principien.

Crookes, W., strahlende Materie. Dtsch. hrsg. v. H. Gretschel. Leipzig, Quandt & H. 1 Mk. 50 Pf.

Kleinpaul, H., d. Sonne u. d. Leben. Rochlitz, Bode. 1 Mk. 20 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Boyman, J. R., Lehrbuch d. Mathematik. 2. Thl. 5. Afl. Düsseldorf, Schwann. 2 Mk. 25 Pf.

Gandtner, J. O., u. K. F. Junghans, Sammlg. v. Lehrsätzen u. Aufgaben aus d. Planimetrie. 1. Thl. 4. Afl. Berlin, Weidmann. 2 Mk. 40 Pf.

Gauss, F. G., fünfstell. vollst. logarithm. u. trig. Tafeln. 20. Afl. Halle, Strien. 2 Mk.

Harms, Chr., d. erste Stufe d. mathem. Unterrichts. 1. Abth. 4. Afl. Oldenburg, Stalling. 1 Mk. 25 Pf.

Heis, E., Sammlg. v. Beisp. u. Aufgaben aus d. allg. Arithmetik u. Algebra. 54. Afl. Cöln, DuMont-Schauberg. 3 Mk.

Hermes, O, Sammlg. v. Aufgaben aus d. Goniometrie u. ebenen Trigonometrie. Berlin, Winckelmann & S. 3 Mk. 60 Pf.

Jordan, W., Hülfstafeln f. Tachymetrie. Stuttgart, Metzler. 8 Mk.

— Tables tachymétriques. Ebd. 8 Mk.

Martus, H. C. E., math. Aufg. 2. Thl. Resultate. Leipzig, Koch. 4. Afl. 4 Mk. 20 Pf.

Litterarischer Bericht
CCLVIII.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der ebenen Geometrie für Schüler höherer Lehranstalten, mit Anleitung zur geometrischen und algebraischen Analysis und einer Auswahl theils gelöster, theils nicht gelöster Aufgaben. Von Dr. K. F. Junghans, Professor am Stadt-Gymnasium in Stettin. Erster Theil. Mit 316 — Zweiter Theil. Mit 289 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1879. Weidmann. 260 und 291 S.

Der 1. Teil enthält vollständig die Planimetrie in der dem Gymnasialunterricht angemessenen Form bearbeitet. Obwol vom Verfassser zum Hülfsmittel der Repetition bestimmt, wird die Doctrin doch, wie er es für notwendig erklärt, in vollkommener Ausführlichkeit vorgetragen, ausreichend um sogar minder Begabten zum Selbstunterricht zu dienen. Citate wollte der Verfasser so gut als möglich vermeiden. Dies geht so weit, dass z. B. derselbe Beweis für den 1. Congruenzsatz factisch zweimal geführt wird, offenbar um die Reihe der Congruenz nicht zu unterbrechen. Dass der Abfassung keine Kürze auferlegt war, hatte natürlich manches Gute znr Folge. Systematische Ordnung und Uebersichtlichkeit zu erreichen war deshalb leicht, ist aber auch in anerkennenswerter Weise geschehen. Deutlichkeit und Präcision des Ausdrucks, worauf gleichfalls die Vorrede Gewicht legt, ist mit sichtlichem Fleisse angestrebt worden; wenn gleichwol noch einiges zu bessern bleibt, so ist es zu unbedeutend um es zu nennen. Manchmal verbindet noch ein zweifelhaftes „oder" den richtigen und den ungenauen Ausdruck, als wolle der Verfasser es den Lesern überlassen sich darüber zu streiten. Auch den Anforderungen strenger

Logik ist infolge der Ausführlichkeit etwas grössere Aufmerksamkeit zugewandt worden. Die Parallelentheorie stützt sich zum Ueberfluss auf drei Axiome, deren jedes zum Beweise der beiden andern hingereicht hätte. In der Proportionslehre, deren rein arithmetischer Teil hier in die Geometrie eingeschaltet und den Proportionen der Raumgrössen vorausgeschickt ist, wird der Fall der Incommensurabilität nicht nur in vollem Masse erörtert, sondern auch die Beweise rücksichtlich desselben durch Anwendung unendlichkleiner Differenzen vervollständigt. In beiden Punkten findet sich jedoch Uebermass mit Mangel auf der andern Seite verbunden. Der Begriff des Winkels wird dreifach charakterisirt, wiewol die 3 Bestimmungen nicht gehörig geschieden, sondern etwas ineinander geschoben sind. Der Winkel wird zuerst als die Winkelfigur betrachtet, die Schenkel beliebig lang, was leider erst im nächsten Satze steht: dann als sog. Winkelblatt, d. i. Region der unbegrenzten Ebene. Letzteres ist hier ganz unverständlich ausgedrückt, mit den Worten: „Ein Winkel ist der ebene, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum zwischen zwei beliebig langen geraden Linien, welche von demselben Punkte ausgehen“. Beliebig lange, also doch immer begrenzt gedachte Schenkel können einen Raum weder ganz noch einseitig begrenzen, denn sie sperren keinen Punkt der Ebene vom andern ab. Was aber soll der Schüler bei den Worten „nach einer Seite hin“ denken? Da die hier gemeinte Bestimmung des Winkels im ganzen Buche keine Anwendung findet, da sie überdies für Anfänger und logisch nicht ganz feste Individuen eine Quelle unklarer Begriffe ist, so hätte sie überhaupt wegfallen sollen. Sie scheint nur, weil einmal jene Verpflanzung eines Begriffs der höhern Wissenschaft in die Elementarmathematik sehr verbreitet ist, dazu aufgenommen zu sein, damit die Sache auch den Lesern dieses Buchs nicht unbekannt bleiben soll. Das Uebel, das dem Einen recht ist, ist dem Andern billig. Drittens wird aufgestellt: Der Winkel „giebt die Grösse der Abweichung an, welche zwischen den Richtungen der beiden Geraden stattfindet“. Dies ist richtig und zur Orientirung notwendig. Nur soll man den hinderlichen Irrtum fern halten, als ob dadurch die Winkelgrösse definirt wäre. Der Satz spricht nur aus, wozu der Winkel, der aber noch bestimmt werden soll, dient. Durch ihn wird erst die Richtung ein exacter Begriff, sofern er jede Verschiedenheit der Richtung festsetzen lehrt. Dass nun jener Irrtum auch hier waltete, ist freilich positiv durch nichts kund gegeben. Wenn aber nach aller reichlichen Charakterisirung das die wirkliche Definition der Winkelgrösse enthaltende und vertretende Kriterium der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel durch Aufeinanderlegen schliesslich ganz ausbleibt, so kann doch der Leser nicht anders denken, als dass der Verfasser gemeint habe, der Winkel sei durch das Beigebrachte bereits definirt. Das Fehlen dieses un-

entbehrlichen Satzes ist um so auffälliger, weil er in der Regel selbst in weit compendiösern Lehrbüchern zu finden ist. Statt der Erklärung wird also hier geliefert 1) die Anschauung, 2) eine zugezogene, nicht zur Deutlichkeit gebrachte Speculation, 3) der Zweck des Winkels; über alledem wird die Definition vergessen. Ein solches Zuviel und Zuwenig findet sich nun auch in der Behandlung der Incommensurabilität. Mehrere Sätze werden erst für den Fall commensurabler, dann incommensurabler Linien bewiesen, letzteres mit Anwendung der Grenzeneinschliessung. Dass die Einschliessung des Resultats zwischen Grenzen nicht genügt um die genaue Geltung des Satzes daraus zu folgern, hat in der Tat insofern Beachtung gefunden, als hinzugefügt wird, die Differenz der Grenzen sei unendlich klein. Nicht beachtet aber ist, dass die unendlich kleine Differenz zum Beweise der genauen Geltung schon allein ausreicht. Die Grenzeneinschliessung kann in manchen Fällen ein Glied des Beweises sein, sofern sie das einzige oder leichteste Mittel ist die unendliche Kleinheit der Differenz zwischen der ideellen und berechneten Grösse darzutun. Hier und überall, wo diese unmittelbar auf der Hand liegt, ist sie überflüssig, und beeinträchtigt das Verständniss, indem sie den Gedanken auf ein falsches, nichtiges Beweismoment ablenkt. Ihre traditionell gewordene Anwendung erklärt sich wol daher, dass man aus Resignation auf exacte Beweise zufrieden war eine approximative Geltung der Sätze innerhalb bestimmter Grenzen festzustellen. Da dieser Gesichtspunkt hier nicht am Platze ist und wol auch nicht gewaltet hat, so war es an der Zeit, einmal dieses lange in gedankenloser Nachahmung geübte Verfahren fallen zu lassen und den logischen Connex in seiner natürlichen Einfachheit an's Licht zu stellen. Hierzu bedurfte es wol einer etwas grössern Ausführlichkeit in der letzten Folgerung. Der Verfasser hat in der Vorrede erklärt, dass er indirecte Beweise soviel als möglich vermieden habe; er hält sie also für weniger leichtfasslich; ob er darin recht hat, mag dahingestellt sein. Der exacte Schluss von der unendlich kleinen Differenz auf die genaue Geltung ist aber ein indirecter und kann kein andrer sein. Seiner Ansicht zufolge konnte der Verfasser nicht voraussetzen, dass ihn die Schüler von selbst richtig vollzögen, er musste wissen, dass beim blossen Hinweis auf die unendlich kleine Differenz der Grund der Bündigkeit des Schlusses im dunkeln bleibt. War es nun vielleicht gerade der Zweck der Kürze, die indirecte Natur des Schlusses durch das Hinwegeilen über denselben zu verhüllen? Dann würde er sich zu dem Grundsatze bekennen: Besser nicht verstanden als auf indirectem Wege verstanden. Ueberflüssig also war die Approximation von zwei Seiten, wo die einfache dasselbe tat; Mangel hingegen trat hervor in der versäumten Darlegung des wirklichen logischen Zusammenhangs. Der Inhalt des 1. Teils ist der

gewöhnliche. Den 2. Teil bilden Verwendungen der neuern synthetischen Geometrie für den Schulunterricht und Aufgaben, nämlich die Transversalen des Dreiecks, die harmonische Teilung, Pole und Polaren, Aehnlichkeitspunkte der Kreise, die Berührungsaufgabe des Pappus und verwandte Aufgaben, die Berührungsaufgabe des Apollonius, algebraische Eigenschaften der Kreise am Dreieck, algebraisch-geometrische Berechnungen, algebraische Analysis, Aufgaben mit geometrischer Analysis ohne und unter Anwendung von Proportionen, Aufgaben mit algebraischer Analysis, Aufgaben zu algebraisch-geometrischen Berechnungen und das Malfatti'sche Problem. Die Lösungen der Aufgaben sind im Anfang durchgeführt, weiterhin nur die Analysis angegeben, auch die Berechnungen, die einfachsten Fälle ausgenommen, durchgeführt. Die Aufgaben beginnen mit den fundamentalen und schreiten durch Synthesis fort; willkürliche Specialisirungen kommen nicht vor. H.

Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. Von Dr. Johann Robert Boymann, Professor am Königlichen Gymnasium zu Coblenz. Zweiter Teil: Ebene Trigonometrie und Geometrie des Raumes. Fünfte, verbesserte Auflage, besorgt von Dr. Carl Werr, Gymnasialoberlehrer zu Coblenz. Düsseldorf 1880. L. Schwann. 214 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich durch grosse Ausführlichkeit aus, sichtlich mit der Bestimmung jeden Gegenstand vollständig nach allen Seiten hin zu erörtern und auf jede mögliche Frage klare Auskunft zu geben, aber auch in dem Sinne, dass es sich Concinnität nicht zum Gesetz macht und Wiederholungen nicht verschmäht. Durch eine solche Ausbreitung des Lehrstoffs kann den Schülern die Beherrschung desselben erschwert werden, doch möchte dieser Nachteil hier kaum zu besorgen sein, weil durch strenge Ordnung und Gleichmässigkeit der Betrachtung das Bewusstsein stets erhalten wird, dass es sich nicht um eine Menge, sondern immer nur um denselben Gegenstand handelt. Der Verfasser hat es vorgezogen jede der 4 goniometrischen Functionen gesondert zu behandeln und erst dann ihre Relationen zuzuziehen, während man wohl auch Grund finden kann umgekehrt zu Werke zu gehen, namentlich zuerst beim ersten Quadranten zu verweilen. Die Berechtigung des letztern bestätigt sich sogar durch eine Inconsequenz, zu der das gewählte Verfahren veranlasst hat. Da im Anfang die Winkel unter dem Functionszeichen durch alle positiven Quadranten geführt werden, da ausserdem negative Winkel erklärt sind, so gehörten offenbar die Functionen der negativen Winkel ebendahin; diese kommen aber erst zwischen den Relationen der verschiedenen Functionen. Ausdruck und Aufstellungen

sind zum grössten Teil correct, doch sind die Ausnahmen davon nicht unerheblich. Der stärkste Fehler ist wol die uneingeschränkte, auch nachträglich nicht verbesserte Behauptung, durch die goniometrischen Functionen seien die Winkel bestimmt; von einer Mehrwertigkeit steht kein Wort da. Also gerade an dem Punkte, wo das gedankenlose Rechnen irre geht, giebt das Lehrbuch das Beispiel der Vergesslichkeit. Ferner wird zwar auf Seiten der Functionen hinreichend erklärt, dass sie als Linienverhältnisse reine Zahlen sind, auf Seiten der Winkel aber, wo doch ganz das gleiche gilt, die Meinung erhalten, als seien es benannte Zahlen von heterogener Qualität. Die Stufe, auf welcher der Schüler der Trigonometrie steht, rechtfertigt oder entschuldigt diese Darstellung keineswegs. Denn ihr geht die elementare Kreisberechnung voraus, von der auch das Lehrbuch vorübergehende Anwendung macht, indem es die Winkel gelegentlich durch Kreisbogen ersetzt. Hiernach ist es auf jener Stufe sehr wol bekannt, dass Grade nichts sind als Teilungszeichen eines Linienverhältnisses, nämlich von Kreis und Radius, mithin reine Zahlen, sogut wie $\frac{3}{10}$ trotz der Benennung Zehntel eine solche ist. Die vermeintliche Heterogeneität widerlegt sich sofort durch den Ausdruck des Kreissegments, indem er die Differenz des Centriwinkels und seines Sinus zum Factor hat. Käme aber auch der betreffende Fall im Cursus nicht vor, so wäre doch eine Behauptung, wie sie hier in einer Note steht, $\sin(x^2)$ habe keinen Sinn, als irrig zu verwerfen. Für die Weglassung der Klammern in $(\sin x)^2$ genügt die Einführung und ihr praktisches Motiv zur Rechtfertigung.

In der Trigonometrie wird mit dem rechtwinkligen Dreieck begonnen, dann folgt das gleichschenklige mit Anwendung auf die regelmässigen Vielecke, dann das beliebige Dreieck. In der Stereometrie folgt auf die Lehre von der Lage der Ebenen und Geraden, welche verhältnissmässig kurz behandelt ist, deren Einleitung aber durch ihre sehr wol orientirenden, systematischen Betrachtungen sich auszeichnet, die Ecke, die Polyeder, der Cylinder, der Kegel, die Kugel, die sphärische Trigonometrie. Die Beweise sind sämmtlich einfach und bündig, und dazu sorgfältig die besten bekannten Methoden ausgewählt. Ein Versehen ist es wol, dass in §. 2. die zweideutigen Worte „... oder nicht“, welche man als allgemeine Verneinung zu verstehen Anlass hat, während nur die Verneinung der Allgemeinheit richtig ist, stehen statt „... oder nicht alle“. Die Figuren sind in den Text eingedruckt. Auf jeden Abschnitt folgt eine Reihe von Aufgaben. Hinsichtlich der frühern Auflagen haben manche methodische Verbesserungen stattgefunden, auch ist die Secanten-Function beseitigt.

H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Erster Theil: Planimetrie. Mit 174 in den Text gedruckten Figuren. Hamburg. 1880. F. H. Nestler u. Melle. 99 S.

Der Bestimmung des Buchs zum Gebrauche für Schüler, die ihre mathematische Ausbildung für Gewerbe erhalten sollen, entsprechend ist, wie die Vorrede sagt, „der Lehrgang einfach und möglichst nach praktischen Gesichtspunkten gewählt". Dies schlechthin im positiven Sinne verstanden ist nichts unterscheidendes; das Lehrbuch kann sich darin mit jedem andern, auch der wissenschaftlichen Vorbildung dienenden, messen und ist hier in der Tat den bessern unter ihnen gleich zu stellen. Wenn aber, wie die dann folgenden Worte anzudeuten scheinen, das Angeführte nicht bloss positiv, sondern als Motiv der Ausschliessung gemeint ist, so ist zunächst hervorzuheben, dass die logischen Erfordernisse, von denen nicht die Rede ist, Exactheit der Begriffe und des Ausdrucks, Bündigkeit der Deductionen mit einer Ausnahme, von der nachher, keine Verkürzung und Hintansetzung erfahren haben, dass sich im Gegenteil in einigen Punkten das Lehrbuch durch Berücksichtigung derselben auszeichnet. Ausgesprochen wird das Motiv der Ausschliessung hinsichtlich der Einführung der incommensurabeln Grössen, der harmonischen Teilung und der Polaren. Was letztere 2 Themata betrifft, welche gar keine notwendigen Bestandteile der Principien sind, ist es richtig, dass sie in einen andern Cursus verwiesen werden können. Die Incommensurabilität hingegen bildet kein trennbares Thema, sondern ist ein Element jeder Proportionslehre, welches sich wol verschweigen, aber nicht umgehen lässt. Dies zeigt sich auch im verschiedenen Zuwerkegehen. In andern Punkten ist, wo ein Fall von der Betrachtung auszuschliessen war, doch die Existenz desselben genannt worden; bei den Linienverhältnissen hingegen wird die Möglichkeit der Incommensurabilität mit keinem Worte erwähnt — warum, ist leicht ersichtlich; denn die Erwähnung hätte soviele Fragen hervorgerufen, dass deren Erörterung mehr Weitläufigkeiten als die ganze exacte Behandlung der Incommensurabilität verursacht hätte. Je mehr es Lehrbücher giebt, welche gleich dem vorliegenden den Sachverhalt im dunkeln lassen, desto notwendiger ist es denselben bei jeder Gelegenheit zu enthüllen. Wenn man meint, für die Techniker habe die ideelle Geltung der Proportionssätze kein Interesse, weil sie nur mit gemessenen Linienverhältnissen zu tun haben, so ist das ein Irrtum. Die Techniker suchen nicht, wie es hier Voraussetzung ist, das gemeinsame Mass zweier Linien, sondern messen alle Linien approximativ mit einem Masse. Die Theorie des approximativen Verfahrens ist aber viel

complicirter als die ideelle Theorie, deren fehlerlose Sätze die unentbehrliche elementare Grundlage für Beurteilung der Fehler sowol wie für die genaue Rechnung bilden. Es ist also entschieden unzutreffend, dass jenes nachlässige Verfahren sich an die Erfordernisse technischer Anwendung anschlösse; es ist nicht einfach und praktisch, sondern mangelhaft und unklar. Zu diesem unrichtigen Gesichtspunkt bekennt sich der Verfasser in der Vorrede zwar nicht, auch beruft er sich nicht auf den Vorgang früherer Beispiele; doch musste seiner Wahl auch diese scheinbare Stütze entzogen werden. Was er anführt, ist Zeitersparniss und die Aussicht auf spätere Ergänzung. Erstere ist gegen den Verlust zu gering, letztere möchte schwerlich den Mangel anfänglich klarer Begriffe ersetzen. Die Behandlung der Linienverhältnisse ist im gegenwärtigen Lehrbuch eine blosse Inconsequenz, denn alles übrige entspricht der Ueberzeugung, dass es zum mathematischen Verständniss nur einen Weg giebt, wie nach Euklids Ausspruch keinen kürzern für Könige, so auch keinen verschiedenen für Theoriker und Praktiker. Die Anordnung der Themata ist die gewöhnliche; die Parallelentheorie folgt nach den Congruenzsätzen, was nicht überall geschieht; am Schluss ist eine Sammlung von 193 Aufgaben aufgenommen. Im Anfang wird öfters auf technische Anwendung der einzelnen Sätze hingewiesen, doch findet diese Zugabe weiterhin keine Fortsetzung. Einige Ausdrücke sind unter dem Motiv der Verdeutschung abweichend vom gewöhnlichen; bei der Substitution von „Gesetz“ für „Lehrsatz“ trifft indes dieses Motiv nicht zu. Dass das Wort „Kreis“ die Fläche bedeuten soll, was gleichzeitig dem vulgären Gebrauch, den exact logischen Benennungsgrundsätzen und der Oekonomie des sprachlichen Ausdrucks Gewalt antut, wird gleichwol hier, und ganz müssigerweise, als das einzig richtige bezeichnet. Der Verfasser selbst scheint kein Freund davon zu sein, indem er es nur als nachträgliche Correction ausspricht, mit keiner andern Wirkung, als dass er sich die Mühe aufbürdet immer „Kreislinie“ zu sagen. Die Besorgniss mit dem Worte „Kreis“ im Sinne der Linie gegen einen Gebrauch zu verstossen ist ganz unbegründet; denn die Kreisfläche kommt nur bei der Inhaltsberechnung vor, und hier sagt jedermann „Kreisfläche“. Die Definition des Kreises als Fläche, welche von Euklid auf unsere Zeiten traditionell übergegangen ist, hat das Schicksal, dass sie in vielen Lehrbüchern anfänglich aufgestellt wird um dann sofort und für immer ausser Wirksamkeit zu bleiben. H.

Lehrbuch der Planimetrie zum Schulgebrauch bearbeitet von G. Schweder, Direktor des Stadt-Gymnasiums zu Riga. Dritte, neu bearbeitete Auflage. Riga 1879. H. Brutzer u. Comp. 65 S.

Der Inhalt des Lehrbuchs ist der gewöhnliche, die Anordnung nach systematischem Gesichtspunkt getroffen, so dass die gesammten (von geschlossenen Figuren unabhängigen) Winkelsätze den Anfang bilden, und die Aufgaben, ebensowol die fundamentalen wie die synthetisch fortschreitenden, an den Schluss der einzelnen Capitel gestellt sind. Grösstenteils hält sich das Lehrbuch innerhalb des Notwendigen und überschreitet die Grenzen nur durch Aufnahme einiger interessanter Sätze. Der Ausdruck ist hinreichend concinn, doch nicht karg, wo es auf Deutlichkeit ankommt. Gleichwol ist der Winkelbegriff in mangelhafter, weder zur Deutlichkeit noch zur exacten Logik genügender Weise behandelt; denn die Erklärung des Winkels stützt und beruft sich auf die Richtung der Schenkel; es ist aber kein Wort davon gesagt, wie man Richtungen von gemeinsamen und von verschiedenen Ausgangspunkten vergleichen könne. Es ist dies die so oft gerügte Verkehrung der logischen Beziehung: Winkel lassen sich ohne Hülfe des Richtungsbegriffs, aber nicht Richtung ohne Hülfe der Winkel exact unterschiedlich auffassen. Doch sind nicht einmal, wenn man auch die unrechte Stellung zulassen wollte, und trotzdem sich die beste Gelegenheit bot das Versäumte nachzuholen, im ganzen die notwendigen Bestandteile der Erklärung vorhanden. Es werden nämlich, um die Drehung des Schenkels zu verdeutlichen, eine Reihe gleicher Winkel an einander gelegt; was aber die Bedingung ihrer Gleichheit sei, ist zu sagen vergessen. Auf so unklarem Grunde ist es dann freilich nicht mehr auffällig, dass der Parallelensatz mit angeblichem Beweis aufgestellt wird. Mit bester Sorgfalt ist dagegen die Lehre von den incommensurabeln Linien behandelt, dieser Fall bei den Proportionssätzen durch indirecte Beweise berücksichtigt, und dadurch gezeigt, dass die exacte Methode keine zu grossen Umständlichkeiten erfordert. Bei der Herleitung des Ausdrucks für die Kreisfläche scheint der Verfasser den Gegenstand selbst nicht bewältigt zu haben; er gelangt mit aller Erörterung zu keiner Evidenz. Ausser den genannten zwei Punkten ist es überall gerade die Beherrschung des Lehrstoffs, was das Buch auszeichnet. H.

Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. Von Dr. H. Heilermann, Direktor der Realschule in Essen, und Dr. J. Diekmann, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Essen. III. Theil. Die Progressionen, die Kettenbüche und die diophantischen Gleichungen. Niedere Analysis. Essen 1879. G. D. Baedeker. 110 S.

Die beiden ersten Teile sind im 251. und 255. litterarischen Bericht besprochen; der Inhalt des dritten ist folgender. Arithmetische, geometrische Progressionen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Ketten-

brüche, diophantische Gleichungen 1. Grades, convergente Reihen, binomischer Satz für ganze positive, für beliebige reelle Exponenten, Exponentialreihe, Darstellung der Rechnungen mit complexen Zahlen, logarithmische Reihe, Combinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung, grösste und kleinste Werte. Das Buch behandelt demnach einzeln 14 verschiedene, in keiner oder geringer Verbindung stehende Themata, und zwar jedes derart, dass auf die Entwickelung einiger, als besonders leicht fasslich ausgewählter Sätze aus der Theorie eine Reihe mannichfaltiger Uebungsbeispiele folgt. Erst der letzte § spricht von Functionen und deren Differentiation, betrachtet aber ausschliesslich ganze Functionen. Die Bearbeitung entspricht mehr der Bestimmung zum Uebungsbuch, den theoretischen Inhalt hat man als Vorbereitung speciell für die sich anschliessenden Uebungen anzusehen, man müsste denn demselben den gar nicht löblichen Zweck zuschreiben, den Schülern einen Einblick in mancherlei Gegenstände zu geben, mit denen sich die höhere Theorie beschäftigt. Ein solcher Zweck würde aber dem in der Vorrede zum I. Teil ausgesprochenen Gesichtspunkte sehr zuwiderlaufen, nach welchem die neue Bearbeitung den Uebergang zum höhern Studium erleichtern sollte; denn die vorgängige Aufnahme ungenügender Principien kann diesen Uebergang nur erschweren. H.

Vermischte Schriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel VI. Amsterdam 1880. Weytingh en Brave.

Der Inhalt ist folgender.

G. J. Michaëlis: Ueber das Princip der Erhaltung der Energie. — P. H. Schoute: Ueber das Projiciren auf Oberflächen. — D. Bierens de Haan: Glückspiel mit Doppelsteinen. — F. J. van den Berg: Auflösung der 3. Preisfrage für das Jahr 1878. Ueber die Lage eines schweren Dreiecks, dessen Ecken in 3 gegebenen Ebenen liegen, und welches dem Widerstand derselben das Gleichgewicht hält. — D. J. A. Samot: Die Principien der Lebensversicherungswissenschaft. — B. P. Moors: Theorie der Inhaltsbestimmung des Halben-Hektoliter-Getreidemasses. — H. Kamerlingh Onnes: Ueber die relative Bewegung. — F. J. van den Berg: Ueber die Vergleichung der durch 3 gegebene Richtlinien bestimmten Hyperboloide, in Verbindung mit dem Gleichgewicht von 4 Kräften im Raume. — C. L. Landré: Formeln zur Berechnung des ein-

strömenden Wassers bei Ueberschwemmungen, mit Ebbe und Flut. — Ueber die Perspective der Kugel. — Ein Satz über Determinanten. Zur Summationsformel von Euler. H.

American Journal of Mathematics pure and applied. Editor in chief J. J. Sylvester. Vol. II. Baltimore 1879. 4°.

Der Inhalt des Bandes ist folgender.

Miss Chr. Ladd: Das Pascal'sche Sechseck. — W. H. Burr: Ueber die Theorie der Biegung. — G. B. Halsted: Note über den ersten englischen Euklid. — J. W. Gibbs: Ueber die Grundformeln der Mechanik. — G. B. Halsted: Beiträge zur Bibliographie des Mehrdimensionen-Raums und der nichteuklidischen Geometrie. — Cayley: Berechnung des Minimums der numerischen Erzeugungsfunction der binären Form 7. Grades. — H. T. Eddy: Ueber die seitliche Abweichung sphärischer Geschosse. — J. J. Sylvester: Note über Determinanten und duadische *Disynthemes.* — Cayley: Desiderata und Vorschläge. Nr. 3. Das Newton-Fourier'sche imaginäre Problem. — J. J. Sylvester: Ueber das vollständige System der Grundformen der binären Form 5. Grades 9. Ordnung. — E. Mc Clintock: Ein Versuch über die Vergrösserungsrechnung (*enlargement*). — Th. Craig: Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. — E. Lucas: Ueber die unbestimmte Analysis 3. Grades. — Beweis mehrerer Sätze von Sylvester. — Cayley: Desiderata und Vorschläge. Nr. 4. Mechanische Construction conformabler Figuren. — F. Franklin: Ueber Teilungen. — W. J. Stringham: Einige allgemeine Formeln für Integrale irrationaler Functionen. — W. H. Burr: Note zum Artikel „Ueber die Theorie der Biegung". — Sylvester: Verallgemeinerung von Leibnitz's Theorem in der Statik. Auszug aus einem Briefe von Prof. Crofton. — A. B. Kempe: Ueber das geographische Problem der 4 Farben. — W. E. Story: Note über das Vorige. — W. J. Stringham: Die Quaternionenformeln für Quantification von Curven, Flächen und Körpern, und für Schwerpunkte. — O. Stone: Ueber die Dynamik einer gekrümmten Kugel. — J. J. Sylvester und F. Franklin: Tafel der Erzeugungsfunctionen und Grundformen für die binären Formen der ersten 10 Ordnungen. — Th. Craig: Note über die Projection des allgemeinen Ortes des Vierdimensionen-Raumes auf den Dreidimensionen-Raum. — Th. Craig: Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit. — J. J. Sylvester: Ueber gewisse ternäre Kubische-Form-Gleichungen. — J. Petersen: Ein neuer Beweis des Reciprocitätssatzes. — E. H. Hall: Eine neue Wirkung des Magnets auf elektrische Ströme. — J. J. Sylvester und F. Franklin: Tafeln

der Erzeugungsfunctionen und Grundformen für simultane binäre Formen der ersten 4 Ordnungen, 2 und 2 zusammengenommen. — Bemerkungen. — E. McClintock: Eine neue allgemeine Interpolationsmethode. — A. B. Chace: Eine gewisse Classe kubischer Flächen mit Quaternionen behandelt. — C. S. Peirce: Ueber die Gespenster (Widerholungen) in Rutherfurd's Diffractionsspectris. — E. McClintock: Ueber einen Satz betreffend das Ausbreiten (*expand*) der Functionen von Functionen. — H. A. Rowland: Vorläufige Noten über Mr. Hall's neue Entdeckung. — C. S. Peirce: Eine quincunciale Projection der Kugel. — W. Woolsey Johnson und W. E. Story: Zwei Noten über das Rätsel der 15. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Heiberg, J. L., philolog. Studien zu griech. Mathematikern. I. II. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte der Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 9. Bd. J. 1877. 3. Hft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk. 40 Pf.

Wöckel's L., Geometrie d. Alten. Neu bearb. v. Th. E. Schröder. 12. Aufl. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 80 Pf.

Methode und Principien.

Bilharz, A., u. P. Dannegger, metaphys. Anfangsgründe d mathem. Wissenschaften. Sigmaringen, Tappen. 2 Mk. 50 Pf.

Scheffler, H., d. Naturgesetze. 6. u. 7. Lfg. 3. Thl. 2. Abthlgn. Leipzig, Förster. 15 Mk.

Schulze, R., d. physikal. Kräfte. Frei nach Guillemin. 15. u. 16. Lfg. Leipzig, Frohberg. à 1 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Brennert, E., geometr. Konstructionsaufg. m. vollständ. Auflösg. Berlin, Nicolai. 1 Mk. 50 Pf.

Egger, J., Uebungsbuch f. den geometr. Unterricht von Sekundärschulen. 3. u. 4. Thl. 2. Aufl. Bern, Wyss. 2 Mk. 50 Pf.

Gauss, F. G., fünfstell. logar. u. trigon. Tafeln. 13. Aufl. Halle, Strien. 2 Mk.

Mehler, F. G., Hauptsätze d. Elementar-Mathematik. 10. Aufl. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Nissen, J. H., Lehrb. d. Elem.-Mathematik. 4. Thl. 2. Aufl. Schleswig, Bergas. 1 Mk. 50 Pf.

Litterarischer Bericht
CCLIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Trois lettres inédites de Jean I[er] Bernoulli à Léonard Euler tirées de la correspondance de Jean I[er] Bernoulli gardée dans la bibliothèque de l'Académie Royale des sciences de Stockholm par Gustav Eneström. Stockholm 1880. 24 S.

Die Bibliothek der Akadamie besitzt 8 Briefe von Joh. Bernoulli an Euler, deren 5 in der „mathematischen und physikalischen Correspondenz einiger berühmten Mathematiker des 18. Jahrhunderts" von P. H. Fuss schon herausgegeben waren. Die 3 übrigen sind jetzt in den Verhandlungen der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften, eingereicht von G. Eneström, erschienen. Von diesen sagt derselbe im voraus, dass der gleiche Ton der Ueberlegenheit, den Bernoulli sonst in seinen Briefen gebraucht, sich auch in ihnen sehr bemerklich macht. Vor den Briefen ist deren Inhaltsangabe, nach denselben erklärende Noten beigegeben. Zwei Briefe sind von 1729. Der erste betrifft den Sinn der Logarithmen der imaginären Grössen und bespricht dann 2 Differentialgleichungen 2. Ordnung, die Euler untersucht, dann dessen Bestimmung der kürzesten Linien auf gegebener Fläche. Der zweite Brief kommt nach Aeusserung über 2 andre von Euler aufgestellte Differentialgleichungen 2. Ordnung auf die vorigen zurück. Weiter spricht er von den Tautochronen und Isochronen, dann von der Summation der Reihe

$$1,\quad 1.2,\quad 1.2.3,\quad 1.2.3.4,\quad \text{etc.}$$

Der dritte Brief von 1737 betrifft die Abhandlung von Joh. II Bernoulli über das Licht, einige Beobachtungen über die Mechanik von Euler, die Phoronomie von Hermann und die Principien von Newton, die Abhandlung von Joh. II und Daniel I Bernoulli über die Anker, die Summation der Reihen, deren allgemeine Glieder sind

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{2.4.6\ldots(2x-2)}{1.3.5\ldots(2x-1).2x}$$

Beobachtungen über die Reihen der Sinus und Arcustangens, einen neuen Teil der Infinitesimalrechnung, cultivirt von Euler. H.

Al Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî nach der auf der Herzoglich-Gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift bearbeitet von Dr. Adolf Hochheim, Professor. III. Halle a. S. Louis Nebert. 4⁰. 28 S.

Die mit I. II. bezeichneten vorausgehenden Lieferungen der Ausgabe sind im 249. und 254. litt. Ber. besprochen. Die dritte fährt in der Lehre vom Messen fort mit specieller Körpermessung, Anwendung auf die Quantität der Baumaterialien, der Lehre vom Nivelliren des Bodens. Dann folgt die Lehre von den Gleichungen 1. und 2. Grades, wo mit Vermeidung aller negativen Grössen 6 Formen unterschieden werden. Die negativen Wurzeln bleiben unberücksichtigt. Die Regeln der Auflösung werden zuerst allgemein, dann an speciellen Zahlen gegeben. Der Herausgeber leitet die Gestaltung der Doctrin vorwiegend aus griechischem, weniger aus indischem Einfluss ab, obgleich letzterer der anfängliche war. H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XII. Roma 1879. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Mit dem gegenwärtichen 12. Bande schliesst das Journal ab. Der Inhalt der letzten 6 Hefte ist folgender.

7. bis 10. Heft. C. Henry: Untersuchungen über die Manuscripte von Pierre de Fermat nebst ungedruckten Fragmenten von Bachet und Malebranche.

11. Heft. A. Favaro: Ueber einige ungedruckte Notizen betreffend Nicolaus Coppernicus gesammelt und publicirt von M. Curtze. — B. Boncompagni: Ueber 2 Schriften von Leonhard Euler. — A. Genocchi: Beweis des 5. Postulats Euklid's, von Vincenzo de Rossi. — S. Günther: Invarianten, Covarianten und Contravarianten

der homogenen Functionen, von P. G. Foglini (ins Italienische übersetzt von A. Sparagna). — Tychsen: Lagrange, (aus dem Dänischen ins Französische übersetzt von H. G. Zeuthen). — G. Eneström: Briefe von Joseph Louis Lagrange an Leonhard Euler, zuerst publicirt von B. Boncompagni (aus dem Dänischen ins Französiscke übersetzt von L. Leouzon Le Duc und A. Marre).

12. Heft. G. Biadego: Ueber die ungedruckte Abhandlung von Pietro Maggi über die Principien der Molecularmechanik von Ambrogio Fusinieri. Wortlaut derselben. — B. Boncompagni: Ueber eine Arithmetik von Smeraldo Borghetti Lucchese. — B. Boncompagni: Zugaben zum Artikel „Ueber die ungedruckten Biographien dreier Mathematiker (Joh. Danck von Sachsen, Joh. De Lineriis und Fra Luca Pacioli da Borgo S. Sepolcro) geschrieben von B. Baldi. — E. Wiedemann: Material zur Geschichte der Naturwissenschaften bei den Arabern (ins Italienische übersetzt von A. Sparagna). — W. von Bezold: Meterial zur Geschichte der physiologischen Optik (Farbenrad und Binocular-Sehen) (ins Italienische übersetzt von A. Sparagna). — E. Gerland: Ueber die Geschichte der Erfindung des Areometers (ins Italienische übersetzt von A. Sparagna). — A Marre: Zwei Mathematiker vom Oratorium.

Publicationsverzeichnisse im 8., 10. und 12. Heft. H.

Cinq lettres de Sophie Germain à Charles Frédéric Gauss publiées par B. Boncompagni d'après les originaux possédés par la Société Royale des sciences à Göttingen. Berlin. Institut de photolithographie des frères Burchard. Imprimerie de Gustave Schade (Otto Francke) MDCCCLXXX.

Es mag hier der Wortlaut der 2 ersten, gleich dem dritten pseudonym geschriebenen Briefe folgen. Im vierten giebt sich die Verfasserin zu erkennen.

Paris ce 21 novembre 1804

Monsieur

Vos disquisitiones arithmeticae font depuis longtems l'objet de mon admiration et de mes études. Le dernier chapitre de ce livre renferme, entr' autres choses remarquables, le beau théorème contenu dans l'équation

$$\frac{4(x^u - 1)}{x - 1} = Y^2 \pm uZ^2;$$

je crois qu'il peut être généralisé ainsi

$$\frac{4(x^{u^s}-1)}{x-1} = Y^2 \pm uZ^2$$

u étant toujours un nombre premier et s un nombre quelconque. Je joins à ma lettre deux démonstrations de cette généralisation. Après avoir trouvé la première j'ai cherché comment la méthode que vous avez emploiée art. 357 pouvoit être appliquée au cas que j'avois à considérer; j'ai fait ce travail avec d'autant plus de plaisir, qu' il m'a fourni l'occasion de me familiariser avec cette méthode, qui, je n' en doute pas, sera encore dans vos mains l'instrument de nouvelles découvertes.

J'ai ajouté à cet art. quelques autres considérations. La dernière est relative à la celebre équation de Fermat $x^u + y^u = z^u$, dont l'impossibilité en nombres entiers n'a encore été démontrée que pour $u = 3$ et $u = 4$; je crois être parvenu à prouver cette impossibilité pour $u = p - 1$, p etant un nombre premier de la forme $8k + 7$. Je prens la liberté de soumettre ces essais à votre jugement persuadé que vous ne dédaignerez pas d'éclairer de vos avis un amateur enthousiaste de la science que vous avez cultivée avec si brillant succès.

Rien n'égale l'impatience avec laquelle j'attens la suite du livre que j'ai entre les mains, je me suis fait informer que vous y travaillez en ce moment et je ne négligerai rien pour me le procurer aussi tôt qu'il paroitra. Malheurensement l'étendu de mon esprit ne repond pas à la vivacité de mes gouts, et je sens qu'il y a une sorte de témérité à importuner un homme de genre lorsqu' on(n') a d'autre titre à son attention qu' une admiration nécessairement partagée par tous ses lecteurs.

En relisant le mémoire de M. De La Grange (Berlin 1775) j'ai vû avec étonnement qu'il n'a pas sû réduire la quantité

$$s^{10} - 11(s^8 - 4s^6r^2 + 7s^4r^4 - 5s^2r^6 + r^8)r^2$$

(p. 358) à la forme $t^2 - 11u^2$, car

$$\begin{aligned}
& s^{10}-11(s^8-4s^6r^2+7s^4r^4-5s^2r^6+r^8)r^2 \\
&= s^{10}-2.11s^6r^4+11(5+6)r^8s^2-11(s^8-6s^6r^2+7s^4r^4+6s^2r^6+r^8)r^2 \\
&= s^{10}-2.11s^6r^4+11^2r^8s^2-11(s^8-6s^6r^2+9s^4r^4-2s^4r^4+6s^2r^6+r^8)r^2 \\
&= (s^5-11sr^4)^2-11(s^4-3s^2r^2-r^4)^2
\end{aligned}$$

Cette remarque est nouvelle preuve de l'avantage de votre méthode qui l'appliquant à toutes les valeurs de u, donne pour chaque cas ces valeurs de Y et Z indépendantes du tatonnement.

Si, connoissant les valeurs de Y et Z dans l'équation

$$4\left(\frac{x^4-1}{x-1}\right) = Y^2 \pm uZ^2$$

on vouloit avoir celles de Y' et Z' dans l'équation

$$4\left(\frac{x^u+1}{x+1}\right) = Y'^2 \pm uZ'^2$$

il est clair qu'il suffiroit de changer les signes de tous les termes de Y et Z qui contiennent des puissances de x dont l'exposant est impair.

Je n'ai pas voulu fatiguer votre attention en multipliant les remarques dont votre livre a été pour moi l'occasion: si je puis espérer que vous acceuillez favorablement celles que j'ai l'honneur de vous communiquer et que vous ne les trouviez pas entirement indignes de réponse veuilliez l'adresser A Monsieur Silvestre de Sacy membre de l'institut national. Rue haute feuille à Paris, qui me la remettra.

Croyez, Monsieur, au prix que j'attacheroit à un mot d'avis de votre part et recevez l'assurance du profond respect de

Votre très humble serviteur
et très assidu lecteur
Le Blanc.

Paris 21 juillet 1805

Monsieur

Je dois sans doute à votre indulgence la réponse flatteuse que vous avez bien voulu faire à ma lettre; vous me donnez l'espérance de vous entretenir avec moi de l'objet de vos études; rien au monde ne pourroit me faire plus de plaisir qu' une semblable correspondance, mais je sens que j'en suis bien peu digne. Quelle différence en effet entre les foibles assais dont je suis capable et les méthodes ingénieuses dont l'invention vous est familière! Cependant puisque nous avez acceuilli avec bonté les notes que je vous ai communiquées je prend la liberté de vous en soumettre de nouvelles. Vous promettez (n^0 267) de prouver dans une autre occasion que les formes ternaires dont la déterminante est zéro sont équivalentes aux formes binaires; j'ai cherché à faire la réduction indiquée et j'ai trouvé que dans ce cas la forme adjointe se réduit à un quarré multiplié par m, ce qui est absolument la même forme que celle que prennent les formes binaires lorsqu' on suppose leurs déterminantes égales à zéro.

Je vois avec regret qu'il nous faut attendre, peut-être plusieurs

années, la publication de vos nouvelles recherches arithmétiques; il est impossible de connoître le premier volume sans désirer avec impatience d'en voir la suite; ce sera pour moi une consolation, si vous daignez m'en communiquer quelques parties.

Le libraire Duprat sur lequel vous me demandez des renseignemens, à cédé son fond et est en banqueroute depuis 18 mois environ; je sais que plusieurs savans ont été dupes avec lui ce qui est de très mauvais augure pour votre créance; cependant M^r^. de Sacy qui a l'habitude de traiter avec les libraires m'a promis de faire des démarches, pour découvrir s'il n'y auroit pas quelques moyens de vous faire payer, il vous fera savoir ce qu'il apprendra d'utile. Si jamais pareil cas se représentoit il me faudroit pas attendre un tems aussi long pour reclamer le payement car ici les créances ne gagnent pas à viellir.

J'aurois désiré avoir de meilleures nouvelles à vous donner, je crains que le(s), résultat(s) facheux de l'envoi que vous avez fait ne nous privent de connoître les nouveaux ouvrages que vous pourrez publier, je vous demande comme une grace de vouloir bien m'indiquer les titres de ceux que vous écrirez en latin, car n'entendant pas l'Allemand je suis forcé de borner là ma curiosité.

Je pense que vos travaux astronomiques ne consistent pas seulement dans les calculs d'élemens de planètes, vous devez presqu' involontairement trouver de nouvelles méthodes; l'esprit d'invention semble vous être si naturel, que quelques soient les objects dont vous vous occupez, je croirois avoir beaucoup gagné si je parvenois à connoître vos recherches.

Puisque vous vous occupez d'astronomie vous connoissez sans doute la Mécanique céleste par M^r^. De la Place, le 4ème volume a paru déjà environ deux mois, il contient: la théorie des satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus; la théorie des perturbations des comètes; des recherches sur les refractions astronomiques, l'intégration de l'équation différentielle du mouvement de la lumière suivant différentes hypothèses; un chapitre sur l'extinction de la lumière des astres dans l'atmophère; sur la mesure des hauteurs par le baromètre; sur la chûte des corps qui tombent d'une grande hauteur; et un, sur les altérations que les mouvemens des planètes et des comètes peuvent éprouver par la résistance des milieux qu'elles traversent et par la transmission successive de la pesanteur.

M^r^. Le Gendre a publié, aussi il y a quelques tems, un mémoire sur la détermination des orbites des comètes. Après avoir fait l'analyse du problème il simplifit les formules générales par la supposition

de l'égalité des tems entre les observations: il s'attache à déterminer les limites de r = rayon de la comète et de ϱ = distance de la comète à la terre. Pour le cas où le rayon R de la terre est $< r$, les limites reviennent à celles trouvées par Mr. de la Grange (Mémoires de Berlin 1778 N⁰. 22). Mais pour celui où $r < R$ il tire de la cousidération de l'équation $r^2 = R^2 - 2R\varrho \cos c + \varrho^2$ (dans laquelle c est l'angle entre le soleil et la comète) $\varrho > 0$ et $\varrho < 2R\cos c$ puis en mettant cette équation sous la forme $r^2 = R^2 \sin^2 c + (\varrho - R\cos c)^2$ il a $r > R\sin c$, ce qui est beaucoup plus simple que les résultats de Mr. de la Grange.

L'auteur réprend ensuite le cas général, où les tems entre les observations peuvent être inégaux et il parvient à des équations de mêmes formes que celles qu'il a obtenues dans la supposition de leur égalité. Enfin il fait l'application de la méthode à la 2eme comète de 1781 et à celle de 1769.

Si il vous est agréable de connoître les ouvrages qui paroîtront ici je me ferois un plaisir de vous tenir sur les avis; ce seroit pour moi un motif d'espérer jouir de votre correspondance, car je sens que j'ai bien peu de moyens de la mériter par moi-même et que je ne puis en être digne que par l'admiration et le profond respect avec lequel j'ai l'honneur d'être

Monsieur

Votre très humble serviteur

Le Blanc.

La lettre qui étoit incluse dans celle que vous m'avez adressée a été mise à la poste.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Methodische Anweisung zum Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel mit Anwendung zu geometrischen Berechnungen, nebst zahlreichen Uebungsaufgaben. Zugleich das Wichtigste von den Operationen mit Potenzausdrücken und Wurzelgrössen enthaltend. Zunächst zum Gebrauch an Schullehrer-Seminarien und gehobenen Lehranstalten, sodann aber auch für den Selbstunterricht bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer in Neu-Ruppin. Zweite verbesserte Auflage. Stuttgart 1880. G. Lemppenau. 148 S.

Dem Buche vorangestellt sind 2 Abschnitte, einer über Potenzen, einer über Wurzeln, welche sich in der Abfassungsweise von allen

übrigen, d. i. den eigentlichen Bestandteilen wesentlich unterscheiden. Sie handeln sachlich in natürlichem Connex die beiden Gegenstände vollständig ab; charakteristisch ist aber eine ungewöhnliche, man kann sagen unübertreffliche Ausführlichkeit, die sich jedoch in keiner unnötigen Wortfülle, sondern in allseitiger Berücksichtigung möglicher Fragen bemerklich macht, und die durchweg befolgte inductive Entwickelungsmethode, welche ohne Gebrauch von Buchstaben jeden Satz an einer Reihe von Zahlen zeigt, dann in Worten allgemein ausspricht. Mit dem 3. Abschnitt wird ein neuer Anfang gemacht, der an die vorhergehende Theorie nicht anknüpft, und der auch bestimmt ist den Anfang des Lehrcursus zu bilden. Hier ist der Gesichtspunkt der Uebung der vorwaltende. Der 3. Abschnitt hat im 1. Teil ausschliesslich Bezug auf das Kopfrechnen und lehrt zuerst die absoluten und comparativen Eigenschaften der Quadrate dekadischer Zahlen, dann die Schlüsse auf die Wurzeln als Quadrate gegebener dekadischer Zahlen, dann ein Verfahren Näherungsbrüche für irrationale Quadratwurzeln zu finden. Die Ausführlichkeit der Erläuterungen ist die nämliche, die Tendenz zur Allgemeinheit muss natürlich hier zurücktreten, während die besondern Rechnungsvorteile das Hauptaugenmerk sind. Dann folgt für schriftliches Rechnen die Entwickelung der Quadrate der Polynome, und darauf gestützt die gewöhnliche dekadische Wurzelausziehung. Hier ist es nicht wol begreiflich, warum der Verfasser den theoretischen Gesichtskreis so überflüssig weit ausgedehnt hat, da doch bekanntlich die binomische Zerlegung vollkommen ausreicht. Durch sie wird die zweiziffrige Wurzel aus der 3 oder 4 ziffrigen Zahl gefunden. Eine 5 oder 6 ziffrige Zahl enthält eine 3 oder 4 ziffrige Zahl Hunderte, deren Wurzel dem Vorhergehenden zufolge bekannt ist, und man erhält nach ganz gleichem Verfahren die 3 ziffrige Wurzel als Summe von Zehnern und Einern. Diese bildet wieder das Vorausbekannte, wenn die 4 ziffrige Wurzel binomisch als Summe von Zehnern und Einern berechnet wird, u. s. f. Diese Darstellungsweise ist die bisher übliche, in jeder Beziehung instructiver als die Anwendung eines für jede Ziffernanzahl neuen Formel, weit nützlicher für Einübung, weil die Wiederholung mit dem Princip vertraut macht, und beansprucht weniger Allgemeinheit der Begriffe. Allerdings scheinen auch einige andre Autoren der polynomischen Lehrmethode zuzuneigen, vielleicht um Worte zu sparen, jedenfalls aber ohne klaren pädagogischen Gedanken. Schon am Schlusse des 3. Abschnitts, bei Rechnung mit irrationalen Binomen, dann auch weiterhin kommt Buchstabenrechnung in grösserem Masse in Anwendung. Der vierte enthält praktische Aufgaben über Quadratwurzeln, der fünfte zeigt das gewöhnliche Verfahren der Kubikwurzelausziehung, woran sich im sechsten wieder praktische Aufgaben anschliessen. Uebungsbeispiele sind überall beigegeben. H.

Die Elemente der Mathematik. Ein Leitfaden für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Wilhelm Gallenkamp, Direktor der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule in Berlin. III. Theil. Algebraische Analysis. Einleitung in die höhere Analysis. Analytische Geometrie. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Figuren im Texte. Iserlohn 1880. J. Baedeker. 216 S.

Die so bezeichnete algebraische Analysis ist nicht sowol eine systematisch bearbeitete oder stetig fortschreitende, irgendwelche Gegenstände erschöpfende Theorie, sondern eine Reihe interessanter Sätze über ganze Functionen, Auflösung von Functionalgleichungen, Convergenz der Reihen, Addition und Multiplication von Reihensummen und Summation specieller Reihen. Nach den Proben unreifer Gedankenentwickelung, welche in den vorausgehenden begrifflichen Erklärungen vorkommen, würde man nicht erwarten, dass hernach die Wortfassung und Beweise der Sätze so correct ausfallen möchten, wie es wirklich der Fall ist. Die folgenden Ausstellungen betreffen daher nicht den eigentlichen Hauptteil des Buchs und können unabhängig davon leicht berücksichtigt werden. Es zeigt sich Mangel auf der einen, Ueberfluss auf der andern Seite. Gleich der erste Satz, wo man gar nicht weiss, wovon die Rede ist, lautet: „Man nennt eine Grösse eine Function einer oder mehrerer anderen, wenn sie von ihr oder von ihnen abhängig ist.“ Die Grösse $x = 3.4 = 7+5$ von 3 oder von 7 abhängig zu nennen hat offenbar keinen Sinn; es mag also zugestanden sein, dass sich irrtümliche Deutungen vielleicht nicht aufstellen lassen. Soll nun aber der Schüler sein ganzes Gedankenbereich durchprobiren, bis er findet, dass die Abhängigkeit einen möglichen Sinn hat, wenn man sie auf die Veränderung beider Grössen bezieht? Dass er jedoch den Satz nicht versteht, ist noch der günstigste Fall; deutet er ihn zufällig oder sympathisch richtig, so behält er die vulgäre Befangenheit, die der Unterricht in der exacten Wissenschaft eben heben soll, die Unfähigkeit sich seiner Gedanken klar bewusst zu werden und davon Rechenschaft zu geben. Die Berichtigung des Satzes ist leicht: statt „sie von ihr“ muss es heissen „ihre Veränderung von deren Veränderung“. Dann durfte aber der Unterschied von „variabel“ und „constant“ nicht erst später folgen, als wenn er auf die Functionsbegriffe keine Beziehung hätte. Ueberfluss und Mangel zugleich bietet die Erklärung der Stetigkeit. Die Erwähnung der endlichen Differenzen trägt nichts zur Bestimmung bei, dagegen ist verschwiegen, dass die Function für jeden Wert des Arguments innerhalb des Intervalls einen Wert haben muss. Der betreffende Satz soll wahrscheinlich durch seine Länge entschädigen für das, was ihm an Deutlichkeit fehlt. Von unendlich kleinen Grössen und Grenzwerten wird hier, und noch mehr in spätern

Capiteln ohne Erklärung Gebrauch gemacht. Allerdings kann deren Theorie schon in niedern Schulcursen gelehrt und daher bekannt sein. Ist dies aber auch wirklich der Fall? Es kommen gar manche Anwendungen vor, nach deren Begründung man fragen muss, aber eine Verweisung auf Früheres, die doch in andern Punkten nicht verabsäumt ist, findet sich in diesem Punkte nirgends. Es folgen nun, als Einleitung in die höhere Analysis, die ersten Elemente der Differential- und Integralrechnung. Erstere bestehen teils aus Herleitung der Differentialformeln teils aus Sätzen. Zur Herleitung werden unendliche Reihen, Geometrie und Trigonometrie zu Hülfe gezogen, dennoch hat sich die Bearbeitung strenge Logik nicht zum Gesetz gemacht. Es werden ohne Nachweis der Berechtignng für Grössen innerhalb eines Ausdrucks Grenzwerte substituirt. Ferner behauptet das Lehrbuch mehr als ein Gelehrter weiss, nämlich dass

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

für verschwindendes h im allgemeinen einen Grenzwert habe. Es wirkt hiermit zugunsten der grossen Anzahl derjenigen, welche geneigt sind die Mathematik zu einer Glaubenslehre machen. Die Principien der Integralrechnung gehen vom bestimmten Integral als Grenzwert einer Summe aus. Die Existenz des Grenzwerts für bestimmte Teilung des Intervalls wird richtig bewiesen; der Nachweis hingegen, dass derselbe von der Teilung unabhängig ist, beruht auf einem Deductionscirkel; denn er stützt sich auf den Begriff des von einer Curve begrenzten Flächenraums, der sich nur durch das Integral definiren lässt und jene Unabhängigkeit zur Voraussetzung hat.

Die Bearbeitung der analytischen Geometrie lässt sich durch algebraische (bzhw. in kleinem Umfang durch rein analytische) Gesichtspunkte leiten, so dass die Geometrie mehr als Anwendnng der Algebra erscheint. Charakteristisch ist überdies, dass die Coordinaten, wie in der Ebene so im Raume, unmittelbar im schiefwinkligen System eingeführt werden, so dass der Uebergang zum rechtwinkligen nur gelegentlich oder nach Erforderniss geschieht. Erwägt man, wie leicht es ist, vom rechtwinkligen System, sobald eine besondere Aufgabe es verlangt, zum schiefwinkligen überzugehen, so muss es unbegreiflich sein, wie jemand die Complicationen des schiefwinkligen durch die ganze Theorie hindurchschleppen kann, wenn er nicht etwa dieselbe für einen besondern Zweck bestimmt. Die Illusion, als ob die schiefwinklige Coordinatentheorie umfassender sei, die rechtwinklige wol gar die gehörige Allgemeinheit vermissen lasse, ist wol niemanden zuzutrauen. Man wird daher als nächstem Grund zu der Vermutung geführt, dass die Methode mehr das Bedürfniss der neuern

synthetischen Geometrie und der Geometrie der Lage als das Studium der Naturwissenschaften im Auge habe. Doch die wenigen Punkte, in welchen gegen Ende des 3. Capitels das Gebiet der erstern betreten wird, bestätigen diese Deutung nicht genügend. Besser stimmt mit der Behandlungsweise die Erklärung, dass es dem Verfasser bloss darum zu tun war ein weiteres Feld für Uebung zu gewinnen, dass er deshalb überhaupt auf kein bestimmtes Ziel der theoretischen Ausbildung ausgieng. Die Gegenstände der 7 Capitel sind 1) die Gleichungen 1. Grades, die gerade Linie und die geradlinigen Figuren; 2) Transformation der Coordinaten; 3) die Linien 2. Grades; 4) einfachste Anwendungen der Differentialrechnung auf die Geometrie, Maxima und Minima, Contacta verschiedener Ordnungen, Krümmungskreis; 5) Fundamentalbestimmungen der analytischen Geometrie des Raumes, die Gleichungen 1. Grades mit 3 Variabeln; 6) Transformation der Coordinaten; 7) die Flächen 2. Grades. Am ausführlichsten sind die Kegelschnitte behandelt. Im ganzen Werke ist eine gleichmässig concinne, klare und leichtfassliche Darstellungsweise anzuerkennen. H.

Vermischte Schriften.

Nouvelle Correspondence mathématique. Rédigé par Eugène Catalan, Docteur ès sciences, Professeur à l'univertité de Liége; avec la collaboration de M. M. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Edouard Lucas. Tome sixième. Liége 1880. E. Decq.

Der Inhalt der ersten Hälfte des Bandes an Abhandlungen ist folgender.

A. Ribaucour: Ueber die Curven und Flächen, welche Kreise, bzhw. Kugeln einhüllen (Schluss).

Neuberg: Ueber die Anzahl der Kugeln, welche 4 gegebene Ebenen berühren.

H. Brocard: Eigenschaft des Dreiecks (Forts. u. Schl.).

Saltel: Anwendung des Satzes von Rolle auf die Theorie der Osculation.

P. Mansion: Ueber ein System linearer Gleichungen.

E. Catalan: Ueber einige Entwickelungen von cos mx und sin mx.

J. Neuberg: Eigenschaft der Ellipse.

C. — A. Laisant: Verallgemeinerung einer Formel von Catalan.

E. Duhois (Dijon): Ueber das Theorem der Lichtbündel.

E. Cesaro: Ueber die Existenz gewisser Polyeder.

H. Brocard: Eigenschaft einer Reihe von Dreiecken.

E. Catalan: Ueber des Integral

$$\int \frac{\partial x \sqrt{1+x^4}}{1-x^4}.$$

C. Le Paige: Ueber eine Eigenschaft der halbsymmetrischen Determinanten von gerader Ordnung.

E. Dubois: Ueber eine Familie cykloidaler Curven.

J. Neuberg: Elementar mathematische Uebungen.

Wassilieff: Biographische Notiz über Alexander Popoff.

Demartres: Ueber die Flächen von circularer Erzeugungslinie.

A. Catalan: Ueber die Kegelschnitte, welche 4 Bedingungen genügen.

H. Brocard: Bemerkungen über verschiedene Artikel der Nouvelle Correspondance (Forts.).

J. Neuberg: Ueber die Normalen der Ellipse.

E. Lucas: Ueber die Erweiterung des Satzes von Descartes.

H. Brocard: Ueber die Häufigkeit und die Gesammtzahl der Primzahlen.

H.

Litterarischer Bericht
CCLX.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra mit zahlreichen Uebungsaufgaben. Zum Gebrauch an Seminarien und höheren Lehranstalten, wie auch zum Selbstunterricht bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer in Neu-Ruppin. Zweiter Teil: Kubische, biquadratische und höhere Gleichungen mit rationalen Wurzeln, diophantische Gleichungen, Logarithmen und Exponentialgleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Kettenbrüche, Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung, der binomische Lehrsatz. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Neu-Ruppin 1880. Rud. Petrenz. 279 S.

Um den Anforderungen der Realschulen zu entsprechen, hat (laut Vorwort) der Verfasser den zweiten Teil einer vollständigen Umarbeitung unterzogen und ausser zahlreichen Aenderungen bedeutende Erweiterungen eintreten lassen. Neu aufgenommen wurde die Methode der Lösung kubischer Gleichungen durch unendliche Reihen und auf trigonometrischem Wege, sowie die Lösung der biquadratischen Gleichungen nach Cartesius, Euler, Ampère u. s. w. Zur leichteren Auffindung der Wurzeln bei den höheren Gleichungen im allgemeinen dienen das Gesetz der Coefficienten und der Lehrsatz des Cartesius, welche ausführlicher entwickelt sind; desgleichen die ebenfalls neuen Paragraphen von den Grenzen der Wurzeln und von den gleichen Wurzeln einer Gleichung. Die Anwendung der Logarithmen ist nun auch auf die Lösung der quadratischen und kubischen Gleichungen ausgedehnt worden; hieran schliessen sich die Exponentialgleichungen, denen gegenwärtig ein besonderer Paragraph

gewidmet ist. Eine beträchtliche Erweiterung haben die arithmetischen Progressionen höherer Ordnung erfahren. Aus den Anwendungen der geometrischen Progressionen ist die Zinseszins- und Rentenrechnung herausgehoben worden. Eine Lücke, die einer grösseren Verbreitung des Buches hauptsächlich entgegenstand, hat der Verfasser durch Aufnahme des binomischen Lehrsatzes ausgefüllt, dessen Entwickelung sich auf die Combinationslehre gründet.

Für Lehrerbildungsanstalten enthält, infolge der angeführten Bereicherungen, dieser zweite Teil freilich noch mehr als früher eine Menge über die Sphäre der betreffenden Bildungsstufe hinausgehenden Stoff. Doch werden den gegenwärtigen Inhalt des Buches alle diejenigen willkommen heissen, welche nach dem Abgang vom Seminar der Mathematik ferner ihr Interesse zuwenden; da sie nicht so bald gezwungen sein dürften, das ihnen vertraut gewordene Buch aus der Hand zu legen und anderswo Belehrung zu suchen; ein grosser Reichtum wird weniger unangenehm empfunden als zu grosse Dürftigkeit. Zu einer grösseren Sicherheit auf dem Gebiete der Arithmetik und Algebra wird die um ein beträchtliches vermehrte Zahl der Uebungsaufgaben dienen. H.

Leitfaden für den Unterricht in der Algebra an Mittelschulen mit circa 3000 Aufgaben. Für die Hand der Schüler bearbeitet von J. Prisi, Sekundarlehrer, derzeit Oberlehrer in Oberhofen. II. Theil, 1. Heft. Bern 1880. K. J. Wyss. 198 S.

Das Buch kann nur für solche Schüler bestimmt sein, die, nachdem sie bereits in den Principien aller Zweige der Schulmathematik vollständig unterrichtet sind, sich weiter mit Mathematik beschäftigen wollen, ohne damit einen ernsten Zweck für wissenschaftliches Studium oder praktische Ausbildung zu verbinden. Der erste Abschnitt, welcher die Anfänge der allgemeinen Zahlentheorie enthält, ist noch der am sorgfältigsten bearbeitete und könnte noch allenfalls als Ueberleitung zum Studium angesehen werden. Er lässt an exactem Ausdruck, systematischer Ordnung und sichtlichem Fortschritt nichts vermissen; nur ist es zu verwundern, dass von Schülern von Mittelschulen ein so weites Eingehen auf die Theorie erwartet werden kann. Das wenige, was im 2. Abschnitt über Functionen gesagt wird, ist voll Unklarheiten: so soll z. B. das Zeichen $f(x, y, z)$ ausdrücken, dass x, y und z von einander abhängig sind. Die übrigen Abschnitte, Zerfällung rational gebrochener Functionen in Partialbrüche, Kettenbrüche, Auflösung unbestimmter Gleichungen, Combinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung, arithmetische Reihen höherer Ordnun-

gen, Entwickelung der Functionen in Reihen, Rechnen mit complexen Zahlen, goniometrische Lösung der quadratischen Gleichungen und die kubischen Gleichungen, haben das gemeinsame, dass sie mit Betrachtung specieller Beispiele anfangen; in diesen aber findet man manchmal willkürliche, resultatlose Operationen und Transformationen, manchmal die mehr oder weniger deutliche Hinleitung zur eigentlichen Aufgabe und Lösung, manchmal ausgesprochen, manchmal nicht, manchmal besteht die Lösung in blossem Probiren, was nie gesagt wird, manche Begriffe bleiben unerklärt, manches Zahlenresultat wird hingestellt, man sieht nicht wo es herkommt, u. s. w. Das Ganze ist voll von originellen methodischen Gedanken, verrät aber nirgends einen Hinblick auf diejenigen, welche daraus lernen wollen: es wird den Schülern ganz überlassen, jene Gedanken daraus zu abstrahiren, zu verfolgen und in die rechte Gestalt zu bringen; wenigstens wäre dieser Gesichtspunkt ganz im Einklang mit der ausgesprochenen Zumutung, dass die Leser die zahlreichen Druckfehler selbst corrigiren sollen.

H.

Ebene Trigonometrie mit einer kurzen Geschichte dieser Disciplin, einer Aufgabensammlung und erläuternden Bemerkungen. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von Eugen Bergold, Professor am Gymnasium zu Freiburg i. B. Leipzig und Heidelberg 1880. C. F. Winter. 81 S.

Die vorausgehende Geschichte der Trigonometrie berichtet nach Erwähnung der indischen Sinustafeln über die Mitwirkung von Hipparch, Menelaus, Ptolemäus, Albatenius, Peurbach, Regiomontan, Rhaeticus, Pitiscus, Neper, Byrgius, Brigg, Vlacq, Euler an der Gestaltung der Theorie. Es folgt die Goniometrie, erst des spitzen Winkels, entwickelt am rechtwinkligen Dreieck, dann die allgemeine mittelst der Coordinaten, wobei die Variation der Functionen, ihr Vorzeichenwechsel, auch rücksichtlich des Winkelvorzeichens, eingehend erörtert wird, dann die Anwendung der Logarithmen, dann das Additionstheorem mit Hülfe eines Kreisvierecks mit einem Durchmesser als Diagonale nebst allen daraus fliessenden Relationen. Die nun folgende Theorie der Dreiecksberechnung enthält auf 13 Seiten alles notwendige vollständig und reichlich. Die Aufgaben sind zuerst numerische, die sich an die Theorie anschliessen, dann solche, welche auf Stereometrie, zuletzt auf Astronomie Anwendung machen. Das Urteil über das Buch können wir kurz dahin zusammenfassen, dass es tadellos und zweckentsprechend wie selten eins bearbeitet ist und vor den logischen und didaktischen Fähigkeiten des Verfassers die höchste Achtung erweckt.

H.

Leitfaden der Physik. Von Dr. W. von Beetz, ord. Professor der Physik an der technischen Hochschule zu München, ord. Mitglied der k. b. Akademie der Wissenschaften. Mit 262 in den Text gedruckten Holzschnitten. Sechste Auflage. Leipzig 1880. L. Fernau. 300 S.

Das Buch besteht aus 482 Lehrsätzen und Erklärungen, welche aus den exacten Zweigen der Physik, nämlich Mechanik, Wärmelehre, Elektricitätslehre, Akustik und Optik alles für Anfänger wissenswerte in guter Ordnung enthalten. Beweise werden nicht gegeben; dagegen ist durch vollkommen exacte und doch leicht verständliche Wortfassung in allen Stücken für Aneignung richtiger Begriffe gesorgt, so dass die ungenügende Darstellung in zahlreichen Lehrbüchern in vielen wichtigen Punkten dadurch corrigirt wird. Ausserdem fehlt es nicht an Erläuterung und Anwendung, Angabe der Experimente und Apparate, die jedoch nur kurz nach ihren wesentlichen Stücken erklärt sind. Da der Standpunkt mathematischer Vorbildung ein sehr verschiedener sein kann, so ist die hier gewählte Form eines Leitfadens für den Unterricht, welche die Begründung dem Lehrer ganz überlässt, gewiss vollkommen gerechtfertigt. H.

Anfangsgründe der Naturlehre für die unteren Classen der Mittelschulen. Von Dr. Jos. Krist, Schulinspector und Custos des k. k. physik.-astronom. Hofcabinets. Zehnte Auflage, gleichlautend mit der durch hohen Ministerial-Erlass vom 13. Mai 1879, z. 6476 approbierten neunten Auflage. Mit 213 Holzschnitten. Wien, 1880. Wilhelm Braumüller. 232 S.

Das methodische Princip dieses Lehrbuchs ist, von der Erscheinung auszugehen und durch ursachliche Erklärung allmählich zu einem Einblick in die Theorie hinzuführen. Zweck eines solchen Unterrichts ist Anregung zur selbständigen Beobachtung. Ohne Zweifel wäre es eine der grössten Leistungen, wenn Trieb und Befähigung hierzu bei einer grössern Zahl von Schülern erzeugt werden könnte. Was der Unterricht in den untern Classen voraussetzen darf, ist Trieb zur Nachahmung und unbedingte, unterschiedslose Willigkeit receptiv zu folgen. Hierauf scheint in der Tat die Abfassung des Buches zu bauen. Die Lehren werden in pragmatischer Form einfach überliefert, durch den sorgfältigsten Ausdruck ist darauf geachtet, dass keine andern als streng richtige Vorstellungen und Begriffe gebildet werden, und die wenigen vorkommenden, auf niedriger Stufe stehenden Schlüsse, deren Bündigkeit gewiss kein Schüler einsieht, sind gleichwol tadellos gefasst. Eine Ausnahme davon macht nur der wie ein Monstrum unter den übrigen dastehende Satz: Alle Körper

sind gleich schwer — welcher hier als voreiliger Schluss auftritt, dennoch vom Lehrbuch sanctionirt wird, als sollten die Schüler ermutigt werden geistreich sein zu wollen. Wer nach Empfang solcher Lehren eher Lehrer wird, als er Forscher gewesen ist, behält manchmal — davon lässt sich ein Beispiel nennen — noch im hohen Alter die Unfähigkeit über den Gegenstand klar zu denken. In den ersten 5 Abschnitten ist die Beobachtung eine ganz oberflächliche, im Grunde nur qualitative; es ergibt sich aus ihr nicht viel mehr als die Gegenstände, auf welche die Beobachtung sich richten muss, und werden die Namen dafür aufgestellt. Mit dem 6. Abschnitt beginnt der Vortrag von vorn, und zwar ohne neuen Wechsel mit gleichem Masse von Gründlichkeit, Vielseitigkeit und Eingehen auf die quantitative Bestimmung, wie es bis ans Ende durchgeführt wird. Es werden von da an behandelt die Mechanik, Akustik, Optik, die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität. Auf Chemie und Wärmelehre, welche schon vorher hinreichend ausführlich besprochen sind, kommt der Vortrag nicht wieder zurück. H.

Dr. Ludwig Blum's Grundriss der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Verfasst im Auftrage der Königlichen Kommission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage bearbeitet von W. Dietrich, Hilfslehrer am Polytechnikum Stuttgart. Mit 96 Abbildungen in Holzschnitt. Leipzig und Heidelberg 1880. C. F. Winter. 162 S.

Die 5. Auflage dieses, mit anerkennenswertem Geschick dem Mangel an Selbstdenken durch Specialisirung zu Hülfe kommenden, und doch die exacte Fassung nicht vernachlässigenden Lehrbuchs ist im 241. litt. Bericht p. 10. besprochen. In der neuen Auflage ist das Gesetz von der Erhaltung der Energie stärker betont, und deshalb ein besonderes kurzes Capitel über dieselbe am Schlusse des Buchs hinzugefügt. Auf die Fortschritte im Bau der Wasser- und Wärmemotoren ist Rücksicht genommen. H.

Rechenhefte für die Unterklassen der Realschulen und Gymnasien und die entsprechenden Klassen höherer Bürgerschulen. Herausgegeben von Dr. H. Stier, Oberlehrer an der Realschule zu Chemnitz. 1. Heft: Die vier Species mit unbenannten Zahlen. Zweite Auflage. Chemnitz 1880. Martin Bülz. 39 S.

In grösster Ausführlichkeit und Vielseitigkeit wird zuerst das Zahlenschreiben und Zahlenlesen durch Fragen der mannichfaltigsten

Art eingeübt. Einfacher ist dann die Aufstellung der Beispiele für die 4 Species, gesondert für Kopfrechnen und Tafelrechnen. Das Buch scheint ausschliesslich für den Gebrauch des Lehrers in der Classe bestimmt. H.

Sammlung von Aufgaben aus der Goniometrie und ebenen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Unterricht auf höheren Lehranstalten und zum Selbststudium zusammengestellt von Professor Dr. O. Hermes. Berlin 1879. Winckelmann u. Söhne. 292 S.

Das Gegenwärtige bildet den 3. Teil der „Sammlung von mathematischen Aufgaben“. Die Aufgaben verlangen teils numerische Berechnung mit Hülfe fünfstelliger logarithmischer Tafeln, teils Umformung allgemeiner Ausdrücke, teils Construction nach trigonometrischer Rechnung, teils Beweis gegebener Lehrsätze. Bezüglich auf Goniometrie kommen zu den sich hieraus ergebenden Aufgaben hinzu goniometrische Gleichungen und goniometrische Lösung algebraischer Gleichungen. Bezüglich auf Trigonometrie enthält die Sammlung zuerst Fundamentalaufgaben, dann Berechnung und Construction von Dreiecken aus mannichfaltigen Daten, dann Aufgaben über Vierecke, dann Erklärung der Tansversalentheorie nebst Aufgaben darüber, dann Anwendungen auf Maxima und Minima, kubische Probleme, Mechanik und Optik. Am Schluss stehen die Resultate. H.

Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Für den Schulgebrauch sachlich und methodisch geordnet und mit Hülfsmitteln zur Bearbeitung versehen von Dr. J. O. Gandtner und Dr. K. F. Junghans. Erster Theil, die Anwendung der Proportionen nicht erfordernd. Mit sechs Figurentafeln. Vierte Auflage, herausgegeben von Dr. K. F. Junghans. Berlin 1879. Weidmann. 214 S.

Voraus geht das Verzeichniss der als bekannt angenommenen Grundsätze, Lehrsätze und Aufgaben aus der Elementargeometrie. Das nächste sind dann Folgerungen aus denselben, welche vom Schüler durchzuführen sind. Sie beginnen mit den leichtesten, und zwar ist diese ganz leichte Art ziemlich zahlreich, selbst die höchste Stufe macht noch mässige Anforderungen; überdies ist der Weg der Folgerung stets angedeutet. Der Gesichtspunkt ist also wol, den Minderbegabten zur freien Anwendung des Erlernten Mut zu machen und jeden Vorwand des Zurückbleibens auszuschliessen. Ebenso bilden die Aufgaben eine ähnliche Stufenfolge. H.

Technik.

Bewegliche Modelle aus Stahlstäbchen für den Unterricht in der höheren Geometrie. I. Serie. Von Dr. F. Buka. Berlin 1879. Winckelmann u. Söhne.

Diese Modelle, welche von der Verlagsbuchhandlung geliefert werden, stellen die durch bewegte Gerade und ihre Schnitte erzeugten Gebilde nebst deren Variation, in Dimensionen von c. 30^{cm}, dar. Die erste Serie enthält folgende 5 Modelle. I. Zwei projectivisch gleiche Punktreihen 1. Ordnung mit den Verbindungslinien homologer Punkte zeigen den stetigen Uebergang aus Parallelstrahlenbüscheln in Parabeln, hyperbolische Paraboloide und gewöhnliche Strahlenbüschel. Durch Combination des Modelles mit einem gleichartigen wird ein Rhombus mit 2 zu seinen Seiten parallelen Scharen Gerader hergestellt, und derselbe durch stetige Bewegung in Parabeln und Paraboloide mit beiden Scharen Gerader — darunter gleichseitige — übergeführt. II. Mit Hülfe zweier projectivischen Punktreihen 1. Ordnung und der Verbindungslinien homologer Punkte erhält man in continuirlicher Folge Strahlenbüchel 1. Ordnung, die verschiedensten Formen von Ellipsen (darunter den Kreis), von einmanteligen Hyperboloiden und Hyperbeln. III. Eine Punktreihe 1. und eine zu ihr projectivische 2. Ordnung (Kreis) zeigen — zum Teil in stetiger Folge — verschiedene prägnante Formen der 3 Typen geradliniger Flächen 3. Ordnung (mit ihren Doppelgeraden) und den Uebergang derselben in solche 2. Ordnung. IV. Zwei projectivisch gleiche und gleich grosse Kreise zeigen, jenachdem sie behufs Verbindung homologer Punkte gleichstimmig oder ungleichstimmig in parallele Ebenen gelegt werden, durch stetige Bewegung 1) den Uebergang aus dem Parallelstrahlenbüschel in elliptische Cylinder, Rotationscylinder, in Rotations- und allgemeine Hyperboloide und Kegel, sowie in verschiedene Flächen 4. Ordnung; 2) den Uebergang aus dem Parallelstrahlenbüschel in das gerade Kreiskonoid und verschiedene andre Arten geradliniger Flächen 4. Ordnung mit Doppelcurven, endlich in eine dem Plückerschen Konoid verwandte Flächenfamilie 3. Ordnung. Die Kreise sind ferner so eingerichtet, dass sie einander wie die Glieder einer Kette umfassen können. Hierdurch und durch Combination mit dem projectivisch ähnlichen Kreise aus Modell III. erhält man weitere Arten geradliniger Flächen 3. und 4. Ordnung. Aus dem Modell lassen sich weiter Hyperboloide mit beiden Scharen Gerader, durch Combination mit Modell I. Hyperboloide mit berührenden Paraboloiden (durch Uebergang aus Cylinder mit Tangentialebene) und die Schnittcurven einer Ebene oder eines windschiefen Paraboloids mit Cylinder, Kegel und Hyperboloid etc. darstellen. V. Mit Hülfe einer Schrauben-

linie von c. 4 Umgängen können die verschiedensten Arten rechts und links geschränkter windschiefer (darunter axialer) Schraubenflächen, ihre Selbstschnitte, ihr Schnitt mit einer zur Axe normalen Ebene, der Schnitt zweier Schraubenflächen von gleicher Axe etc. gezeigt werden. — Die axialen Schraubenflächen lassen sich stetig in einander überführen.

Auf den Stativen der Modelle I. bis IV. sind Mechanismen angebracht, welche die instructiven Bewegungen leicht ausführen lassen. Deren Gebrauchsanweisung ist in der beigegebenen Schrift: „Beschreibung zu Dr. F. Buka's beweglichen Modelle, I. Serie" — enthalten. H.

Neuere Apparate für naturwissenschaftliche Schule und Forschung. Gesammelt von M. Th. Edelmann, Privatdocent an der technischen Hochschule und Inhaber des physical-mechanischen Instituts in München. II. Lieferung. Mit 10 lithographirten Tafeln. Stuttgart 1880. Meyer u. Zeller. 162 S.

Die I. Lieferung ist im 253. litt. Bericht S. 2. besprochen. Zu den daselbst aufgeführten Apparaten kommen jetzt hinzu: Lamont's erdmagnetische Variations-Instrumente, Weber's Erdinductor, Apparate für Bestimmung der Elasticitätsmodule und des Wärme-Ausdehnungs-Coefficienten, Luftpumpe und ihre Behandlung, Apparat zur Bestimmung des specifischen Gewichts und der Volumveränderung der Gase, Quadrantenelektrometer, Wiedemann's Galvanometer, astasirende Magnete nach Hauy und du Bois-Reymond. H.

Optik.

Die subjektive Perspektive und die horizontalen Curvaturen des dorischen Styls. Eine perspektivisch-ästhetische Studie von Dr. Guido Hauck, Professor der deskriptiven Geometrie und Graphostatik an der Königl. technischen Hochschule zu Berlin. Mit zwei Figuren-Tafeln. Eine Festschrift zur fünfzigjährigen Jubelfeier der technischen Hochschule zu Stuttgart. Stuttgart 1879. Konrad Wittwer. 147 S.

Die Schrift gehört nach ihrem ganzen Inhalte der theoretisch-physiologischen Optik an, die sie jedoch ausschliesslich den Gesichtspunkten und Erfordernissen der darstellenden Kunst unterwirft. Wir finden darin die mathematische Erklärung der Regeln, welche sich

empirisch aus der künstlerischen Praxis ergeben haben. Der Verfasser rechnet auf manchen Widerspruch gegen seine Aufstellungen; eine Entscheidung über deren Richtigkeit kann hier nicht gegeben werden; es genügt, dass sie in klarer Weise niedergelegt sind. Er führt aus, dass ein Bild nach reiner Centralprojection deshalb als todt und wirkungslos erscheint, weil es der wirklichen Beschauungsweise nicht entspricht, wo das Auge, um zuerst die bedeutungsvollen Linien zu verfolgen, nicht nur central gedreht, sondern auch dem Bilde parallel verschoben, und um nach einander die Details aufzufassen, dem Bilde bald genähert, bald von ihm entfernt wird. Dass nun für eine Darstellung, welche solchen subjectiven Anforderungen Rechnung tragen soll, ein exacter Standpunkt der Theorie unmöglich ist, leuchtet ein. Es mag daher genügen die Hauptgegenstände zu nennen, von denen die Schrift handelt. Im ersten Teil ist enthalten: der Mechanismus der Augenbewegungen, das Innervationsgefühl und die Blickbahnen, das Listing'sche Gesetz und die Empfindung der Geradlinigkeit, Doppelauge, Kopfdrehungen, Augenmass, die subjectiv-perspectivischen Curvaturen und das Collinearitäts-Bewusstsein, das subjective Anschauungsbild und die Definition der Perspective, das collinear- und conform-perspectivische System, das conform-perspectivische Bild und das subjective Anschauungsbild, vergleichende Kritik der collinearen und conformen Perspective, die gekrümmte Bildfläche (keramische Bilder), nebst einem Anhang über physische und psychische Formenfreude. Der II. Teil handelt von den horizontalen Curvaturen des dorischen Styls. H.

Astronomie und Meteorologie.

Fluth und Ebbe und die Wirkungen des Windes auf den Meeresspiegel. Von Hugo Lentz, Wasserbau-Inspector in Cuxhaven. Mit 44 Figuren auf 9 Tafeln. Hamburg 1879. Otto Meissner. 230 S.

In der historischen Einleitung werden die Ansichten von Strabo, Plinius, Kepler erwähnt, die Untersuchungen und Theorien von Newton, Daniel Bernoulli, Laplace, Lubbock und Whewell charakterisirt. Nach Whewell, d. i. nach einer Zwischenzeit von c. 40 Jahren, ist das Gegenwärtige die erste umfassende Arbeit über den Gegenstand, daher von nicht geringer Bedeutung, sofern sie die grosse Anzahl neuerer Ergebnisse enthält. Die Theorie von Newton wird ausführlich dargelegt; alles übrige ist eine Verarbeitung und Zusammenstellung der vorhandenen Küstenbeobachtungen, geographisch geordnet, nebst Vergleichung mit der Newton'schen Theorie. H.

Astronomische Geographie. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik von H. C. E. Martus, Professor an der Königstädtischen Realschule in Berlin. Mit 96 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1880. C. A. Koch. 348 S.

Astronomische Geographie ist dasselbe wie mathematische Geographie, nämlich der besondere Teil der Astronomie, der von der Erde handelt. Das Buch ist für den Schulunterricht bearbeitet und zwar waltet darin der pädagogische Grundsatz, dass der Schüler die Wege der Ermittelung aller Resultate kennen lernen und die Fähigkeit erwerben soll alle Rechnungen selbst zu vollziehen, soweit dies mit Kenntniss der ebenen Trigonometrie und einiger hinzuzulernenden Sätze aus der sphärischen möglich ist. Die Form des Vortrags ist die beschreibende. Er nimmt in jedem Punkte seinen Ausgang in Beobachtungen und Erfahrungen, unter denen sehr reichhaltig diejenigen vertreten sind, welche jedermann offen stehen; doch werden auch die Instrumente genauer Messung beschrieben und sind abgebildet. Die Hauptabschnitte sind: der Sternhimmel, die Erde, ihre Kugelgestalt, ihre Grösse, ihre Bewegung, nämlich ihre Umdrehung, dann ihr Umlauf, endlich das Erdsphäroid. Dass wir an dem Gegenwärtigen ein in exact wissenschaftlichem Geiste von einem den Gegenstand vollkommen beherrschenden Verfasser geschriebenes, und doch auf die Fassungskraft der Schüler ganz berechnetes Lehrbuch besitzen, ist in hohem Grade zu schätzen. H.

Nautik.

Beitrag zur Theorie der Stabilität schwimmender Körper. Von H. Schunke, Marine-Ober-Ingenieur. Kiel 1880. Paul Toeche. 54 S.

Der Verfasser nimmt in die Aufgabe der Bestimmung der Stabilität schwimmender Körper unmittelbar alle Bedingungen auf, welche für die Construction eines Schiffes erfordert werden. Es handelt sich also nicht bloss um die statische Stabilität in der Gleichgewichtslage, sondern um die Bedingungen sicherer Fahrt auch bei endlicher Entfernung aus derselben und bei Einwirkung äusserer Kräfte. Die Stabilität ist dann das Drehungsmoment, welches aus der Schwere des Schiffes, dem Auftrieb und den äussern Kräften resultirt, positiv im Sinne einer Drehung nach der aufrechten Gleichgewichtslage hin, wobei die Beharrung noch ausser Betracht bleibt. Diesen Begriff hat der Verfasser im Anfang vor Augen, wo er die bisherige Be-

handlungsweise der Aufgabe schlechthin als ungenügend bezeichnet. Doch von einem so umfassenden Gesichtspunkte greift er selbst sie nicht an. Er geht nicht nur von der Stabilität im Gleichgewicht aus, sondern bestimmt auch diese nicht sofort allgemein, vielmehr erst in Bezug auf eine in der Symmetrieebene liegende horizontale Axe, dann mit Berücksichtigung der Neigung um die transversale Axe. Als Hauptziel erscheint es nun, den Begriff, die Construction und den Satz des Metacentrums der vorgesetzten Aufgabe gemäss zu erweitern. Die Bearbeitung schliesst sich zunächst an das die gewöhnlich geltende Theorie repräsentirende Werk von Bouguet an, aus welchem, nach Definition der notwendigen Begriffe, Deplacement (d. i. Raum des verdrängten Wassers), Schwimmaxe, Wasserlinie, Neigungsaxe, Deplacementsschwerpunktscurve u. s. w., die Resultate in Sätzen zusammengestellt werden. Nachdem dann der erweiterte Fall eigentlich mehr durchgesprochen als analytisch behandelt ist, werden Anwendungen auf bestimmte geometrische Körper, Prismen von kreisförmigem, elliptischem, rechteckigem und gleichschenklig dreieckigem Querschnitt gemacht. Den Schluss bildet eine längere und eingehendere Besprechung der Aufgabe, die momentane Lage der Neigungsaxe zu bestimmen. Es werden Meinungen und Resultate von Bouguet, Rankine und Ungenannten aufgeführt, das Princip der kleinsten Wirkung für die geeignete Untersuchungsbasis erklärt, und ein constructiver Auffindungsweg angegeben. H.

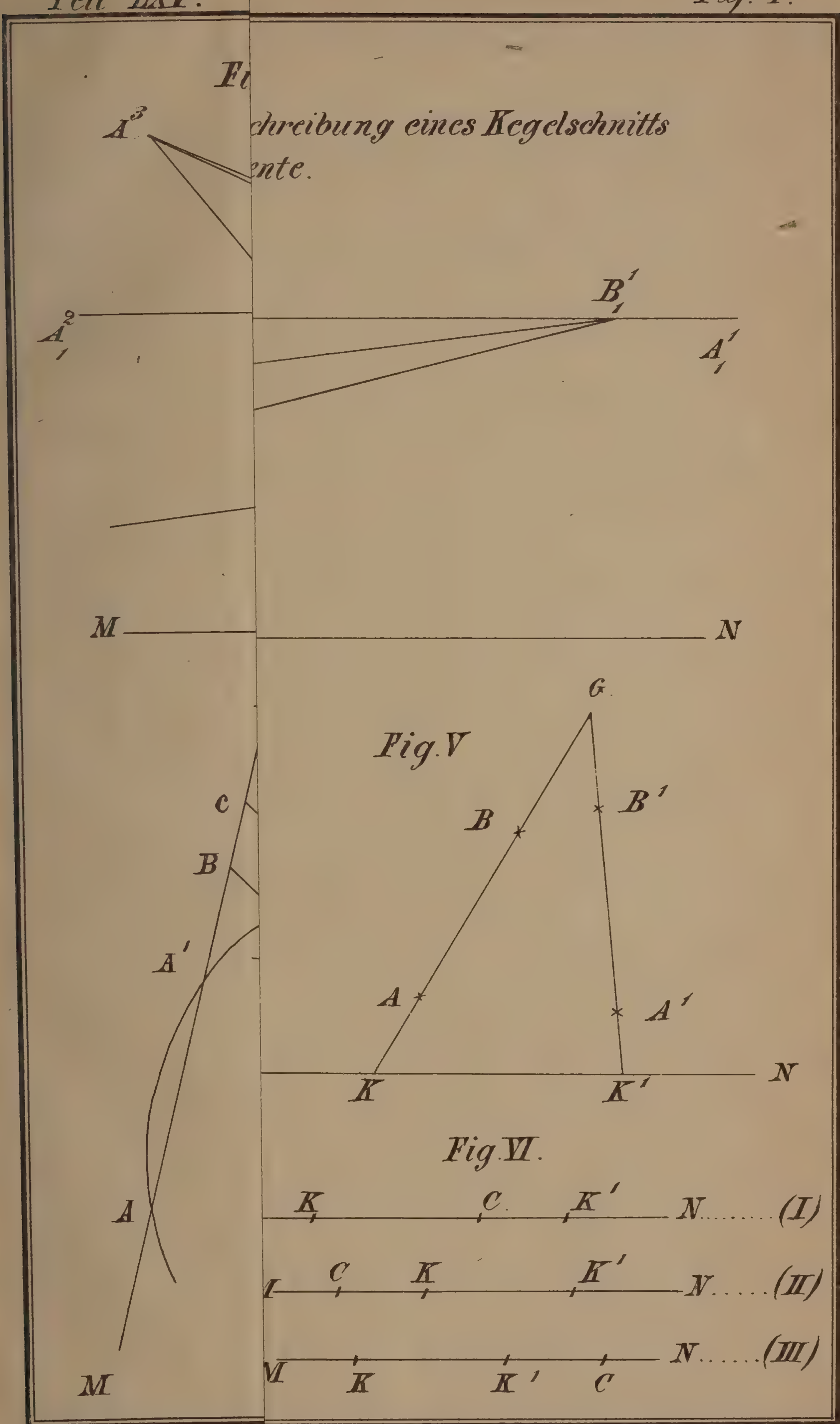
Vermischte Schriften.

Atti della R. Accademia dei Lincei anno CCLXXVII. 1879—80. Serie terza. Transunti. Volume IV. Roma 1880. Salviucci.

Der Band enthält an mathematischen Abhandlungen und Noten folgendes.

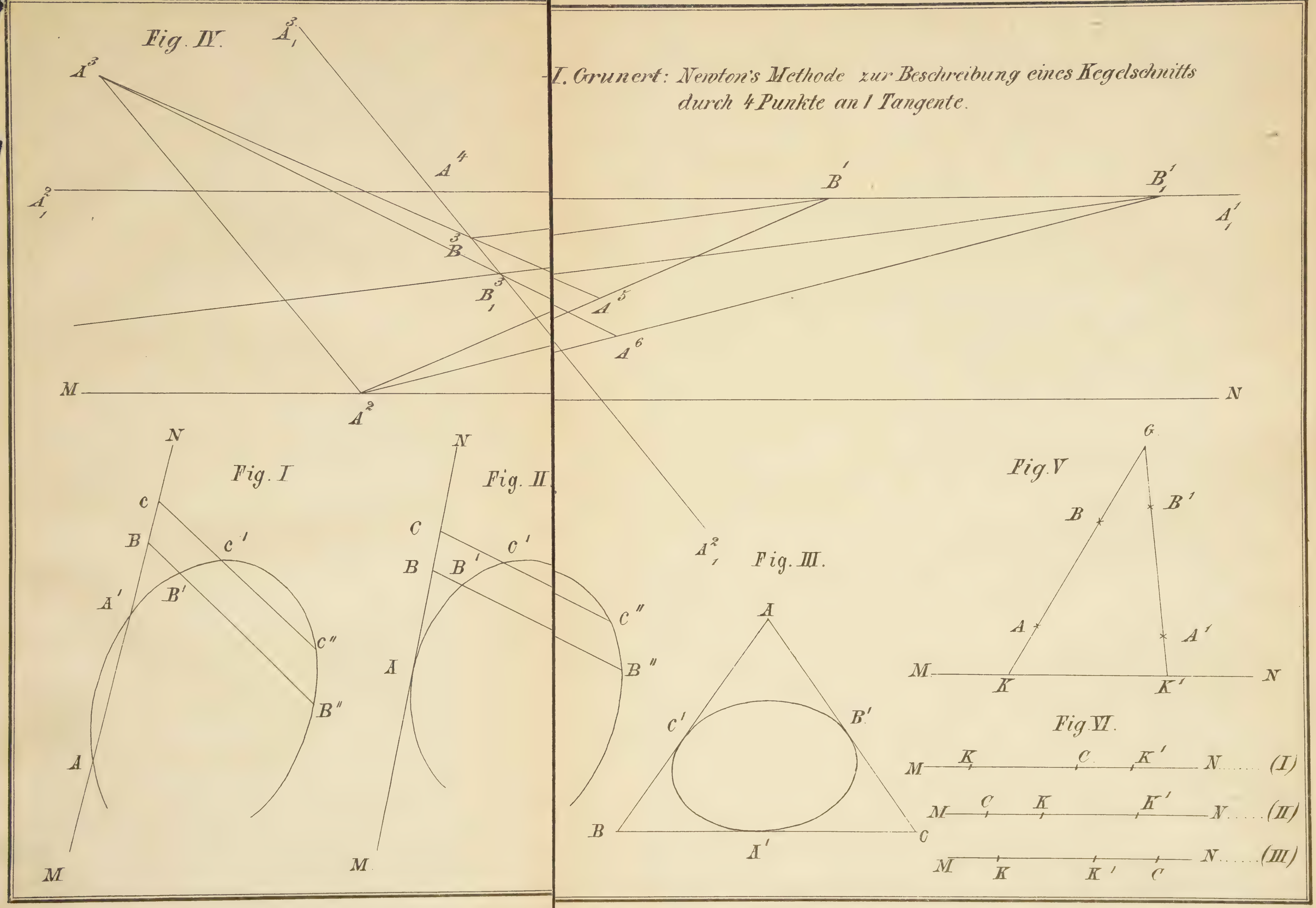
E. Bertini: Ueber die Congruenz 2. Ordnung, 6. Classe, und 1. Gattung, welcher allein eine focale Fläche zukommt. — C. Guidi: Ueber die graphische Bestimmung der innern Kräfte in einem homogenen an den Enden unterstützten und einer beweglichen Belastung unterworfenen Balkennetze. — Battaglini: Ueber die elliptische Differentialgleichung. — De Gasparis: Ueber die Variation der Excentricität der Planetenbahnen. — G. Celoria: Ueber einige alte Sonnenfinsternisse und insbesondere über die des Agathokles. — G. Gautero: Ueber die Bewegung einer Fläche, welche eine feste Fläche beständig berührt. — De Gasparis: Ueber die Variation

der Flächengeschwindigkeit des Mondes relativ zur Erde infolge der Einwirkung der Sonne. — G. Veronese: Ueber einige bemerkenswerte Configurationen von Punkten, Geraden und Ebenen, Kegelschnitten und Flächen 2. Grades. — A. Bartoli: Ueber die Gesetze der galvanischen Polarität. — Siacci: Ueber einen Satz von Jacobi. — Brioschi: Ueber eine Classe von Differentialgleichungen, welche sich durch elliptische Functionen integriren lassen. — De Gasparis: Beweis und Anwendung einer neuen Formel zur Berechnung der planetarischen Störungen. — G. A. Maggi: Ueber die Geschichte der cylindrischen Functionen. — Ausser den Sitzungsberichten und Artikeln aus verschiedenen andern Wissenszweigen enthält ferner die Zeitschrift fortlaufende Publicationsverzeichnisse und meteorologische Beobachtungen. H.

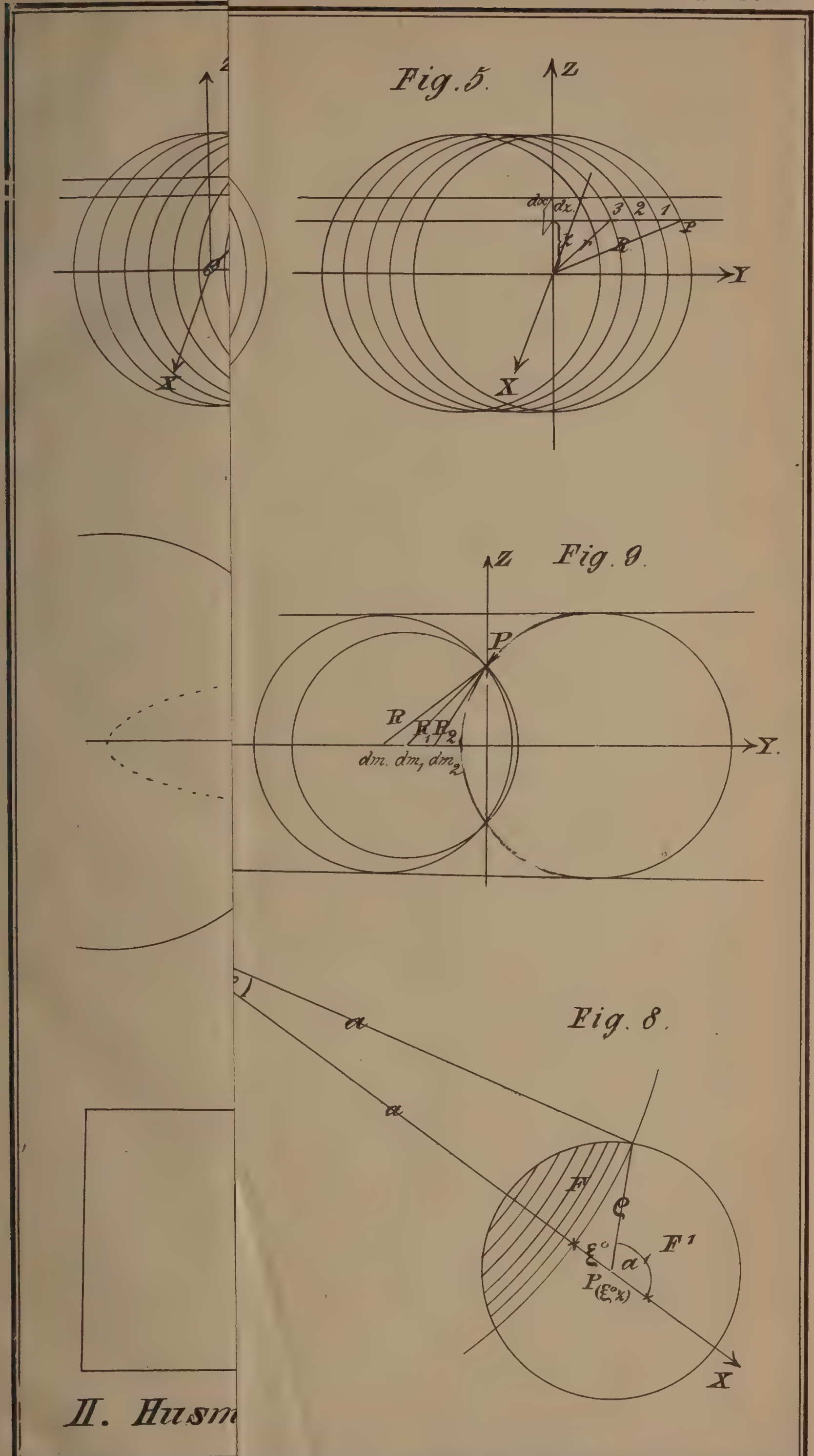


 Steindruckerei v. F.W. Kunike Greifswald.

I. Grunert: Newton's Methode zur Beschreibung eines Kegelschnitts durch 4 Punkte an 1 Tangente.



Steindruckerei v. F.W. Kunike Greifswald.



Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifswald.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 5.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 9.

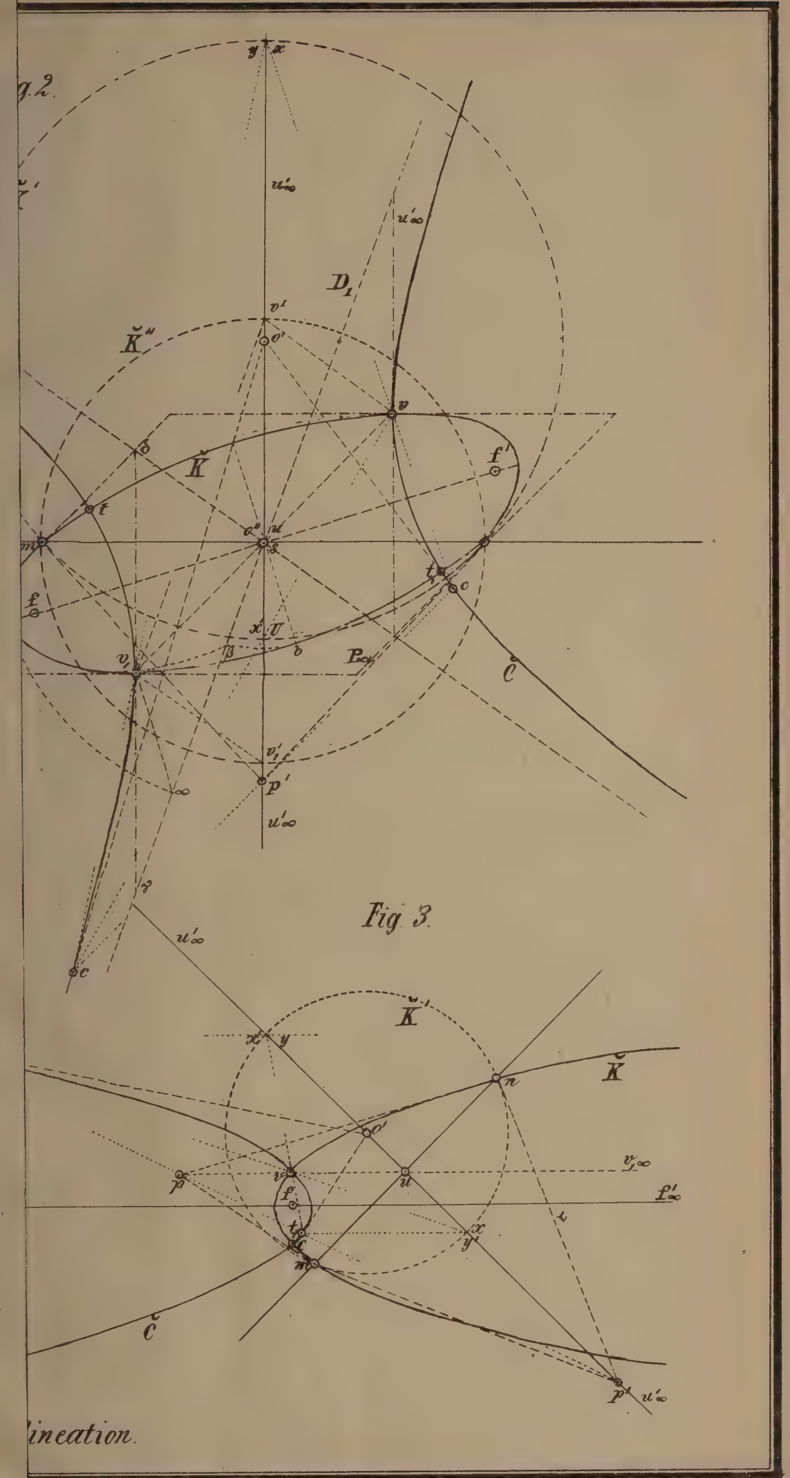
Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

II. Husmann: Ueber äquipotentiale Massenver[...]teilungen.

Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifswald.



Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifsw.

Fig. 1.

Fig. 2.

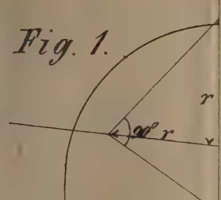
Fig. 3

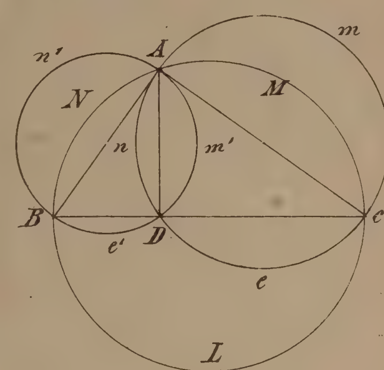
Fig. 4.

Fig. 5.

VIII. Jeřábek: Ort des Centrums der Collineation.

Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifsw.





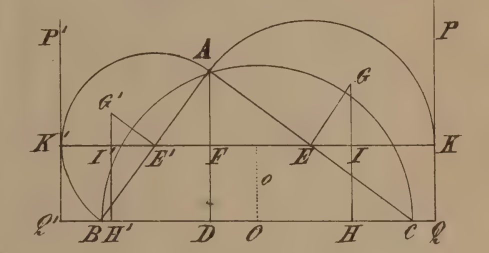


Fig. 3.



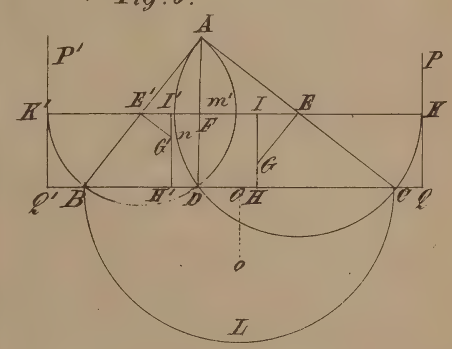


Fig. 5.

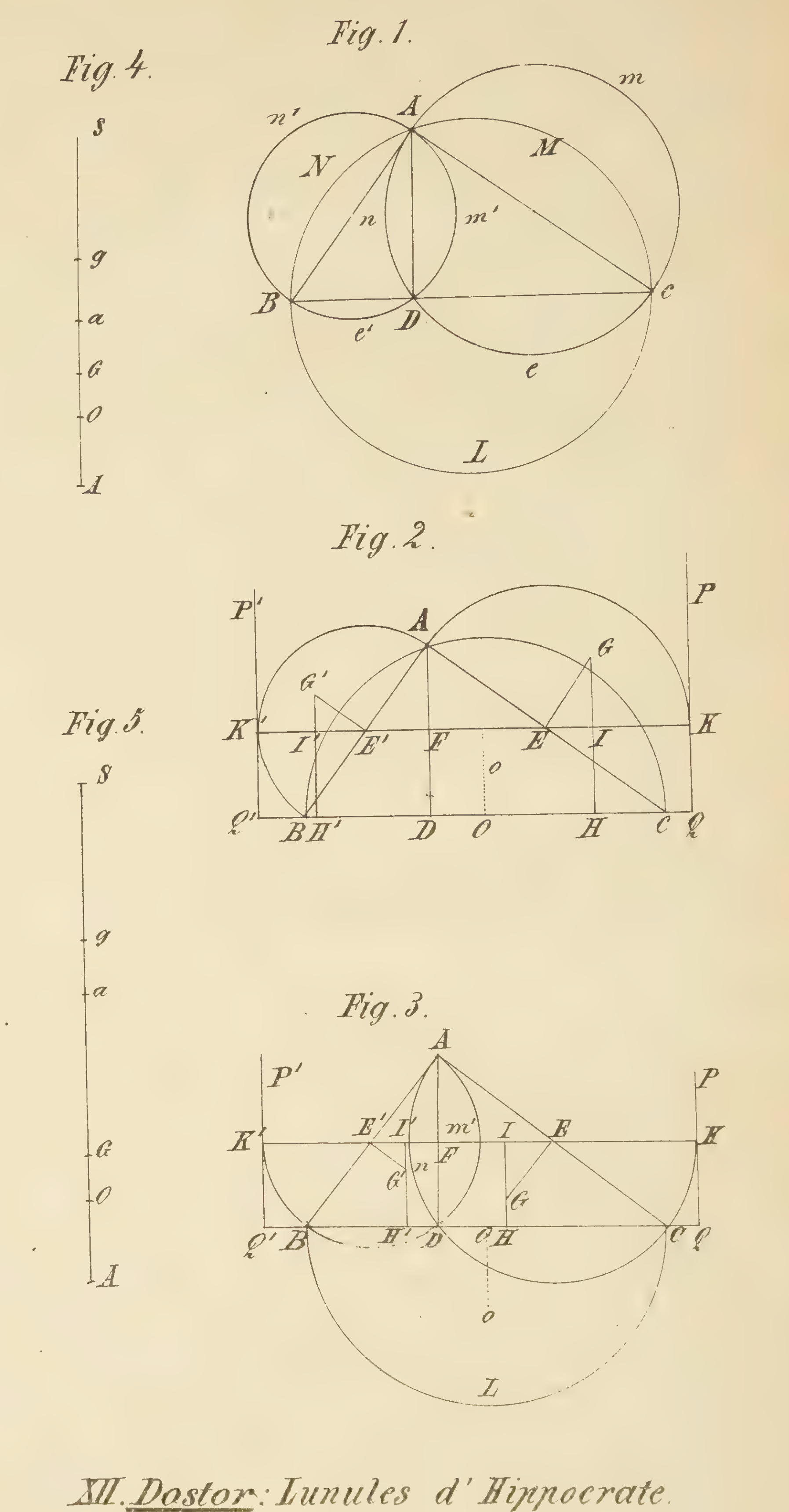
...stor: Lunules d' Hippocrate.

VII. Winterberg: Anzieh...

Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifswald.

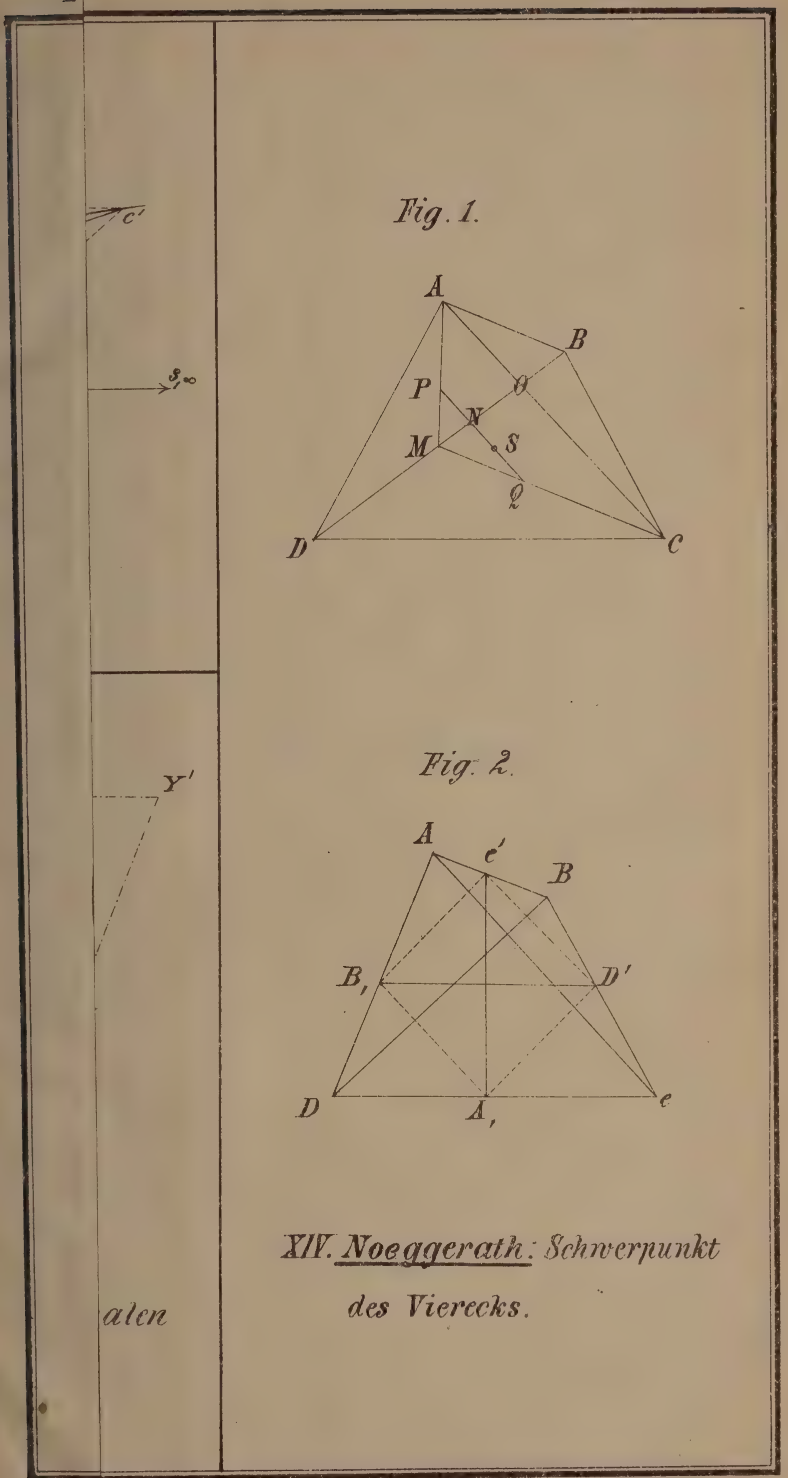
VII. Winterberg: Anziehung von Massenpunkten.

X. Hoppe: Excentrischer Kugelsector.

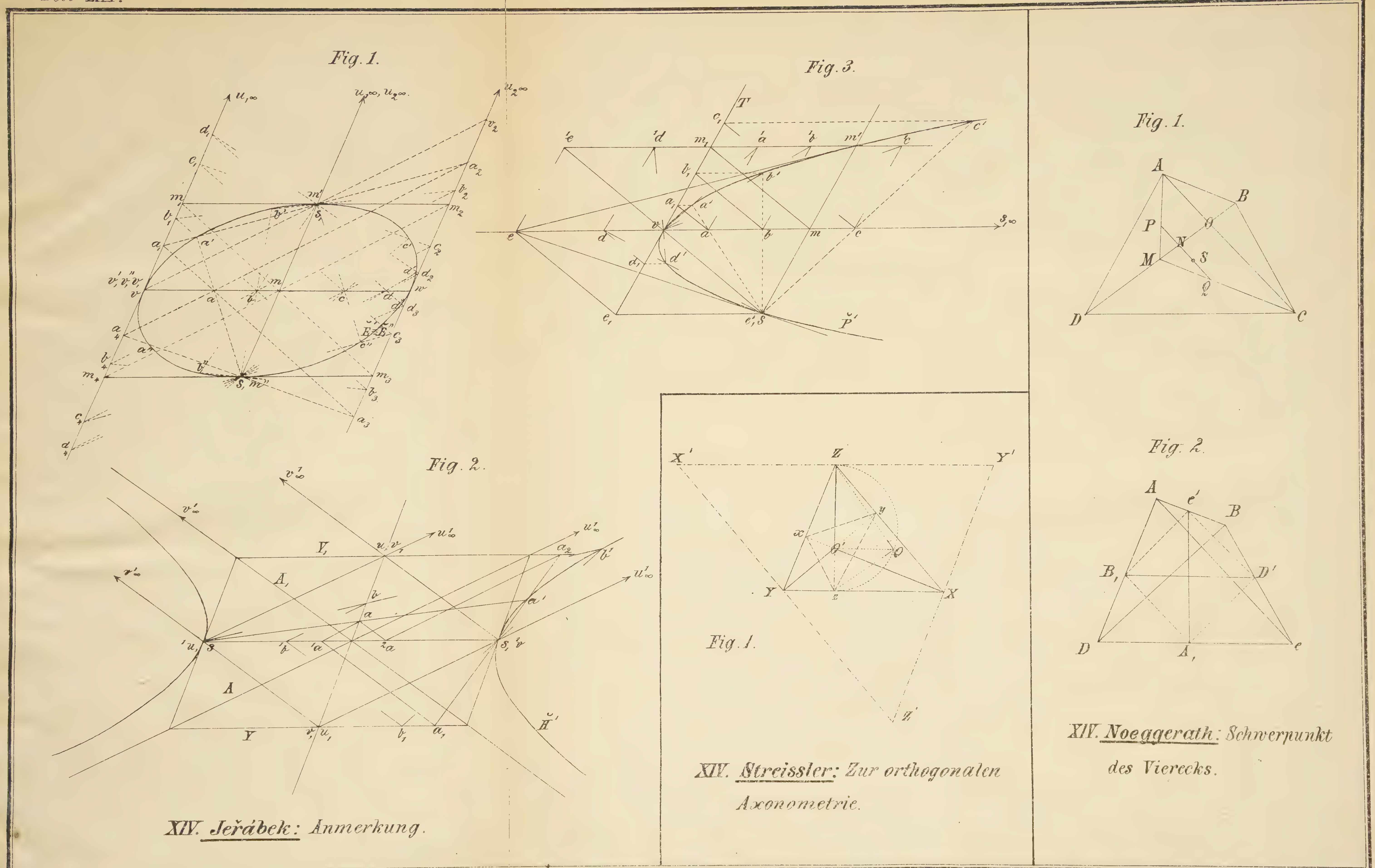


XII. Dostor: Lunules d'Hippocrate.

Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifswald.



Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifswald.



Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifswald.

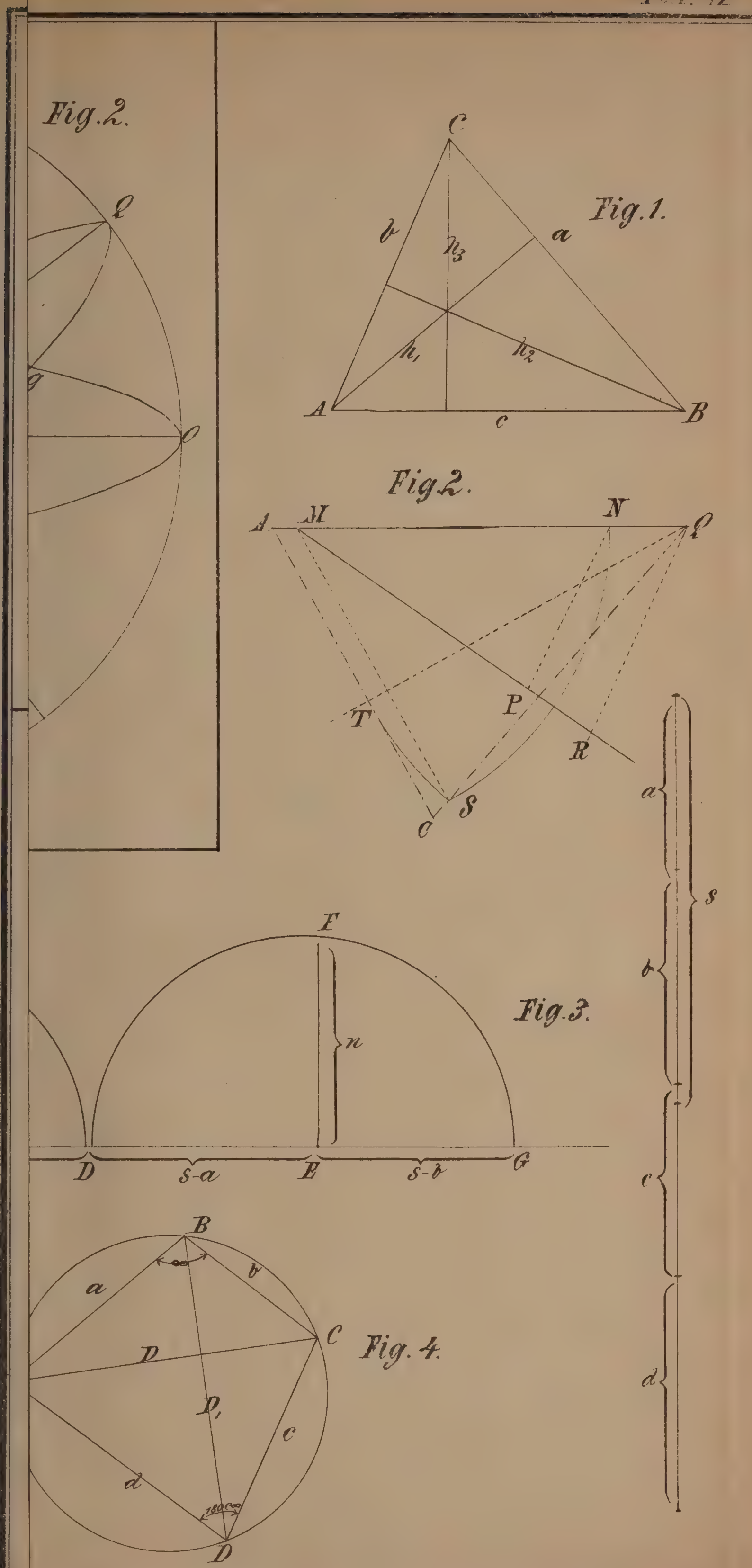
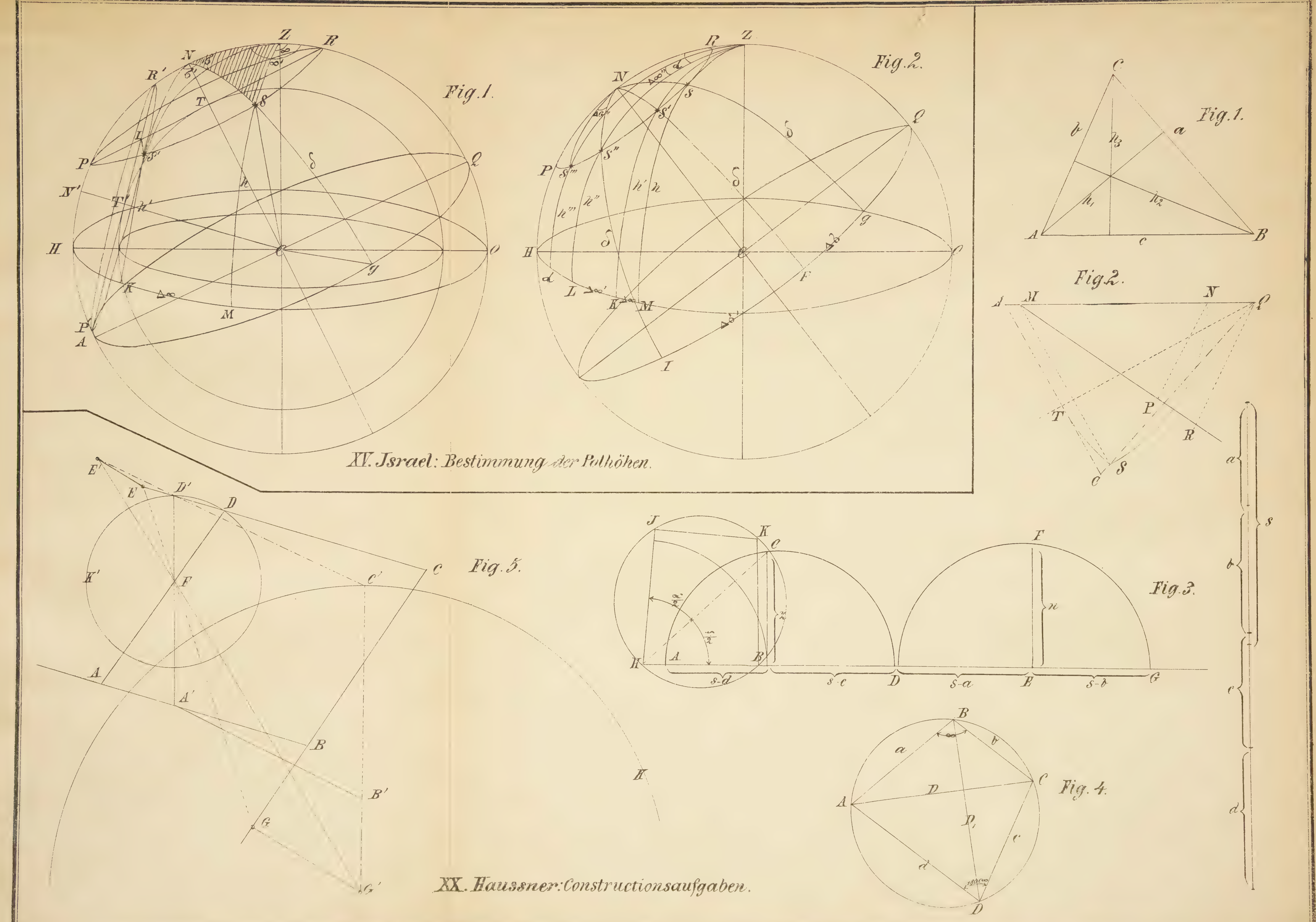
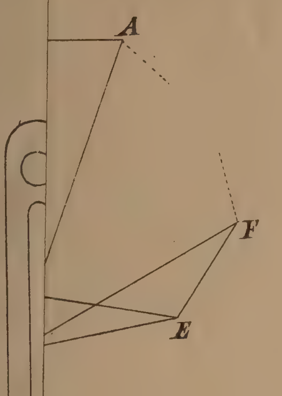


Fig. 2.
Q
g
O
C
Fig. 1.
b
a
h_3
h_1
h_2
A
B
c
Fig. 2.
A
M
N
Q
T
P
R
S
C
a
s
b
F
Fig. 3.
n
D
s-a
E
s-b
G
c
B
a
b
C
Fig. 4.
D
D_1
c
d
180°-∞
D
d

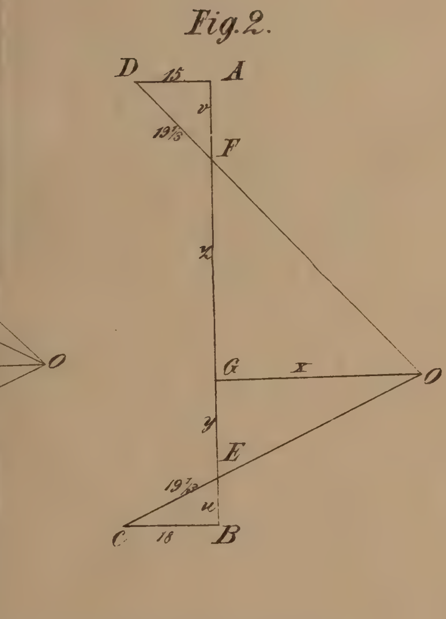

Fig. 1.
Fig. 2.
XV. Israel: Bestimmung der Polhöhen.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
XX. Haussner: Constructionsaufgaben.



…l der innern Diagonalschnitte.

Fig. 2.

Fig. 2.



…der Säulenverjüngung.

Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifsw.

Grun…

Fig. 1.

Fig. 2.

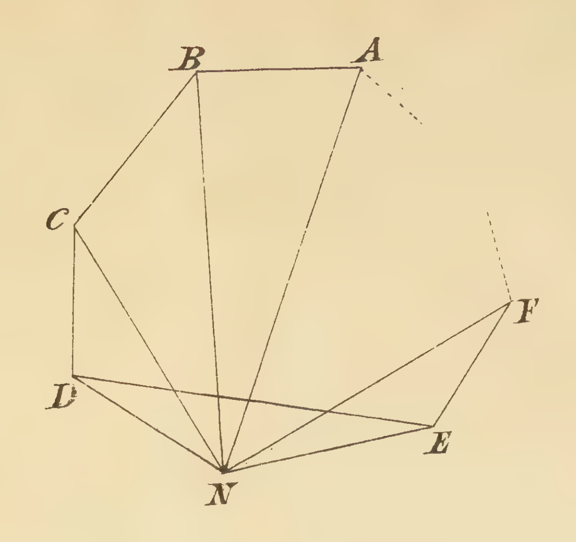
Fig. 3.

Fig. 4.

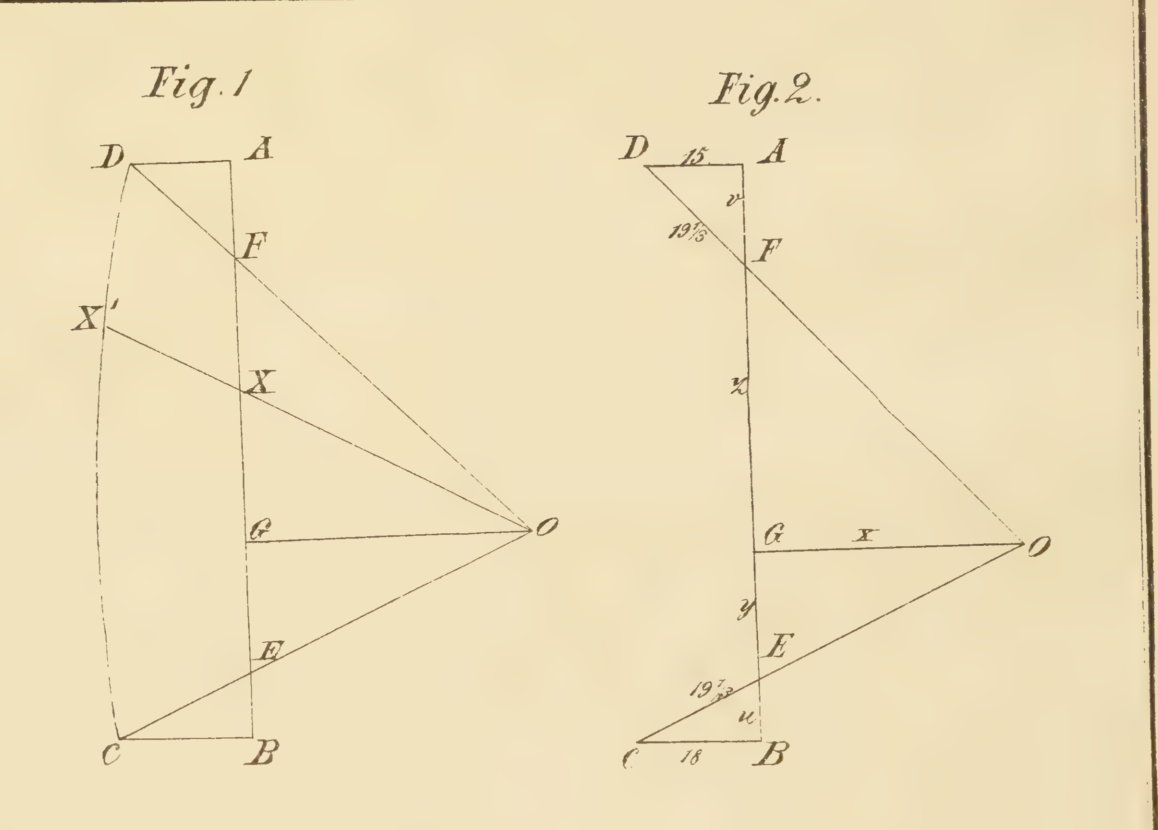
Fig. 5.

Fig. 6.

XXVI. Sidersky: Ellipsograph.



XXVII. Englert: Anzahl der innern Diagonalschnitte.



XXVII. Hain: Das Gesetz der Säulenverjüngung.

Steindruckerei v. F. W. Kunike. Greifsw.

